

МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
«АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ І
МАШИНОЗНАВСТВА – 2026»

THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
«ACTUAL PROBLEMS OF MECHANICS
AND MECHANICAL ENGINEERING – 2026»

26 – 28 травня, 2026

МАТЕРІАЛИ ДОПОВІДЕЙ

2026

МІЖНАРОДНА НАУКОВА КОНФЕРЕНЦІЯ
«АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ І
МАШИНОЗНАВСТВА – 2026»

THE INTERNATIONAL SCIENTIFIC CONFERENCE
«ACTUAL PROBLEMS OF MECHANICS
AND MECHANICAL ENGINEERING – 2026»

26 – 28 травня, 2026

МАТЕРІАЛИ ДОПОВІДЕЙ



2026

**Матеріали доповідей Міжнародної наукової конференції
«Актуальні проблеми механіки і машинознавства – 2026» [Електронний ресурс]**

Головний організатор:

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України

Співорганізатори конференції:

Національний комітет України з теоретичної і прикладної механіки; Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України; Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України; Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України; Відділення фізики гірничих процесів Інституту геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України; Інститут гідромеханіки НАН України; Інститут транспортних систем і технологій НАН України; Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України; Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України; Інститут енергетичних машин і систем ім. А.М. Підгорного НАН України; Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України; Інститут математики НАН України; Київський національний університет імені Тараса Шевченка; НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»; Криворізький національний університет; Центральний науково-дослідний інститут озброєння та військової техніки ЗС України; Українське ядерне товариство; ДП «Державний науково-технічний центр з ядерної та радіаційної безпеки»; АТ «НАЕК «Енергоатом»

ПРОГРАМНИЙ КОМІТЕТ

Співголови:

Богданов В.Л., Назаренко В.М., Чирков О.Ю. (Україна)

Члени програмного комітету:

Бабій К.В. (Україна), Бобир М.І. (Україна), Бородій М.В. (Україна), Булат А.Ф. (Україна), Воробйов Є.В. (Україна), Воропаєв Г.О. (Україна), Жук Я.О. (Україна), Герасимчук О.М. (Україна), Гузь О.М. (Україна), Григоренко О.Я. (Україна), Долгов М.А. (Україна), Карпінос Б.С. (Україна), Ковтонюк П.І. (Україна), Круковський О.П. (Україна), Кубенко В.Д. (Україна), Кушнір Р.М. (Україна), Леонець В.А. (Україна), Молчанов О.М. (Україна), Назарчук З.Т. (Україна), Новогрудський Л.С. (Україна), Писаренко Г.Г. (Україна), Пошивалов В.П. (Україна), Радченко С.А. (Україна), Редчиць Д.О. (Україна), Русинов А.В. (Україна), Рушицький Я.Я. (Україна), Селіванов М.Ф. (Україна), Сергієнко І.В. (Україна), Сметанкіна Н.В. (Україна), Сторожук Є.А. (Україна), Ступнік М.І. (Україна), Марченко В.В. (Україна), Хіміч О.М. (Україна), Холоша В.І. (Україна), Хорошилов С.В. (Україна), Цибаньов Г.В. (Україна), Чепков І.Б. (Україна), Шевченко В.Г. (Україна), Шевченко І.А. (Україна), Шугайло О.П. (Україна), Тимоха О.М. (Україна), Agolovyan L. (Armenia), Altenbach H. (Germany), Berto F. (Italy), Carpinteri A. (Italy), Gogotsi Yu. (United States), Kaplunov Ju. (United Kingdom), Kovalovs A. (Latvia), Kujawski D. (United States), Murakami Y. (Japan), Müller W. (Germany), Nazarenko L. (Germany), Nao-Aki Noda (Japan), Pluvinauge G. (France), Pokluda J. (Czechia), Rzadkowski R. (Poland), Sunder R. (India), Surace C. (Italy), Stolarski H. (United States), Tamulevicius S. (Lithuania), Toth L. (Hungary), Xu JiuJun (China).

ISBN 978-617-95433-1-9

<https://www.doi.org/10.35668/978-617-95433-1-9>

© Інститут проблем міцності
імені Г.С. Писаренка НАН України

ЗМІСТ

О. В. Марчук, Аналітичний розв’язок термопружної задачі для функціонально градієнтних пологих оболонок та плит за наявності внутрішнього джерела енергії	6
В. Г. Шевченко, Г. О. Шевченко, О. О. Титов, В. С. Курілов, О. А. Самодрига, Визначення параметрів вібраційного млина з віброударним полічастотним збудженням для тонкого подрібнення	14
С. В. Білодіденко, Г. М. Біліченко, В. І. Гануш, М. О. Щербінін, Діагностування металу кожуха доменної печі за контролем твердості	24
С. Р. Ільїн, Л. Г. Адорська, І. С. Ільїна, Інформаційна комп’ютерна технологія діагностики та керування технічним станом устаткування шахтних підйомних комплексів	32
В. С. Дудніков, Електромеханічні пристрої повороту лопатей вітроколеса вітроенергетичних установок з горизонтальною віссю обертання	40
Т. Ф. Мокрій, Л. Г. Лапіна, С. С. Пасічник, Напружено-деформований стан і зношування пари «колесо–рейка» на коліях 1520 і 1435 мм	44
К. А. Безручко, О. В. Бурчак, Л. І. Пимоненко, О.В. Приходченко, Геомеханічні процеси, як чинник структурних перетворень твердих вуглеводневих матриць	50
О. Д. Ніколаєв, І. Д. Башлій, Д. В. Клименко, Методи стабілізації положення палива в баках космічних ступенів в умовах мікро гравітації	54
А. П. Бовсуновський, М. В. Бородій, О. А. Бовсуновський, Оцінка граничного стану валопроводів парових турбін при короткому замиканні на турбогенераторі	61
Я. В. Павлюк, Визначення деформацій осьової повзучості в тонкостінних трубчастих елементах із лінійно-в’язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану	69
І. Нестерук, Міцність конструкції як ключовий фактор підвищення ефективності доставки та маневреності різних типів транспортних засобів	77
М. Бабешко, В. Савченко, П. Стеблянко, Деякі підходи до розв’язання задач термопластичності для тіл з функціонально-градієнтних матеріалів	85
Н.С. Прядко, К.В. Тернова, Газодинаміка і міцність круглого сопла для цільних компоновок літальних апаратів	94
Ю. М. Сидоренко, Ю. І. Войтенко, Моделювання детонації заряду з мідним пористим сердечником	105
Ю. І. Войтенко, Ю. М. Сидоренко, Про механізми збільшення енергії під час вибуху складеного заряду, що містить реакційно здатні матеріали	113
О. П. Круковський, С. І. Скіпочка, В. М. Сергієнко, Л. В. Прохорець, Експрес-оцінка міцності гірських порід неруйнівними методами	118
К. С. Берхмільлер, С. В. Хорошилов, Глибоке навчання для виявлення вибухонебезпечних об’єктів на зображеннях: порівняльний аналіз	128

V. M. Pelikh, The solution of fatigue problems under combined loading by static torsion and symmetrical cyclic bending	133
І. Г. Грабар, О. В. Ксюковський, Д. А. Дубовик, Синтез, 3D-друк та експериментальні дослідження міцності анізотропних мультифракталів	141
О. П. Кривенко, П. П. Лізунов, О. Б. Калашников, Моделювання методом скінченних елементів процесу втрати стійкості термопружних неоднорідних оболонок	148
О. С. Чернявський, С. І. Долгополов, С. А. Шевченко, Особливості математичного моделювання запуску рідинного ракетного двигуна, що включає гідравлічні системи змінної структури	156
В. К. Шамаханов, С. В. Хорошилов, Визначення похибок апроксимації параболічної поверхні при використанні металевого тканого полотна та опорних пластин	161
В. О. Дзезерський, С. В. Тарасов, О. В. Сухова, В. А. Іванов, Вплив тривалості старіння на міцнісні характеристики сплавів Pb-Ca-Sn для струмовідводів свинцево-кислотних акумуляторів	166
В. А. Воскобійник, Т. Радко, Г. Якобс, А. В. Воскобійник, А. М. Онищенко, О. А. Воскобійник, Вплив великомасштабної топографії дна на структуру океанічних течій	172
С. І. Долгополов, Н. В. Хоряк, Аналіз ефективності різних систем демпфування поздовжніх коливань рідинних ракет-носіїв	180
А. Величкович, І. Шацький, В. Шопя, Розсіювання енергії у фрикційному демпфері з розімкнутою рівномірною оболонкою	188
Asieiev M.A., Lobunko O.P., Problems and Methods for Providing Cooling to Heat-Stressed Jet Engine Components	195
В. А. Пешко, А. П. Бовсуновський, Оцінка квазістатичної складової пошкодження високотемпературної області ротора під час зупинки турбіни ...	203
С. Векілов, О. Ніколаєв, В. Ліповський, Р. Пустовий, Особливості моделювання тонкостінних соплових насадків, виготовлених за адитивною технологією L-PBF	211
Д. В. Горобець, М. Б. Соболевська, Математичні моделі для оцінки міцності елементів кульшового суглоба людини при експлуатаційних навантаженнях ..	223
О. І. Моргун, П. В. Яковчук, С. М. Шукаєв, Прогнозування границі міцності пластиків, виготовлених адитивним методом, за допомогою алгоритмів машинного навчання	231
А.В. Плащинська, Моделювання швидкості росту втомних тріщин у пластинах 7075-T6 при асиметричному навантаженні	239
А. В. Столярова, С. М. Гребенюк, Визначення ефективних в'язкопружних характеристик при поздовжньому розтягу двофазового композиту	247
Г. П. Марченко, І. А. Рудавська, Вплив тертя на поширення крайової тріщини в круговому диску під рухомим контактним навантаженням	260
В. В. Сатокін, Контрольоване моделювання контактних елементів для мінімізації обчислювальних похибок і часу розрахунку	268
М. В. Маковійчук, Т. М. Даляк, Двобічні оцінки граничних навантажень за згину циліндричної оболонки з поздовжніми колінеарними тріщинами	274

О. В. Яровицина, М. О. Черв'яков, І. Р. Волосатов, Г. Д. Хрущов, В. А. Пестов, О. В. Завгородній, Аналіз термдеформаційного профілю багат шарового наплавленого металу Inconel 718	280
S. V. Filipkovskij, E. Polyakov, Modeling of an aircraft wing for studying aeroelastic vibrations	288
О. В. Романов, Д. П. Черноус, Довготривале деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів з врахуванням виду напруженого стану	296
О. О. Макарець, Л. В. Кривобоков, А. В. Демченко, С. Б. Калениченко, Статистичний аналіз якості та стабільності в процесі ремонту виробів	304
V. L. Poliakov, On the Biofiltration of Water Contaminated with Organic Pollutants	309
Н. В. Розумнюк, Течія в околі каверн різних форм та їх опір	316
Я. Загумений, Д. Кушнір, Про методи розрахунку задачі руху крилового профілю поблизу екрану	325
Г. І. Сокол, Методи, моделі та методики розрахунків та експериментальних досліджень акустичних випромінювань при стартах РКП	333
Ю. В. Книшенко, Математична модель системи реактивних двигунів малої тяги для розгінних блоків та космічних апаратів і її практичне застосування ..	337
В. В. Сорочинський, С. В. Хорошилов, Релейне керування відносним рухом космічних апаратів з використанням навчання з підкріпленням	349
Я. Дубик, В. Антонченко, В. Ясній, Нейромережеві сурогатні моделі для оперативного прогнозування напруженого стану та оцінки цілісності патрубків ВВЕР–1000	356
М. О. Катренко, Г. М. Шевельова, Аналіз досвіду проектування комбінованих ракетних двигунів	362
Ю. Я. Мешков, Г. П. Зіміна, Механічні властивості металевих матеріалів і тримка здатність в умовах дії концентраторів напружень	368
В. А. Ромашенко, С. О. Тарасовська, П. П. Лепіхін, О. С. Бейнер, Обмеження деяких критеріїв міцності анізотропних матеріалів	375

Аналітичний розв’язок термопружної задачі для функціонально градієнтних пологих оболонок та плит за наявності внутрішнього джерела енергії.

О. В. Марчук

Національний транспортний університет, Київ, Україна

ksmntu386@gmail.com

У цій публікації розвивається метод, розроблений автором, який він раніше застосовував при розв’язанні задач термонапруженого стану функціонально градієнтних шаруватих пологих оболонок та плит без внутрішнього джерела тепла. Для окремого випадку шарнірно опертих пластин та пологих оболонок з тепловим навантаженням від внутрішнього джерела тепла, розподіленім в плані за тригонометричним законом, варіаційним шляхом отримано систему неоднорідних диференціальних рівнянь. Вона розв’язується аналітично без уведення апроксимації шуканих функцій за товщиною конструкції. Другий підхід використовує поліноміальну апроксимацію шуканих функцій по товщині конструкції. Збіжність результатів розрахунків, отриманих за двома запропонованими підходами, може підтвердити їхню надійність.

Ключові слова: точний тривимірний аналітичний розв’язок, функціонально градієнтні пологі оболонки та плити, внутрішнє джерело енергії

Вступ

Розрахунку шаруватих плит з функціонально градієнтного матеріалу на термічні навантаження присвячена доволі велика кількість робіт, зокрема [1-8]. Точних аналітичних розв’язків задачі термонапруженого стану функціонально градієнтних шаруватих пологих оболонок та плит з внутрішнім джерелом тепла в публікаціях не виявлено.

1. Постановка задачі

У цій публікації розвивається метод, розроблений автором, який він раніше застосовував при розв’язанні задач термонапруженого стану функціонально градієнтних шаруватих пологих оболонок та плит без внутрішнього джерела тепла [7]. Розглядається шарувата структура в декартовій системі координат. Зовнішні поверхні шарів мають нульову крутильну кривину, $k_{12} = 0$, зміною головних кривин нехтується, $k_{11}; k_{22} = \text{const}$. Побудова дуже полого, тобто для коефіцієнти першої квадратичної форми приймаються як $A_1; A_2 \approx 1$. Вважається, що якщо радіуси кривизни значно більші за товщину структури, а її зовнішні поверхні мають таку ж кривизну, то можна записати як $1 + k_{11}z; 1 + k_{22}z \approx 1$. Введені обмеження дозволяють ототожнити криволінійну систему ортогональних координат з плоскою системою ортогональних координат. Осі x (нижній індекс 1) та y (нижній індекс 2) спрямовані

в межах площини оболонки, вісь z (нижній індекс 3) – вниз по товщині; кома в нижніх індексах означає операцію диференціювання.

Деформації шарів оболонки функціонально градієнтного матеріалу визначаються за допомогою таких рівнянь:

$$\begin{aligned} e_{ii}^{(k)} &= \frac{1}{E^{(k)}(z)} \left(\sigma_{ii}^{(k)} + \nu^{(k)} (\sigma_{jj}^{(k)} + \sigma_{33}^{(k)}) \right), \quad e_{33}^{(k)} = \frac{1}{E^{(k)}(z)} \left(\sigma_{33}^{(k)} + \nu^{(k)} \sigma_{ii}^{(k)} \right), \\ 2e_{i3}^{(k)} &= \frac{\sigma_{i3}^{(k)}}{G^{(k)}(z)}, \quad 2e_{12}^{(k)} = \frac{\sigma_{12}^{(k)}}{G^{(k)}(z)} \quad (i \neq j = 1, 2). \end{aligned} \quad (1)$$

2. Точний тривимірний розрахунок термонапруженого стану функціонально градієнтних плит та пологих оболонок при наявності внутрішнього джерела тепла (А)

Переміщення, напруження та температуру знаходимо, використовуючи наступні співвідношення [7]:

$$\begin{aligned} U_i^{(k)}(x, y, z) &= V_i^{(k)}(x, y) f_i^{(k)}(z), \quad \sigma_{i3}^{(k)}(x, y, z) = \tau_{i3}^{(k)}(x, y) f_{i+3}^{(k)}(z), \\ T^{(k)}(x, y, z) &= t^{(k)}(x, y) f_7^{(k)}(z) \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2)$$

Деформації знаходимо з відповідних рівнянь для пологих оболонок.

$$\begin{aligned} e_{ii}^{(k)} &= U_{i,i}^{(k)} + k_{ii} U_3^{(k)}, \quad e_{33}^{(k)} = U_{3,3}^{(k)}, \quad 2e_{12}^{(k)} = U_{1,2}^{(k)} + U_{2,1}^{(k)}, \\ 2e_{i3}^{(k)} &= U_{i,3}^{(k)} + U_{3,i}^{(k)} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (3)$$

Планарні напруження визначаємо з використанням закону Гука.

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{(k)} &= B_{11}^{(k)} (U_{1,1}^{(k)} + k_{11} U_3^{(k)}) + B_{12}^{(k)} (U_{2,2}^{(k)} + k_{22} U_3^{(k)}) + \\ &\quad + B_{13}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} - (\alpha_1 B_{11}^{(k)} + \alpha_2 B_{12}^{(k)}) T^{(k)}, \\ \sigma_{22}^{(k)} &= B_{21}^{(k)} (U_{1,1}^{(k)} + k_{11} U_3^{(k)}) + B_{22}^{(k)} (U_{2,2}^{(k)} + k_{22} U_3^{(k)}) + \\ &\quad + B_{23}^{(k)} \sigma_{33}^{(k)} - (\alpha_1 B_{21}^{(k)} + \alpha_2 B_{22}^{(k)}) T^{(k)}, \\ \sigma_{12}^{(k)} &= G_{12}^{(k)} (U_{1,2}^{(k)} + U_{2,1}^{(k)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язувальну систему неоднорідних диференціальних отримуємо варіаційним шляхом. За умови

$$V_1^{(k)}(x, y) = \tau_{13}^{(k)}(x, y) = \cos \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad V_2^{(k)}(x, y) = \tau_{23}^{(k)}(x, y) = \sin \frac{\pi m x}{a} \cos \frac{\pi n y}{b},$$

$V_3^{(k)}(x, y) = \tau_{33}^{(k)}(x, y) = t^{(k)}(x, y) = \sin \frac{\pi m x}{a} \sin \frac{\pi n y}{b}$ (шарнірне обпирання), вона

набуває вигляду

$$\begin{aligned} f_{i,3}^{(k)} &= -f_3^{(k)}(\bar{a}_i) + f_{(i+3)}^{(k)} \left(\frac{1}{\bar{G}_{i3}^{(k)} e^{z\gamma^{(k)}}} \right), \\ f_{3,3}^{(k)} &= f_i^{(k)} B_{i3}^{(k)}(\bar{a}_i) - f_3^{(k)}(k_{ii} B_{i3}^{(k)}) + f_6^{(k)} \left(\frac{\bar{B}_{33}^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}} \right) + f_7^{(k)} \left(B_{i3}^{(k)} \frac{\bar{\alpha}_i^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}} + \frac{\bar{\alpha}_3^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}} \right), \\ f_{(i+3),3}^{(k)} &= f_i^{(k)} \left[\bar{B}_{ii}^{(k)}(\bar{a}_i)^2 + \bar{G}_{12}^{(k)}(\bar{a}_j)^2 \right] e^{z\gamma^{(k)}} + f_j^{(k)} \left(\bar{B}_{ij}^{(k)} + \bar{G}_{12}^{(k)} \right) e^{z\gamma^{(k)}} (\bar{a}_i)(\bar{a}_j) - \\ &- f_3^{(k)}(k_{ii} B_{ii}^{(k)}(\bar{a}_i) + k_{jj} B_{ij}^{(k)}(\bar{a}_i)) e^{z\gamma^{(k)}} - f_6^{(k)} B_{i3}^{(k)}(\bar{a}_i) + f_7^{(k)} (\bar{B}_{ii}^{(k)} \bar{\alpha}_i^{(k)} + \bar{B}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)}) (\bar{a}_i), \\ f_{6,3}^{(k)} &= -f_i^{(k)} (k_{ii} \bar{B}_{ii}^{(k)}(\bar{a}_i) + k_{jj} \bar{B}_{ij}^{(k)}(\bar{a}_i)) e^{z\gamma^{(k)}} + f_3^{(k)} (k_{ii}^2 \bar{B}_{ii}^{(k)} + k_{ii} k_{jj} \bar{B}_{ij}^{(k)}) e^{z\gamma^{(k)}} + \\ &+ f_{(i+3)}^{(k)}(\bar{a}_i) - f_6^{(k)}(k_{ii} B_{i3}^{(k)}) - f_7^{(k)} (\bar{B}_{ii}^{(k)} \bar{\alpha}_i^{(k)} + \bar{B}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)}) k_{ii} \\ f_{7,3}^{(k)} &= -\frac{e^{z\gamma^{(k)}}}{\bar{\lambda}^{(k)}} f_8^{(k)}, \quad f_{8,3}^{(k)} = -f_7^{(k)} \frac{\bar{\lambda}^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}} (\bar{a}_i)^2 \quad (i \neq j = 1, 2). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут, $E^{(k)}(z) = \bar{E}^{(k)} e^{z\gamma^{(k)}}$, $a^{(k)}(z) = \bar{a}^{(k)} / e^{z\gamma^{(k)}}$, $\lambda^{(k)}(z) = \bar{\lambda}^{(k)} / e^{z\gamma^{(k)}}$, $\bar{a}_1 = \frac{\pi m}{a}$, $\bar{a}_2 = \frac{\pi n}{b}$,
 $q_t^{(k)}(z) = \bar{q}_t^{(k)} / e^{z\gamma^{(k)}}$.

Частковий розв'язок стаціонарного рівняння теплопровідності має вигляд:

$$\bar{f}_7^{(k)} = \frac{\bar{q}_t^{(k)}}{\lambda_1^{(k)}(\bar{a})^2 + \lambda_2^{(k)}(\bar{b})^2}, \quad \bar{f}_8^{(k)} = 0. \quad (6)$$

Частковий розв'язок системи диференціальних рівнянь (5) отримуємо з розв'язку наступної системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{f}_3^{(k)}(\bar{a}_i) + \bar{f}_{(i+3)}^{(k)} \left(\frac{1}{\bar{G}_{i3}^{(k)} e^{z\gamma^{(k)}}} \right), \\ -\bar{f}_7^{(k)} \left(B_{i3}^{(k)} \frac{\bar{\alpha}_i^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}} + \frac{\bar{\alpha}_3^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}} \right) &= \bar{f}_i^{(k)} B_{i3}^{(k)}(\bar{a}_i) - \bar{f}_3^{(k)}(k_{ii} B_{i3}^{(k)}) + \bar{f}_6^{(k)} \left(\frac{\bar{B}_{33}^{(k)}}{e^{z\gamma^{(k)}}} \right), \\ +\bar{f}_7^{(k)} (\bar{B}_{ii}^{(k)} \bar{\alpha}_i^{(k)} + \bar{B}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)}) (\bar{a}_i) &= \bar{f}_i^{(k)} [\bar{B}_{ii}^{(k)}(\bar{a}_i)^2 + \bar{G}_{12}^{(k)}(\bar{a}_j)^2] e^{z\gamma^{(k)}} + \\ \bar{f}_j^{(k)} (\bar{B}_{ij}^{(k)} + \bar{G}_{12}^{(k)}) e^{z\gamma^{(k)}} (\bar{a}_i)(\bar{a}_j) &- \bar{f}_3^{(k)} (k_{ii} B_{ii}^{(k)}(\bar{a}_i) + k_{jj} B_{ij}^{(k)}(\bar{a}_i)) e^{z\gamma^{(k)}} - \bar{f}_6^{(k)} B_{i3}^{(k)}(\bar{a}_i), \\ \bar{f}_7^{(k)} (\bar{B}_{ii}^{(k)} \bar{\alpha}_i^{(k)} + \bar{B}_{ij}^{(k)} \bar{\alpha}_j^{(k)}) k_{ii} &= -\bar{f}_i^{(k)} (k_{ii} \bar{B}_{ii}^{(k)}(\bar{a}_i) + k_{jj} \bar{B}_{ij}^{(k)}(\bar{a}_i)) e^{z\gamma^{(k)}} \\ +\bar{f}_3^{(k)} (k_{ii}^2 \bar{B}_{ii}^{(k)} + k_{ii} k_{jj} \bar{B}_{ij}^{(k)}) e^{z\gamma^{(k)}} &+ \bar{f}_{(i+3)}^{(k)}(\bar{a}_i) - \bar{f}_6^{(k)}(k_{ii} B_{i3}^{(k)}) \quad (i \neq j = 1, 2). \end{aligned} \quad (7)$$

Тепер розв'язок системи диференціальних рівнянь (5) можна записати так:

$$\begin{aligned}
 f_i^{(k)} &= \mu_{ij}^{(k)} C_j^{(k)} e^{(\beta_j^{(k)} - \gamma)z} + \tilde{f}_i^{(k)}, \quad f_{i+3}^{(k)} = \mu_{(i+3)j}^{(k)} C_j^{(k)} e^{\beta_j^{(k)} z} + \tilde{f}_{i+3}^{(k)} \quad (i=1,2,3; j=1,...,6). \\
 f_7^{(k)} &= C_7^{(k)} \mu_{77}^{(k)} e^{\beta_7^{(k)} z} + C_8^{(k)} \mu_{78}^{(k)} e^{-\beta_7^{(k)} z} + \tilde{f}_7^{(k)}, \\
 f_8^{(k)} &= C_7^{(k)} \mu_{87}^{(k)} e^{(\beta_7^{(k)} - \gamma^{(k)})z} + C_8^{(k)} \mu_{88}^{(k)} e^{(\beta_8^{(k)} - \gamma^{(k)})z} + \tilde{f}_8^{(k)}
 \end{aligned} \quad (8)$$

Константи інтегрування $C_i^{(k)}$ ($i=1,...,8$) знаходяться з умов контакту шарів.

3. Прикладна тривимірна модель термонапруженого стану функціонально градієнтних плит та пологих оболонок при наявності внутрішнього джерела тепла (II)

Переміщення пологої оболонки запишемо наступним чином [7]:

$$\begin{aligned}
 U_i^{(k)}(x, y, z) &= U_{il}^{(k)}(x, y) f_{il}^{(k)}(z), \\
 U_3^{(k)}(x, y, z) &= W_p^{(k)}(x, y) \varphi_p^{(k)}(z) \quad (i=1,2; l=1,2,3; p=1,2,3)
 \end{aligned} \quad (9)$$

Тут, $U_{il}^{(k)}(x, y)$ и $U_{i2}^{(k)}(x, y)$ - тангенціальні складові вектора переміщень к-того шару оболонки; $U_{i3}^{(k)}(x, y)$ - функції зсуву по осі x та y ; $W_1^{(k)}(x, y)$, $W_2^{(k)}(x, y)$ - нормальні переміщення к-того шару оболонки; $W_3^{(k)}(x, y)$ - функція обтиснення; $f_{i1}^{(k)}(z)$, $f_{i2}^{(k)}(z)$, $\varphi_1^{(k)}(z)$, та $\varphi_2^{(k)}(z)$ - поліноми першої степені; $\varphi_3^{(k)}(z)$ - поліном другої степені; $f_{i3}^{(k)}(z)$ - поліноми третьої степені.

Деформації знаходять з відповідних співвідношень для пологих оболонок (3). Напруження отримуємо з застосуванням закону Гука.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^{(k)} &= C_{11}^{(k)} e_{11}^{(k)} + C_{12}^{(k)} e_{22}^{(k)} + C_{13}^{(k)} e_{33}^{(k)} - (C_{11}^{(k)} \alpha_1^{(k)} + C_{12}^{(k)} \alpha_2^{(k)} + C_{13}^{(k)} \alpha_3^{(k)}) T^{(k)}, \\
 \sigma_{22}^{(k)} &= C_{21}^{(k)} e_{11}^{(k)} + C_{12}^{(k)} e_{22}^{(k)} + C_{23}^{(k)} e_{33}^{(k)} - (C_{21}^{(k)} \alpha_1^{(k)} + C_{22}^{(k)} \alpha_2^{(k)} + C_{23}^{(k)} \alpha_3^{(k)}) T^{(k)}, \\
 \sigma_{33}^{(k)} &= C_{31}^{(k)} e_{11}^{(k)} + C_{32}^{(k)} e_{22}^{(k)} + C_{33}^{(k)} e_{33}^{(k)} - (C_{31}^{(k)} \alpha_1^{(k)} + C_{32}^{(k)} \alpha_2^{(k)} + C_{33}^{(k)} \alpha_3^{(k)}) T^{(k)}, \\
 \sigma_{12}^{(k)} &= G^{(k)}(z) e_{12}^{(k)}, \quad \sigma_{13}^{(k)} = G^{(k)}(z) e_{13}^{(k)}, \quad \sigma_{23}^{(k)} = G^{(k)}(z) e_{23}^{(k)}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Розрахункові диференціальні рівняння отримано варіаційним шляхом. Розподіл температури за товщиною конструкції знаходимо шляхом розв'язання наступного рівняння теплопровідності.

$$-\lambda_1^{(k)} \left(\frac{\pi m x}{a} \right)^2 - \lambda_2^{(k)} \left(\frac{\pi n y}{b} \right)^2 + \lambda_{3,3}^{(k)} f_{7,3}^{(k)} + \lambda_3^{(k)} f_{7,33}^{(k)} + q_i^{(k)} = 0 \quad (11)$$

Розв'язують його методом скінченних різниць. Тут розподіл величин термонапруженого стану по товщині шару може бути довільним.

4. Результати досліджень

Розглянемо двошарову оболонку. Фізико-механічні характеристики шарів наступні: $\bar{\alpha} = 1/\text{град.}$, $\alpha^{(1)} = 23,8 \cdot 10^{-6} \cdot \bar{\alpha} / e^{\gamma^{(1)} z}$, $\alpha^{(2)} = 23,8 \cdot 10^{-6} \cdot \bar{\alpha} / e^{\gamma^{(2)} z}$. $\lambda^{(1)} = 1 / e^{\gamma^{(1)} z}$

Вт/м*град., $\lambda^{(2)} = 1/e^{\gamma^{(2)}z}$ Вт/м*град., $\bar{E} = 1$ МПа, $E^{(1)}(z) = \bar{E} e^{\gamma^{(1)}z}$, $E^{(2)}(z) = \bar{E} e^{\gamma^{(2)}z}$, $\gamma^{(1)} = -1, -5$, $\gamma^{(2)} = -\gamma^{(1)}$, $\nu^{(1)} = \nu^{(2)} = 0,3$, $h = 1$ м, $h^{(1)} = h^{(2)} = h/2$. Кривизна полової оболонки: $kr1 = \frac{8*(h/5)}{(a+b)*a}$; $kr2 = \frac{8*(h/5)}{(a+b)*b}$. Оболонка квадратна $a = b = L$, $L/h = 10,5$. Контакт шарів жорсткий. Другий шар має внутрішнє джерело тепла $q_t^{(2)} = 100*q_0/e^{\gamma^{(2)}z}$, $q_0 = 1$ Вт/м³. Координата z направлена до низу.

У таблицях 1-4 подано розподіл переміщень та напружень $\bar{U}_1 = U_1(0, b/2, z)*10^4/(h\alpha_0 q_0)$, $\bar{U}_3 = U_3(a/2, b/2, z)*10^4/(h\alpha_0 q_0)$, $\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11}(a/2, b/2, z)*10^4/(\alpha_0 q_0 E_0)$. Розподіл температури – у таблицях 5,6.

Таблиця 1.

Розподіл переміщень та напружень на границях шарів оболонки $L/h = 10$, $\gamma^{(1)} = -1$.

Ном. шару	$\bar{U}_1$			$\bar{U}_3$			$\bar{\sigma}_{11}$		
	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А
$k_{11} = kr1$; $k_{22} = kr2$									
1	-1.026 -1.789	-1.057 -1.811	-1.025 -1.788	4.532 5.059	4.488 5.024	4.534 5.060	0.845 -1.614	0.867 -1.653	0.844 -1.612
2	-1.789 -2.610	-1.811 -2.632	-1.788 -2.609	5.059 5.831	5.024 5.810	5.060 5.832	-1.614 2.041	-1.653 2.057	-1.612 2.040
$k_{11} = 0$; $k_{22} = 0$									
1	-1.373 -1.874	-1.406 -1.895	-1.371 -1.873	2.778 3.292	2.722 3.244	2.780 3.293	1.016 -1.634	1.040 -1.673	1.015 -1.632
2	-1.874 -2.434	-1.895 -2.453	-1.873 -2.433	3.291 4.089	3.244 4.055	3.293 4.090	-1.634 1.801	-1.673 1.815	-1.632 1.800
$k_{11} = -kr1$; $k_{22} = -kr2$									
1	-1.676 -1.899	-1.710 -1.920	-1.674 -1.898	0.916 1.411	0.851 1.353	0.919 1.413	1.223 -1.640	1.250 -1.678	1.222 -1.637
2	-1.899 -2.182	-1.919 -2.198	-1.898 -2.181	1.411 2.230	1.353 2.187	1.413 2.232	-1.640 1.573	-1.678 1.585	-1.637 1.572

Таблиця 2.

Розподіл переміщень та напружень на границях шарів оболонки $L/h = 10$, $\gamma^{(1)} = -5$.

Ном. шару	$\bar{U}_1$			$\bar{U}_3$			$\bar{\sigma}_{11}$		
	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А
$k_{11} = kr1$; $k_{22} = kr2$									

1	-1.141 -1.319	-1.443 -1.610	-1.120 -1.300	0.568 1.532	0.534 1.686	0.577 1.525	6.319 -5.057	7.965 -6.219	6.205 -4.974
2	-1.319 -1.598	-1.610 -1.961	-1.300 -1.575	1.532 2.585	1.686 2.955	1.525 2.562	-5.057 9.098	-6.219 11.13	-4.974 8.965
$k_{11} = 0; \quad k_{22} = 0$									
1	-1.292 -1.345	-1.625 -1.639	-1.269 -1.325	-3.491 6.057	-5.253 6.143	-3.311 6.075	7.066 -5.063	8.883 -6.225	6.940 -4.980
2	-1.345 -1.499	-1.639 -1.837	-1.325 -1.477	6.057 1.672	6.143 1.901	6.075 1.658	-5.063 8.197	-6.225 1.004	-4.980 8.076
$k_{11} = -kr1; \quad k_{22} = -kr2$									
1	-1.415 -1.341	-1.774 -1.632	-1.391 -1.321	-1.280 -0.337	-1.597 -0.474	-1.253 -0.326	7.916 -5.062	9.919 -6.224	7.777 -4.979
2	-1.341 -1.367	-1.632 -1.675	-1.321 -1.347	-0.337 0.740	-0.474 0.827	-0.326 0.735	-5.062 7.373	-6.224 9.045	-4.979 7.264

Таблиця 3.

Розподіл переміщень та напружень на границях шарів оболонки $L/h = 5$, $\gamma^{(1)} = -1$.

Ном. шару	$\bar{U}_1$			$\bar{U}_3$			$\bar{\sigma}_{11}$		
	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А
$k_{11} = kr1; \quad k_{22} = kr2$									
1	-0.509 -0.829	-0.521 -0.827	-0.509 -0.829	0.713 1.193	0.681 1.170	0.715 1.195	0.808 -1.523	0.822 -1.572	0.807 -1.520
2	-0.829 -1.250	-0.827 -1.250	-0.829 -1.250	1.193 1.909	1.169 1.894	1.195 1.910	-1.523 1.994	-1.572 1.993	-1.520 1.995
$k_{11} = 0; \quad k_{22} = 0$									
1	-0.660 -0.870	-0.669 -0.868	-0.660 -0.871	0.284 0.749	0.262 0.733	0.286 0.750	0.977 -1.541	0.990 -1.590	0.976 -1.538
2	-0.870 -1.185	-0.868 -1.186	-0.871 -1.185	0.749 1.492	0.733 1.486	0.750 1.493	-1.541 1.753	-1.590 1.754	-1.538 1.753
$k_{11} = -kr1; \quad k_{22} = -kr2$									
1	-0.790 -0.884	-0.797 -0.881	-0.790 -0.884	-0.171 0.272	-0.182 0.265	-0.170 0.272	1.182 -1.546	1.193 -1.595	1.181 -1.542
2	-0.884 -1.081	-0.881 -1.084	-0.884 -1.081	0.272 1.037	0.265 1.042	0.272 1.037	-1.546 1.522	-1.595 1.525	-1.542 1.522

Таблиця 4.

Розподіл переміщень та напружень на границях шарів оболонки $L/h = 5$, $\gamma^{(1)} = -5$.

Ном. шару	$\bar{U}_1$			$\bar{U}_3$			$\bar{\sigma}_{11}$		
	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А
$k_{11} = kr1; \quad k_{22} = kr2$									

1	-0.540 -0.547	-0.682 -0.627	-0.530 -0.541	-0.469 0.330	-0.637 0.318	-0.454 0.331	5.642 -4.367	7.106 -5.447	5.537 -4.290
2	-0.547 -0.708	-0.627 -0.862	-0.541 -0.698	0.330 1.210	0.318 1.375	0.331 1.198	4.367 8.420	-5.447 10.19	-4.290 8.301
$k_{11} = 0; \quad k_{22} = 0$									
1	-0.586 -0.558	-0.732 -0.639	-0.575 -0.553	-0.677 0.110	-0.829 0.107	-0.664 0.109	6.403 -4.371	8.002 -5.450	6.289 -4.294
2	-0.558 -6.868	-0.639 8.368	-0.553 -0.677	0.110 1.005	0.107 1.187	0.109 0.992	-4.371 7.510	-5.450 9.151	-4.294 7.400
$k_{11} = -kr1; \quad k_{22} = -kr2$									
1	-0.619 -0.557	-0.770 -0.639	-0.608 -0.551	-0.887 -0.117	-1.022 -0.109	-0.876 -0.119	7.259 -4.372	8.988 -5.452	7.1358 -4.296
2	-0.557 -6.502	-0.639 -0.797	-0.551 -0.640	-0.117 7.913	-0.109 0.991	-0.119 0.776	-4.372 6.669	-5.452 8.168	-4.296 6.568

Таблиця 5.

Розподіл температури на границях шарів оболонки $L/h = 10$.

Ном. шару	$T^{(k)}(a/2, b/2, z)$ град.					
	$\gamma^{(1)} = -1$			$\gamma^{(1)} = -5$		
	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	7.264	7.405	7.254	16.59	20.37	16.32
2	7.264	7.405	7.254	16.59	20.37	16.32
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Таблиця 6.

Розподіл температури на границях шарів оболонки $L/h = 5$.

Ном. шару	$T^{(k)}(a/2, b/2, z)$ град.					
	$\gamma^{(1)} = -1$			$\gamma^{(1)} = -5$		
	П_4	П_1	А	П_4	П_1	А
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
	6.766	6.901	6.756	14.06	17.37	13.82
2	6.766	6.901	6.756	14.06	17.37	13.82
	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Як видно з таблиць такий вид температурного навантаження призводить до суттєво тривимірного напружено-деформованого стану. При цьому, якщо коефіцієнт неоднорідності $\gamma^{(1)} = -\gamma^{(2)} = -1$ запропонована прикладна модель забезпечує необхідну точність розрахунку без розбиття шару на прошарки (П_1), навіть при співвідношенні $L/h = 5$. При $\gamma^{(1)} = -\gamma^{(2)} = -5$ як при співвідношенні $L/h = 5$, так і при $L/h = 10$ необхідно розбивати шари на прошарки (в даному випадку на чотири прошарки (П_4)). Розрахунок шару в межах одного прошарку (П_1) має суттєві

похибки. При подальшому розбитті шару на прошарки результати розрахунку наближаються до точних, аналітичних (А) (не приводиться з ціллю економії об'єма статті).

Висновки

У цьому повідомленні вперше розв'язано задачу про термонапружений стан шаруватих функціонально градієнтних пластин та пологих оболонок за наявності внутрішнього джерела тепла в точній тривимірній постановці. Розглянуто шарнірне опора. Також для розв'язання такої задачі пропонується підхід, у якому апроксимація шуканих функцій по товщині оболонки виконується поліномами. Його особливістю є призначення шуканих параметрів зовнішнім поверхням оболонки, що дозволяє, за потреби, розбити її на підшари, мінімізуючи таким чином похибку апроксимації. Були проведені тестові дослідження шаруватих функціонально градієнтних оболонок та плит. Було встановлено, що для розглянутих задач при такому навантаженні напружено-деформований стан є суттєво тривимірним. При значенні коефіцієнта неоднорідності $\gamma^{(1)} = -1$ запропонована прикладна модель забезпечує необхідну точність розрахунку без розбиття шару на прошарки (П_1). При $\gamma^{(1)} = -5$ шари необхідно розбивати на прошарки навіть при $L/h = 10$ (П_4). Подальше розбиття шарів призвело до результатів, що збігаються з тими, що отримані аналітичною моделлю (А). Такі розрахунки можуть бути використані як перевіірочні для тестування інших методів, а також для проведення дуже точних досліджень.

1. Adineh, M. and Kadkhodayan, M., Three-Dimensional Thermo-Elastic Analysis and Dynamic Response of a Multi-Directional Functionally Graded Skew Plate on Elastic Foundation, *Compos. Part B: Eng.*, **125**, 227–240 (2017)
2. Brischetto, S., Leetsch, R., Carrera, E., Wallmersperger, T., and Kröplin, B., Thermo-Mechanical Bending of Functionally Graded Plates, *J. Therm. Stresses*, **31**(3), 268–308 (2008).
3. M.D.Demirbas, Thermal Stress Analysis of Functionally Graded Plates with Temperature-Dependent Material Properties Using Theory of Elasticity, *Compos. Part B: Eng.*, **131**, 100–124 (2017).
4. Z.-Q.Cheng, and R.C.Batra, Three-Dimensional Thermoelastic Deformations of a Functionally Graded Elliptic Plate, *Compos. Part B: Eng.*, **31**(2), 97–106 (2000).
5. M.S.A.Houari, A.Tounsi, and O.A. Bég, Thermoelastic Bending Analysis of Functionally Graded Sandwich Plates Using a New Higher Order Shear and Normal Deformation Theory, *Int. J. Mech. Sci.*, **76**, 102–111 (2013).
6. J.N. Reddy, and Z.-Q. Cheng, Three-Dimensional Thermomechanical Deformations of Functionally Graded Rectangular Plates, *Eur. J. Mech. A Solids*, **20**(5), 841–855 (2001).
7. A.V. Marchuk, Modeling of the Thermally Stressed State of Functionally Graded Shallow Shells in a Three-Dimensional Formulation. *Advanced Structured Materials. Springer* **204**, 413–424 (2024).
8. S.Vel, and R.C. Batra, Three-Dimensional Analysis of Transient Thermal Stresses in Functionally Graded Plates, *Int. J. Solids Struct.*, **40**(25), 7181–7196 (2003).

Визначення параметрів вібраційного млина з віброударним полічастотним збудженням для тонкого подрібнення

В. Г. Шевченко¹, Г. О. Шевченко, О. О. Титов, В. С. Курілов, О. А. Самодрига

Інститут геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України, Дніпро, Україна

¹ vgshenchenko@ua.fm

Розглянуто проблему підвищення ефективності тонкого подрібнення базальтової сировини та техногенних відходів з метою вилучення силікатної складової для виробництва будівельних матеріалів. Метою дослідження є експериментальне визначення впливу зазору в однобічних пружних зв'язках і ступеня заповнення камери подрібнювальними тілами на ступінь подрібнення у віброударному полічастотному млині. Дослідження проведено з використанням повного факторного експерименту та дисперсійного аналізу для базальтової сировини крупністю до 10 мм. Встановлено залежності між режимними параметрами роботи млина та гранулометричним складом продуктів подрібнення. Показано, що раціональні значення ступеня заповнення знаходяться в межах 0,82–0,93, а максимальний ступінь подрібнення досягається при зазорі 3,0 мм. Виявлено статистично значущий вплив досліджуваних факторів, серед яких домінуючу роль відіграє зазор у пружних зв'язках. Отримані результати дозволяють обґрунтовано визначати раціональні параметри віброударних млинів, підвищувати ефективність переробки сировини та знижувати енерговитрати.

Ключові слова: млин, подрібнювальна куля, рівень заповнення кулями, технологічний зазор, однобічні пружні зв'язки, факторний експеримент

Вступ.

Переробка мінеральної сировини, у тому числі техногенних відходів залізорудного збагачення та базальтових порід, належить до числа ключових технологічних проблем, ефективне вирішення яких визначає рівень раціонального використання природних ресурсів, скорочення негативного впливу на довкілля та зростання економічної результативності гірничо-збагачувальних підприємств. Значні маси тонкодисперсних хвостів збагачення, що щороку накопичуються у шламосховищах ГЗК України, містять вагому частку силікатної складової, придатної до повторного залучення у виробництво. Водночас її вилучення ускладнюється малою крупністю частинок, присутністю окислених форм заліза та низькою ефективністю традиційних технологічних підходів [1, 2].

Відходи залізорудного збагачення відзначаються домінуванням дрібнодисперсних фракцій (менше 0,1 мм), що істотно ускладнює процеси механічного зневоднення та класифікації. Понад 60% маси таких матеріалів припадає на шламову фракцію, в якій зосереджене окислене залізо, не придатне до вилучення стандартними магнітними методами. Попри значний вміст SiO_2 , Al_2O_3 і CaO , ці відходи практично не використовуються через високий залишковий вміст Fe та недостатню селективність існуючих схем переробки. Зазначене зумовлює необхідність розроблення нових технологічних рішень, спрямованих на ефективне вилучення силікатної фракції та її подальше використання у виробництві цементів, бетонів, мінеральної вати та геополімерних матеріалів [3–6].

Комплексний підхід до утилізації залізорудних відходів дає змогу суттєво скоротити обсяги їх накопичення у шламосховищах, що, своєю чергою, зменшує витрати на їх утримання та необхідність розширення полігонів. Вилучення силікатної складової після попереднього видалення заліза створює передумови для отримання конкурентоспроможної вторинної сировини для будівельної індустрії. За оцінками, собівартість отримання 1 тонни очищеної силікатної суміші (після сушіння та класифікації) може бути на 30–50% нижчою порівняно з аналогічною природною сировиною, зокрема кварцовим піском.

Застосування немагнітної силікатної фракції у виробництві цементу, бетонів, мінеральної вати та геополімерних матеріалів формує умови для розвитку внутрішнього ринку вторинної мінеральної сировини. Це сприяє зменшенню залежності від імпорту окремих компонентів (пуцоланів, легких наповнювачів тощо), стимулює локалізацію виробництва та створення нових робочих місць.

Утилізація шламових і тонкодисперсних відходів істотно знижує ризики забруднення ґрунтів і підземних вод важкими металами та розчинними солями, що є характерним для застарілих шламонакопичувачів. Крім того, скорочення площі шламосховищ зменшує ймовірність аварійних проривів дамб та знижує пилове навантаження у посушливі періоди.

Застосування геополімерних технологій або використання відходів як добавок до цементу дозволяє знизити викиди CO₂ на 30–70% у порівнянні з традиційними процесами виробництва клінкеру.

Подібний інтерес становить і переробка базальтової сировини, родовища якої широко представлені в межах Волино-Подільської плити. Базальти характеризуються складною мінералогічною будовою та нерівномірною дисперсністю, що визначає їх технологічні властивості. Високий вміст алюмосилікатної матриці, наявність піроксен-плагіоклазових асоціацій і мікропориста структура формують потенціал для одержання цінних силікатних матеріалів, зокрема базальтових волокон, шлакоситалів та геополімерів [7–9]. Водночас для ефективного вилучення силікатної складової необхідне тонке та надтонке подрібнення сировини до розмірів 10–100 мкм, що висуває підвищені вимоги до технічних характеристик обладнання.

Особливу увагу привертають дослідження, орієнтовані на використання відходів базальтових кар'єрів, які тривалий час вважалися некондиційними [10–12]. За умови якісного розкриття мінералів сучасні технології збагачення дають змогу підвищити коефіцієнт використання сировини до 95%, скоротити утворення відходів до 3–5%, забезпечити замкнуті цикли водопостачання, утилізацію побічних продуктів та мінімізувати енерговитрати.

Сучасні конструкції подрібнювального обладнання, зокрема вібраційні та віброударні млини, дозволяють отримувати фракції високої дисперсності, необхідні для ефективного розкриття мінералів. Разом з тим традиційні одномасові вібраційні системи з дебалансними віброзбудниками мають низку обмежень, пов'язаних із забезпеченням високих прискорень камери подрібнення, значними динамічними навантаженнями та зниженням продуктивності при переробці великих обсягів матеріалу. Це стримує їх широке промислове використання для переробки значних мас відходів ГЗК і базальтових порід.

Підвищення ефективності тонкого подрібнення та стабільності роботи обладнання можливе завдяки застосуванню багатомасових віброударних систем,

здатних реалізовувати резонансні полічастотні режими коливань. Такі системи відзначаються стійкістю до змін параметрів технологічного навантаження та забезпечують істотне зростання інтенсивності подрібнення, селективності розкриття мінералів і зниження енерговитрат процесу [13, 14]. Саме це робить їх перспективними для перероблення як техногенних відходів залізорудного збагачення, так і базальтової сировини, де отримання фракцій розміром 10–100 мкм є критично важливим для подальших стадій вилучення силікатної складової.

З огляду на згадане вище, мета роботи полягає в експериментальному визначенні характеру та впливу таких параметрів вібраційного млина з віброударним полічастотним збудженням, як заповнення камери подрібнювальними тілами та зазор в однобічних пружних зв'язках, на ступень подрібнення базальтової сировини для подальшого вилучення силікатної складової.

Ідея роботи полягає у плануванні, проведенні факторного експерименту та аналізу його результатів для досягнення заявленої мети.

2. Методи.

Використано методи планування та проведення факторних експериментів, а також, статистичної обробки їх результатів, пошуку раціональних параметрів млина в заданих діапазонах шляхом досягнення екстремальних значень функції відгуку, методи узагальнення для отримання висновків.

3. Планування факторного експерименту.

Вихідна базальтова сировина становила шматковий матеріал з Рафаловського кар'єру, що розташований у Волинській області, крупністю -40 мм.

Первинне дроблення відбувалося за допомогою валкової дробарки із хвильовим профілем валків до крупності -10 мм.

Після цього, подрібнення цього матеріалу виконувалося періодичним способом, з циклічним завантаженням порцій матеріалу в помольній камері, встановленому на віброударному полічастотному млині.

Використовувалася помольна камера, яка представляє собою вертикальний циліндр, внутрішнім діаметром 150 мм та внутрішньою висотою 158 мм, із загальною масою помольних тіл (сталених кульок середнім діаметром 30 мм) від 8,5 до 11,6 кг.

Синхронна частота коливань інерційного дебалансного відрозбуджувача віброударного приводу млина складала 1500 хв⁻¹.

За рахунок зміни зазору в однобічних пружних зв'язках є можливість регулювати, як амплітуду коливань камери та її вібраційне прискорення, діапазон зміни якого становив від 10 до 300 м/с², так і полічастотного спектру коливань камери [15] (дослідження впливу спектру на подрібнення не проводилися).

Об'єм помольної камери становив біля 3 літрів, для її заповнення матеріалом брали навіску базальту сталою масою 500 г. Загальна маса базальту, яку використано у дослідах, становить приблизно 30 кг.

Досліджуваними факторами експерименту були такі:

1) зазор в однобічних пружних зв'язках млина, від якого в першу чергу залежить рівень інтенсивності віброударної взаємодії подрібнювальних тіл в помольній камері, змінювався в діапазоні 0,7-3,0 мм;

2) ступень заповнення камери подрібнювальними кулями, що також впливає на інтенсивність віброударної взаємодії куль, змінювався в діапазоні 0,71-0,98, що відповідає масі подрібнювальних тіл 8,5-11,6 кг при максимально можливій 11,9 кг.

За функцію відгуку було взято ступень подрібнення базальту, що визначалася як відношення середньої крупності частинок перед подрібненням до середньої крупності після подрібнення.

Для цього отриманий продукт подрібнення розсіювався за допомогою сит на вузькі фракції: $-400 + 250$ мкм; $-250 + 160$ мкм; $-160 + 90$ мкм; $-90 + 50$ мкм; -50 мкм.

Залишки матеріалу крупністю $+400$ мкм не становили в даному випадку інтересу для досліджень, тому вони відправлялися на повторне подрібнення у замкненому циклі.

З попередніх дослідів подрібнення на віброударному млині відомо, що отримання достатньої кількості вказаних фракцій (до 30-50%) можливо при часі подрібнення 5-30 хвилин, більш точні кількісні дані отримуються в результаті дослідів з подрібнення. Більший час подрібнення не є доцільним, оскільки значна частина матеріалу може перейти у найдрібнішу фракцію -50 мкм, наступне збагачення якої найменш доцільно внаслідок складності та низької ефективності цього процесу.

Найбільший інтерес становлять найдрібніші фракції $-90 + 50$ мкм та -50 мкм, оскільки вони мають розкриті мінеральні зерна, придатні для безпосереднього вилучення цінних компонентів.

Рівні досліджуваних факторів експерименту були взяті наступні:

- 1) зазор в одnobічних пружних зв'язках – 0,7; 1,5; 3,0 мм;
- 2) маса подрібнювальних тіл в камері – 8,5; 9,1; 9,8; 10,4; 11,1; 11,6 кг.

Тут було застосовано повну факторну схему експерименту, коли всі рівні одного фактору відповідають всім рівням другого фактору [16], за тими нечисленними виключеннями, що деякі крайні значення факторів не бралися до розгляду, якщо наявність екстремуму на графіку функції відгуку була очевидною.

4. Проведення факторного експерименту.

Для того, щоб перейти від маси завантаження куль в помольній камері до відносного рівня заповнення її кулями та, відповідно, розрахункового статичного зазору між кулями та кришкою камери, було прийнято, що максимально можливій масі завантаження куль 11,9 кг (з попередньою віброукладкою) відповідають значення відносного заповнення 1,00 та розрахункового зазору 0 мм. При порожній камері заповнення та зазор становлять, відповідно, 0,00 та 158 мм. Реальні використані в експерименті значення були отримано інтерполяцією, їх наведено в таблиці 1.

Таблиця 1.

Відповідність маси завантаження відносному заповненню камери та зазору до кришки

Маса завантаження, кг	8,5	9,1	9,8	10,4	11,1	11,6
Відносне заповнення	0,71	0,77	0,82	0,88	0,93	0,98
Розрахунковий статичний зазор між кулями та кришкою, мм	46	37	28	20	11	4

Далі було виконано серії подрібнення базальту для різних рівнів фактору розрахункового статичного зазору в камері, час подрібнення обирався дослідним шляхом для отримання найбільш інформативних результатів.

4. Отримання виходів різних класів крупності при зазорі в одnobічних пружних зв'язках рівному 3,0 мм.

Нижче наведені дані з подрібнення базальту для значень часу подрібнення, що становлять 5 або 10 хв (таблиці 2 та 3 відповідно), залежно від кількості куль в камері.

В усіх випадках, ми бачимо, що найнижчий вихід має вузький клас крупності -400+250 мкм (відбувається найшвидше подрібнення), тоді як максимуму виходів спостерігаються для класів +400 мкм та -90+50 мм. Отже, маємо бімодальний розподіл за крупністю під час подрібнення.

При цьому, швидкість зростання виходів найдрібніших класів -90+50 мкм та -50 мкм поступово уповільнюється, відповідно, починаючи приблизно з 30% та 20% виходу.

Таблиця 2.

Гранулометричний склад продуктів подрібнення базальту для зазору в одnobічних пружних зв'язках 3,0 мм та часу подрібнення 5 хв

Вихід класів (мкм), %	Маса завантаження, кг					
	8,5	9,1	9,8	10,4	11,1	11,6
+400	42,7	26,8	35,4	21,5	11,5	55,7
-400+250	7,5	8,4	6,1	5,9	3,9	4,6
-250+160	6,1	8,2	7,1	7,9	6,6	4,6
-160+90	12,1	15,0	15,8	17,0	20,0	8,3
-90+50	19,8	29,5	26,5	33,6	37,5	18,0
-50	11,7	12,1	9,3	14,2	20,4	8,9

Таблиця 3.

Гранулометричний склад продуктів подрібнення базальту для зазору в одnobічних пружних зв'язках 3,0 мм та часу подрібнення 10 хв

Вихід класів (мкм), %	Маса завантаження, кг					
	8,5	9,1	9,8	10,4	11,1	11,6
+400	20,8	9,9	17,2	8,3	2,9	32,2
-400+250	0,4	0,4	0,2	0,0	0,0	2,5
-250+160	1,4	1,4	1,3	1,2	1,3	4,4
-160+90	18,3	18,2	17,2	19,1	12,0	16,8
-90+50	40,7	47,8	41,1	52,2	57,8	32,2
-50	18,3	22,2	23,0	19,1	26,1	11,9

5. Отримання виходів різних класів крупності при зазорі в одnobічних пружних зв'язках рівному 1,5 мм.

Нижче наведені дані з подрібнення базальту для значень часу подрібнення, що становлять 10 або 20 хв (таблиці 4 та 5 відповідно), залежно від кількості куль в камері.

В усіх випадках, ми бачимо, що, порівняно із зазором 3,0 мм, в даному випадку при зазорі 1,5 мм значно зменшилися виходи дрібних класів та збільшилися виходи крупних класів, що свідчить про суттєве падіння ефективності подрібнення.

Таблиця 4.

Гранулометричний склад продуктів подрібнення базальту для зазору в одnobічних пружних зв'язках 1,5 мм та часу подрібнення 10 хв

Вихід класів (мм), %	Маса завантаження, кг				
	9,1	9,8	10,4	11,1	11,6
+400	63,3	53,8	57,2	64,7	75,9
-400+250	3,2	5,5	3,8	2,4	2,6
-250+160	3,4	4,9	4,0	2,8	2,6
-160+90	9,2	12,0	10,8	7,9	6,9
-90+50	16,0	18,3	20,3	17,6	10,5
-50	4,8	5,5	3,8	4,5	1,4

Таблиця 5.

Гранулометричний склад продуктів подрібнення базальту для зазору в одnobічних пружних зв'язках 1,5 мм та часу подрібнення 20 хв

Вихід класів (мм), %	Маса завантаження, кг				
	9,1	9,8	10,4	11,1	11,6
+400	47,9	36,0	43,6	44,0	65,8
-400+250	0,0	0,0	0,2	0,2	2,2
-250+160	0,8	1,8	0,8	1,6	2,8
-160+90	10,4	15,5	12,9	12,6	9,3
-90+50	34,9	36,3	34,4	34,4	16,3
-50	6,0	10,4	8,2	7,1	3,6

6. Подрібнення базальту при зазорі в одnobічних пружних зв'язках рівному 0,7 мм.

Таке подрібнення майже не має практичного значення, проте виконано для того, щоб достатньо повно визначити ступень впливу зазору на результати подрібнення. Час подрібнення складав 10 та 30 хв.

Порівняно із зазором 1,5 мм, в даному випадку додатково зменшилися виходи дрібних класів та збільшилися виходи крупних класів, що свідчить про суттєве падіння ефективності подрібнення.

Конкретні дані тут немає сенсу наводити, вони увійшли лише в підсумкову таблицю 6 щодо визначення ступеня подрібнення базальту. В цій таблиці виконано співставлення результатів експериментів при однаковому часу подрібнення та для різних комбінацій досліджених факторів.

Таблиця 6.

Значення функції відгуку для комбінацій досліджених факторів

Зазор в одnobічних пружних зв'язках (Δ), мм	Відносне заповнення камери подрібнювальними кулями (φ)				
	0,77	0,82	0,88	0,93	0,98
0,7	1,2	1,2	1,2	1,3	1,2
1,5	1,5	1,8	1,7	1,5	1,3
3,0	8,6	5,2	10,0	23,0	2,9

Також результати експериментального визначення функції відгуку наведено на рис. 1.

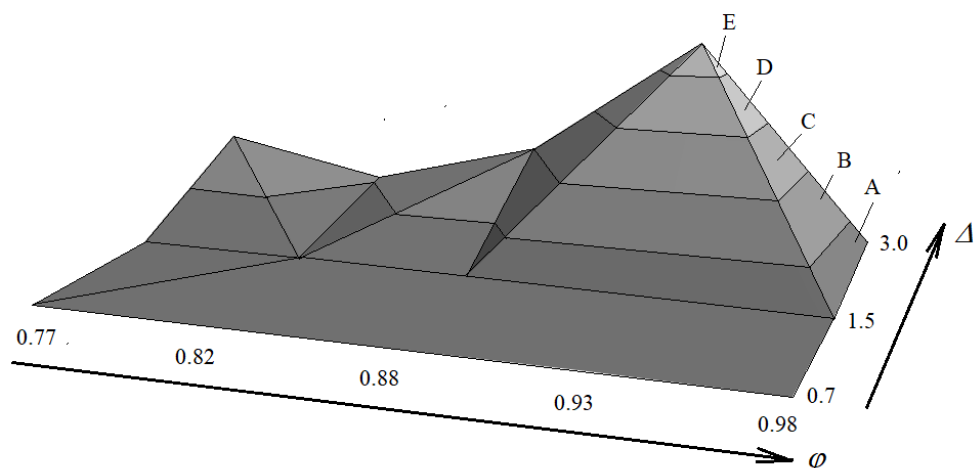


Рис. 1. Поверхнева діаграма функції відгуку для рівнів: А – 0-5; В – 5-10; С – 10-15; D – 15-20; Е – 20-25.

Як свідчать отримані результати, найбільш раціональні значення рівня заповнення камери подрібнювальними кулями знаходяться в діапазоні 0,82-0,93. При цьому явно виражений максимум ступеня подрібнення базальту спостерігається тільки для зазору в однобічних пружних зв'язках рівному 3,0 мм.

Раціональне заповнення помольної камери кулями становить 0,82-0,93 у відносних одиницях.

Також, порівнюючи максимальну з досяжних величин ступеня подрібнення при різних зазорах, маємо значення 23,0, 1,8 та 1,3, відповідно, для значень зазору 3,0, 1,5 та 0,7 мм при однаковому часі подрібнення рівному 10 хвилин. Це свідчить про непропорційно різке зростання інтенсивності подрібнення при збільшенні зазору на пружних зв'язках полічастотного віброударного пристрою. Тут раціональне значення – 3,0 мм.

Більші зазори в даній конструкції неможливо реалізувати через умови забезпечення довговічності конструкції пристрою.

7. Статистична обробка результатів експериментів.

Для визначення статистичного впливу кожного фактору експерименту на досягнутий ступень подрібнення було виконано двофакторний дисперсійний аналіз із застосуванням критерію Фішера [17]. Дані було взято з таблиці 6 (див. вище) для 3 рівнів зазору в однобічній пружних зв'язках Δ в діапазоні 0,7-1,5 мм та 5 рівнів заповнення камери подрібнювальними кулями ϕ в діапазоні 0,77-0,98.

Результати дисперсійного аналізу щодо визначення статистичної значущості факторів Δ та ϕ , а також їх взаємодії, наведено в таблиці 7.

Ці результати свідчать про наступне:

1) Найбільший вплив на ступень подрібнення має зазор в однобічних пружних зв'язках Δ ;

2) трохи менший, але також досить суттєвий вплив має і ступень заповнення камери подрібнювальними кулями;

3) взаємодія цих факторів також має достатню статистичну значущість, отже її потрібно враховувати в розрахунках для наступної апроксимації експериментальних даних.

Таблиця 7.

Результати дисперсійного аналізу

Джерело змінності	$\frac{D^2}{D_s^2}, \%$	Критерій Фішера		Вплив джерела змінності
		Розрахунковий	Табличний	
Δ	36,7	181,0	3,27	Значимо
φ	35,9	88,7	2,93	Значимо
$(\Delta \times \varphi)$	24,4	30,1	2,11	Значимо
Залишок	3,0	--	--	--
Сума	100,0	--	--	--

7. Застосування результатів досліджень.

Рекомендується використання результатів дослідження для моделювання процесу тонкого подрібнення мінеральної сировини (матеріалів типу базальту) в полічастотному віброударному млині.

Значимість роботи полягає у можливості використання результатів для вдосконалення технологій комплексної переробки мінеральної сировини (базальтової сировини), підвищення ефективності процесів подрібнення відходів гірничих підприємств та зниженню енерговитрат у виробництві будівельних матеріалів.

Результати роботи також сприятимуть збереженню та поліпшенню стану навколишнього середовища та сталого розвитку, зниженню енерговитрат за рахунок використання вібраційних млинів з віброударним резонансним полічастотним збудженням камер подрібнення, підвищенню ефективності переробки промислових відходів та зменшення обсягів накопичення шламів.

Висновки.

1. Проведено факторний експеримент із подрібнення базальтових відходів на віброударному полічастотному млині, де дослідженими факторами є зазор у однобічних пружних зв'язках в діапазоні 0,7-3,0 мм та ступень заповнення камери подрібнювальними кулями в діапазоні 0,71-0,98, в якості функції відгуку взято досягнутий ступень подрібнення базальту від вихідної крупності -10 мм.

2. Встановлено, що залежність досягнутого ступеня подрібнення базальту має чітко виражений максимум в діапазоні 0,82-0,93 для ступеня заповнення камери подрібнювальними кулями.

3. Встановлено, що переважний вплив на інтенсивність коливань та досягнутий ступінь подрібнення матеріалу має саме зазор в однобічних пружних зв'язках, при цьому ступінь подрібнення монотонно зростає із збільшенням зазору. Для використаного у досліді млина доцільно використовувати максимальний зазор 3,0 мм, оскільки подальше його збільшення підвищує динамічне навантаження на компоненти обладнання, що призводить до швидкого зносу.

4. Доведено, що віброударний режим сприяє суттєвому підвищенню вмісту фракцій менше 90 мкм при збільшенні зазорів на однобічних пружних зв'язках

пристрою.

5. Встановлено, що статистичну значущість мають обидва досліджені фактори, а також їх взаємодія, що потрібно враховувати при наступній апроксимації даних експерименту.

6. Результати роботи підтверджують аналітичні дослідження математичної моделі вібраційного млина з віброударним полічастотним збудженням [15] і свідчать про перспективність використання віброударних технологій для подрібнення матеріалів перед їх подальшою переробкою.

1. М.І. Сокур, В.С. Білецький, І.А. Ведмідь, Є.М. Робота, *Рудопідготовка (дроблення, подрібнення, класифікація): монографія*, Кременчуцький національний університет ім. М. Остроградського, Академія гірничих наук України: ПП Щербатих О.В., Кременчук (2020).
2. М.І. Сокур, В.С. Білецький, О.І. Єгурнов та ін., *Підготовка корисних копалин до збагачення: монографія*, Кременчуцький національний ун-т ім. М. Остроградського, Академія гірничих наук України: ПП Щербатих О.В., Кременчук (2017).
3. Т.В. Дараган, С.М. Гапеев, Т.І. Жадленко, Аналіз сучасного стану та перспектив використання відходів гірничовидобувної галузі, *Матеріали конференції «Перспективи розвитку будівельних технологій»*. – Дніпро: НТУ «ДП»(2021).
4. П.В. Кривенко, К.К. Пушкарьова, М.О. Кочевих, *Заповнювачі для бетону: підручник*, ФАДА, ЛТД, Київ (2001).
5. М.С. Лемешев, О.В. Христюк, О.В. Березюк, Дрібнозернистий бетон з модифікованим заповнювачем техногенного походження, *Materiały XI Międzynarodowej naukowo-praktycznej konferencji «Naukowa przestrzeń Europy – 2015»*, Przemysł (Poland): Nauka i studia, **23**, 56-58 (2015).
6. В.М. Дерев'янко, В.І. Мосьпан, В.В. Колохов та ін., Основні напрямки досліджень із використання золи ТЕС у виробництві будівельних матеріалів, *Український журнал будівництва та архітектури*, **1 (007)**, ISSN 2710-0367 (Print), ISSN 2710-0375 (Online) (2022).
7. Мідь Волині, *Наукові праці Інституту фундаментальних досліджень: Зб. наук. пр.*, Логос, 171-178, Київ (2006).
8. В.Г. Мельничук, В.Л. Приходько, Обґрунтування інвестицій у вивчення та освоєння покладів міді на Волині на прикладі рудопрояву «Жиричі» (Волинь), *Мінералогічний збірник*, Вип. 2, **65**, 4 -13 (2015).
9. Шевченко Г.О., Маланчук Є.З., Корнієнко В.Я. та ін., Обґрунтування промислових кондицій вмісту міді і цінних металів у відвалах базальтових кар'єрів Волині, *Вісник НУВГП. Серія Технічні наук*, **1 (97)**, 161-176 (2022).
10. Л.Л. Брагіна, С.О. Рябінін, О. Ю. Федоренко та ін., Сучасний стан та перспективи використання відходів каменевидобування і каменеобробки в силікатних галузях (огляд), *Наукові дослідження з вогнетривів та технічної кераміки*, (120), 196–210 (2020) <https://repository.kpi.kharkov.ua/items/5f96de9a-c7ed-48fa-93f7-7f2568f67caf>
11. Z. Malanchuk, V. Moshynskyi, Y. Malanchuk & M. Kucheruk, Impact by the operating and structural parameters of a screen on the technological parameters of vibratory basalt sieving, *New Developments in Mining Engineering*, **2**, 85–94 (2023). <https://www.researchgate.net/publication/327965002>

12. І. І. Петрусь, О. В. Горбач, Використання техногенних відходів у виробництві будівельних матеріалів. *Вісник Придніпровської державної академії будівництва та архітектури*, (5), 98–103 (2022). https://www.irbis-nbuv.gov.ua/cgi-bin/irbis_nbuv/cgiirbis_64.exe?I21DBN=LINK&P21DBN=UJRN&Z21ID=&S21REF=10&S21CNR=20&S21STN=1&S21FMT=ASP_meta&C21COM=S&2_S21P03=FILE=&2_S21STR=Vpabias_2022_5_20
13. V. Shevchenko, H. Shevchenko, Energy-force interactions in vibroimpact systems, *IOP Conf. Ser.: Earth Environ. Sci.* 1156 012026 (2022). DOI 10.1088/1755-1315/1156/1/012026.
14. Г.О. Шевченко, В.Г. Шевченко, Аналітичні дослідження вібраційного млина з віброударним збудженням камери подрібнення, *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, V International Conference “Essays of Mining Science and Practice”*, Ukraine, Dnipro (2024).
15. H. Shevchenko, V. Shevchenko, O. Tytov, Establishment of effective parameters for grinding mineral raw materials in a vibrating mill with multi-frequency vibroimpact excitation of the grinding chamber, *VI International Conference Essays of mining science and practice: E3S Web of Conferences*, V (2024).
16. T.P. Ryan, Modern Regression Methods, *Open Journal of Statistics*, Wiley, New York (1997).
17. P. Guttorp, G. Lindgren, Karl Pearson and the Scandinavian School of Statistics, *International Statistical Review*, **77 (1)**, 64–71 (2009).

Діагностування металу кожуха доменної печі за контролем твердості

С.В. Білодіденко¹, Г.М. Біліченко, В. І. Гануш, М.О. Щербінін

Український державний університет науки і технологій, Дніпро, Україна

¹ s.v.bilodidenko@ust.edu.ua

Базові несучі конструкції визначають загальний термін експлуатації об'єктів, оскільки не підлягають заміні. Тому їх технічний стан має вирішальне значення при подовженні експлуатації технічних об'єктів, зокрема кампаній доменних печей. Розглянуто особливості застосування методу контролю твердості для з'ясування ступеню деградації металу після довготривалої експлуатації. Знайдено лінійний зв'язок між циклічною в'язкістю руйнування сталі і коефіцієнтом варіації твердості сталі 09Г2С. Запропоновано алгоритм прогнозування залишкового ресурсу зон кожуху за результатами твердомерії. Знайдено зони кожуху з найбільшим і найменшим пошкодженням.

Ключові слова: твердість, в'язкість руйнування, пошкодженість, доменна піч, кожух

Вступ

Зростаючий попит на подовжений термін служби конструкцій підкреслює необхідність надійних прогнозів довговічності [1]. Подовження терміну служби застарілих об'єктів техніки є екологічно чистим заходом, що сприяє максимальному використанню матеріалів і збільшенню пропускної продуктивності виробництва. Таке рішення приймається після ретельного дослідження технічного стану із застосуванням засобів технічної діагностики.

В хід ідуть найбільш досконалі методи, коли експерти намагаються не обмежувати себе в обранні засобів [2]. Наприклад, при продовженні ресурсу трубопрокатного агрегату 350 після його 80-річної експлуатації було проведено моніторинг просторового положення кліті автомат-стану під час роботи, діагностування пошкодженості металу методами магнітної пам'яті і ультразвуку, тензометрування циклічної напруженості. На підставі тривимірних моделей напруженість станин досліджена за МСЕ, після чого сформовано режими навантаження станин агрегатів, отримано моделі опору втомі і розраховано залишковий ресурс небезпечних зон [3].

1. Особливості діагностування за контролем твердості поверхні металів

Вимірювання твердості виглядає як один з найзручніших способів діагностування металу, оскільки відноситься до неруйнівних методів. Такій думці сприяє удосконалення конструкцій твердомірів і поширення їх переносних портативних варіантів. Але слід розуміти, що величина твердості безпосередньо реагує на зміну структури металу. Зазвичай таке відбувається при довготривалій експлуатації за умов високих температур. Спостерігається теплове окрихчення. Тому контроль твердості дуже поширений при діагностуванні енергетичного обладнання.

Для більшості несучих конструкцій промислового устаткування твердість як діагностичний параметр деградації металу має певні обмеження. Вони обумовлені тим, що штатна експлуатація таких об'єктів не передбачає суттєвого впливу тепла.

Це, зокрема, стосується кожухів доменних печей. При справній роботі систем охолодження і теплозахисту температура металу кожухів є безпечною. Згідно нормативної методики визначення технічного стану кожухів доменних печей падіння твердості на 15% відповідає ділянкам з відшаруванням окалини [4]. Такі ділянки мали короткочасний перегрів понад 900°С і в подальшому мають 75-процентне обмеження по несучій спроможності. При довготривалому перегріві понад 900°С твердість знижується на 30% і більше. Такі ділянки є сильно деформованими і не експлуатуються в подальшому. Отже, візуальний стан металу свідчить про ступінь його пошкодженості, а вимірювання твердості лише підтверджує висновки. Хоча твердометрія є одним із обов'язкових етапів освідчення технічного стану кожухів [4].

В цілому, взаємозв'язок між твердістю поверхні і характеристиками опору втомі має низьку кореляцію, оскільки ці величини відображають різні властивості. Більш надійний зв'язок спостерігається між твердістю і межею міцності матеріалу, що унормовано відповідним стандартом. Але в такому вигляді діагностичні моделі мають слабкі можливості по прогнозуванню ресурсу.

Твердометрія зараз набуває актуальності з винаходом методу, де ступінь пошкоджуваності матеріалу оцінюється не за абсолютними значеннями твердості, а за параметрами розсіювання її значень, як більш показними, ніж сама твердість. Розсіювання чи розпорошення показників твердості обумовлено неоднорідністю структури матеріалу, що характеризується наявністю зернистості, хімічних флуктуацій, сторонніх включень, пор і інших дефектів. Означені фактори слугують причинами зародження мікротріщин. Отже, розпорошення твердості пов'язане зі зміною характеристик в'язкості руйнування. Це забезпечує підвищення інформативності і точності оцінки деградації матеріалу даним методом.

Метод діагностування стану металів за параметрами твердості (LM – метод) в останні роки набуває широкого розповсюдження і використовується не тільки для конструкцій, які потерпають від високих температур, але і для конструкцій планера літаків [5]. На відміну від більшості фізичних методів неруйнівного контролю, методів дефектоскопії, цей метод найближче пов'язаний з традиційними способами визначення механічних властивостей, які відбуваються шляхом руйнування зразків. В цьому випадку певній руйнації піддаються тільки незначні ділянки поверхні конструкції, які не впливають в подальшому на її властивості. Умови навантаження матеріалу в зоні контакту з індентором, практично, є адекватними умовам стандартних випробувань на тріщиностійкість: в приконтактних областях діють напруження розтягання, що забезпечують умови нормального відриву в осьових перетинах відбитка [6, 7].

Перспективними виглядають діагностичні моделі, де використовували підходи механіки руйнування та, зокрема, метод оцінки ефективного порогу циклічної тріщиностійкості [6,8]. Подібні моделі враховують, як зміни мікроструктури, так і накопичення мікродефектів в об'ємі матеріалу.

Метою дійсної роботи було отримання діагностичної моделі кожуху доменної печі (ДП) за контролем параметрів твердості з прогнозними можливостями відносно залишкового ресурсу.

2. Відбір зразків і методика досліджень

Оцінку деградації металу шляхом вимірювання твердості автори провели для металевих конструкцій, що відпрацювали 14 років у якості кожуху агрегату. Кожух виготовлено зі сталі 09Г2С, яка досить часто використовується в несучих конструкціях.. Зразки для механічних випробувань було вирізано з 3 зон кожуху, що різнилися умовами експлуатації (табл.1).

Таблиця 1.

Відсотковий склад елементів в зразках металу

Зона	C	Mn	Si	S	P	Cr	Ni	Cu	Al	Mo
1, 2	0,11	1,50	0,58	0,0100	0.016	0,06	0,08	0,07	0,041	0,008
3	0,11	1,51	0,64	0,0045	0,025	0,07	0,02	0,02	0,003	0,001

З неохолоджуваної ділянки шахти кожуху (1 зона, висота 24,9 м), з охолоджуваної ділянки шахти кожуху (2 зона, висота 20 м), з фурменної ділянки кожуху (3 зона). За умов нормальної роботи системи охолодження температура кожуху по зонах на 10° - 30° С більша температури оточуючого середовища. При відмові (частковій відмові) холодильників температура кожуху підвищується на декілька сотень градусів. Вигини, випинання, викривлення ділянок кожуху свідчать про їхній перегрів до температур 300° - 600°С.

Статичні випробування на розтягування зразків після експлуатації кожуху показали ідентичність деформаційних властивостей (відносне звуження ψ , відносне подовження δ) та більш високі показники міцності (межа міцності σ_B , межа плинності σ_T , межа пружності σ_e) у зразків з фурменної зони (табл.2). Це може свідчити про більш жорсткі умови експлуатації, які призводять до окрихчення металу. Різниця в умовах експлуатації відобразилась на товщині листів металу: в фурменній зоні їх товщина приблизно на 2 мм є меншою, ніж в зоні шахти. Зразки з 3 зони мали більшу кількість окалини, яку важко вилучити. Це свідчить про нетривалий перегрів кожуху фурменної зони до температур 700-900°С.

Таблиця 2.

Механічні властивості металу кожуху (сталь 09Г2С) після експлуатації

Зона	σ_B , МПа	σ_T , МПа	σ_e , МПа	δ	ψ	σ_T / σ_e
1, 2	530	417	300	0,27	0,64	1,4
3	540	427	305	0,27	0,64	1,4

Дослідження твердості проводили на зразках, які попередньо були випробувані на циклічний триточковий згин. В результаті було отримано показники циклічної в'язкості руйнування K_{fc} . Вимірювалась твердість зразків з різних зон кожуху. Для вимірювань твердості був використаний портативний ультразвуковий твердомір NOVOTEST ТУ-ДЗ та перетворювач У1. Вимірювання здійснюється контактнорезонансним методом за допомогою алмазного індентора. Він залишає малопомітний відбиток малого розміру. Перед початком вимірювань усі зразки були відшліфовані. Потім їхня поверхня була поділена на ділянки розміром 10*10 мм. Кількість ділянок в залежності від розміру зразка складала від 36 до 42 (рис. 1).

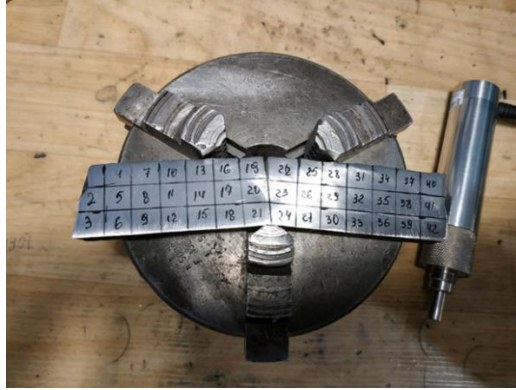


Рис. 1. Підготовка зразків натурної товщини для вимірювання твердості.

Визначення характеристик твердості за Брінелем відбувалось у відповідність вимогами ДСТУ ISO 6506-1:2007 на різних ділянках поверхні зразків. У кожній ділянці було проведено не менше 15-ти вимірів твердості по шкалі Брінеля (рис.2).

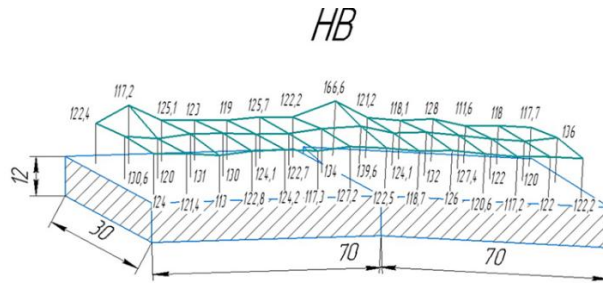


Рис.2. Діаграма розподілу твердості по зразках 3 (найбільш пошкодженій) зони кожуха.

Зразки для механічних випробувань мали натурну товщину (тобто поверхня не оброблялась) 30 мм, ширину 12 мм. Вони деформувались по схемі 3-точкового згину в площині найбільшої жорсткості при відстані між крайніми опорами 110 мм. Схема деформування при триточковому згині широко застосовується в дослідженнях механічних властивостей. Серед переваг цієї схеми – простота виготовлення зразків і їхнього закріплення в випробувальній машині. Це важливо в випадку досліджень властивостей металу натурних конструкцій. Зручно, що на таких зразках водночас можна отримувати, як характеристики опору втомі, так і опору руйнуванню при зростанні тріщини.

Зразки кожуху випробувались на універсальній машині, яка обладнана гідропульсатором. Попередньо було проведено повторно-статичні випробування з реєстрацією кривих деформування. Після цього кожен зразок випробувано при стаціонарному максимальному напруженні циклу σ з асиметрією $R_\sigma=0,1-0,16$. Частота навантаження становила 10-15 Гц. Навантаження припинялось автоматично при досягненні прогину зразка 1-2 мм. Прогин є наслідком процесів однобічного накопичення деформацій (ratcheting) та розкриття тріщини. Довжина крайової тріщини

при цьому складала 2-5 мм, що можна вважати критерієм граничного стану. В результаті цієї стадії випробувань отримано криві втоми. Довговічність N при цьому відповідає появі розвиненої тріщини. Вона має певну швидкість зростання, яка, як правило, знаходиться в верхній частині діаграми Періса.

Подальші випробування продовжувались при зменшених (приблизно у 2 рази) навантаженні і частоті. Вони зупинялись при досягненні тріщиною критичної довжини l_c . При цьому отримано ділянки діаграми Періса $\nu\text{-}\Delta K$ та критичний коефіцієнт інтенсивності напружень при циклічному режимі ΔK_{fc} . Довжина тріщини вимірювалась без зупинки випробувань і зняття зразка фотографічним методом з накладенням на зображення мірної сітки.

3. Результати досліджень і їх обговорення

Після аналізу відомих формул в області практичних випадків була знайдена адаптована залежність:

$$K_I = 0,368\sigma \cdot \exp(3,33\varepsilon)\sqrt{h}, \quad (1)$$

де $\varepsilon=a/h$ – відносний розмір тріщини довжиною a .

В ЛМ – методі його авторами розпорошення твердості запропоновано характеризувати, так звані, коефіцієнтом гомогенності Вейбула, який розраховують за формулою Гумбеля [6]. З урахуванням середньоквадратичного відхилення логарифма твердості S_{lgHB} коефіцієнт гомогенності буде:

$$m = \frac{0,4343}{S_{lgHB}} = \frac{0,4343}{0,4343 \cdot v_{HB}} = \frac{1}{v_{HB}}. \quad (2)$$

У підсумку коефіцієнт гомогенності є оберненою величиною до звичайного коефіцієнту варіації твердості v_{HB} . Тому в наданих дослідженнях у якості показника пошкодженості використано цю характеристику (табл.3). В даному випадку коефіцієнт варіації v_{HB} підраховано за середніми показниками твердості на ділянках 10×10 і характеризує розсіювання твердості на площі усього зразка. У останньому стовбці цієї таблиці приведено відносний коефіцієнт варіації, де за базу (за знаменник) взято величину $v_{HB}=0,035$ для 2 зони як найменш пошкодженої.

Таблиця 3.

Результати вимірювань твердості зразків кожуху

Зона розташування зразків, i	Кількість ділянок в зразку	Середня твердість по зразку HB , МПа	Коефіцієнт варіації твердості по зразку, v_{HBi}	Відносний коефіцієнт варіації твердості v_{HBi}/v_{HB2}
1 зона	36	180,7	0,06	1,7
2 зона	36	146,9	0,035	1,0
3 зона	42	127,5	0,12	3,4

Слід звернути увагу на однорідність коефіцієнта варіації в межах одного зразка і однієї зони кожуху. Його значення суттєво не змінюється навіть в охресті вершини

тріщини. Можна припускати, що застосована метода реагує тільки на розсіяне втомне пошкодження.

Натомість, поміж зонами кожуху спостерігається суттєва різниця в значеннях v_{HB} . Відносний коефіцієнт варіації показує відносно пошкодження металу. За його значенням видно, що найменше пошкодження отримав метал у 2 зоні. Найбільше пошкодження, а саме в 3,4 рази відносно 2 охолоджуваної зони, спостерігається для 3 фуруменної зони.

Недолік LM-методи полягає в складності визначення граничної величини v_{HB} . Тому неможливо визначити залишковий ресурс конструкції. Для подолання цього недоліка автори методи пропонують знайти кореляцію між показником розпорошення твердості і показниками в'язкості руйнування.

Із співставлення результатів дослідження твердості і в'язкості руйнування сталі 09Г2С видно, що вказана кореляція має лінійний характер (рис.3). Якщо представити експериментально знайдені показники в'язкості руйнування як поточні значення процесу старіння або пошкодження матеріалу, то їх поведінка може бути формалізована рівнянням:

$$K_{fc}^d = K_{fc} - r_{HBS} v_{HB} \quad (3)$$

В такому випадку присутній тут КІН K_{fc} має зміст циклічної в'язкості руйнування для ідеального **непошкодженого** металу. Найбільш тісна кореляція спостерігається для максимальних КІН. Для них в цьому рівнянні $K_{fc} = K_{fcmax} = 110 \text{ MPa}\sqrt{m}$, а коефіцієнт пропорційності $r_{HBS} = 1,9 \text{ (MPa}\sqrt{m})/\%$.

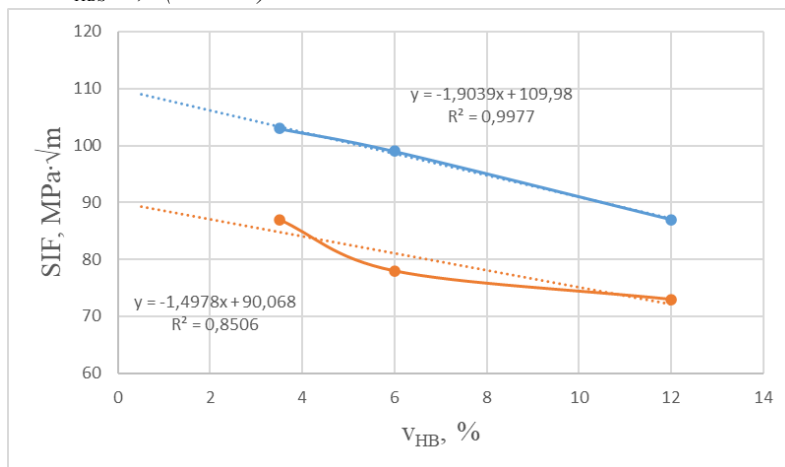


Рис.3. Взаємозв'язок між критичним циклічним КІН (SIF), вираженим через максимальні напруження K_{fcmax} (верхня крива) або розмахи напружень ΔK_{fc} (нижня крива), і коефіцієнтом варіації твердості.

Досліджену зміну критичних КІН можна вважати наслідком впливу експлуатаційного пошкодження. Тобто, критична в'язкість руйнування сталі 09Г2С реагує на експлуатаційний наробіток кожуху ДП і може слугувати за діагностичний параметр. Такий спосіб діагностування технічного стану кожуху ДП є відомим. При ньому з кожуху відбирають мікроразки для випробувань шляхом руйнування [4]. Така операція не завжди можлива. Тому доцільно проводити діагностування неруйнівними способами, таким як дослідження твердості. Отримана модель (3) дає таку можливість.

На підставі цієї моделі можна вважати значення $K_{fmax}=110 \text{ MPa}\sqrt{t}$ за первісне. Під впливом експлуатаційного процесу цей показник зменшується на 7-25% (в залежності від зони кожуху). Таке падіння не є критичним, оскільки при порівняльній оцінці живучості кожухів з різних металів для сталі 09Г2С були закладені саме такі властивості [4]. Таким чином довготривала експлуатація сталі 09Г2С в оболонці ДП не призвела до її теплового окрихчення. Принаймні, це стосується ділянок кожуху, з якого було вирізані піддослідні зразки.

Маючи зв'язок між показником твердості v_{HB} і критичним показником в'язкості руйнування K_C (це може бути показник $K_{fс}$, так і порогове значення розмаху КІН ΔK_{Ih} [8]) можна об'єктивно встановити допустиме значення діагностичного параметру $[K_C]$ (I квадрант, рис.4). Він розраховується на підставі навантаження, що діє в певній зоні (елементі) кожуху за розміром виявлених при обстеженні дефектів. Можна також штучно встановити допустиме значення прямого діагностичного параметру $[v_{HB}]$. Зазвичай, воно в 3-4 рази більше від свого мінімального значення v_{HBmin} , яке відповідає непошкодженому стану. Прогнозні можливості з'являються після отримання кінетики зміни діагностичного параметру (II квадрант, рис.4). Для цього кінетику прямого діагностичного параметру перебудовують в кінетику непрямого параметру (IV квадрант, рис.4).

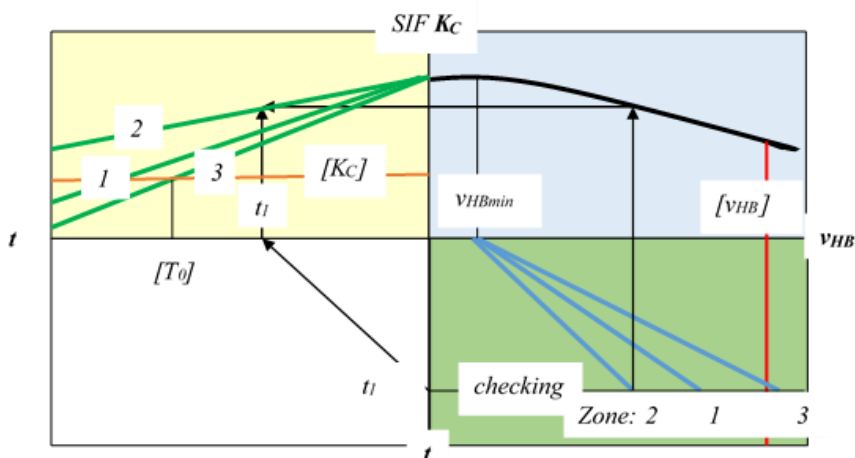


Рис.4. Схема діагностування стану металу кожуху доменної печі під час контролю t_l за показниками твердості поверхні v_{HB} і в'язкості руйнування K_C в зонах 1,2,3 (checking, Zone: 2, 1, 3) з прогнозуванням терміну експлуатації $[T_0]$ по допустимих значеннях $[K_C]$ або $[v_{HB}]$.

В ієрархії діагностичних ознак металу в конструкції ДП проглядається така залежність. Механічні властивості при статичному навантаженні, практично, ніяк не реагують на наробіток і не можуть використовуватися для оцінки пошкодження. Теж саме можна сказати про структуру і хімічний склад металу. Характеристики опору втомі до появи тріщини відносно слабо реагують на наробіток. Необхідно мати великий обсяг зразків, що робить такий спосіб трудомістким і нереальним. Натомість характеристики опору руйнуванню і розвитку дефектів (3) змінюються при наробітку на десятки відсотків від первісного значення. Тому вони і використані для діагностування. Показники розпорошення твердості сталі 09Г2С при наробітку

змінюються на сотні відсотків (тобто, в рази). Це є сильною діагностичною ознакою. Тому вимірювання твердості є перспективним способом оцінки технічного стану металевих конструкцій доменного комплексу.

Висновки

Отримано лінійний зв'язок між показниками розпорошення твердості і в'язкості руйнування сталі 09Г2С після її довготривалої експлуатації в кожусі ДП. Означена модель є підставою для діагностування технічного стану металу кожуху ДП в процесі експлуатації неруйнівними методами.

Найбільше пошкодження метал кожуху отримує в фурменій зоні: за показниками в'язкості руйнування падіння складає 16%. При цьому розпорошення твердості збільшується в 3,4 рази. Показники статичної міцності фурменої зони після експлуатації збільшились на приблизно 15%, що також є ознакою появи більш високих робочих деформацій, і як наслідок, отриманого збільшеного пошкодження. Найменше пошкодження метал кожуху отримує в охолоджуваній зоні шахти, хоча зазвичай, розрахункові механічні напруження тут є більшими, ніж угорі шахти в неохолоджуваній зоні. Очевидно, в неохолоджуваній зоні з'являються додаткові термічні напруження.

1. Deul, M., Slange, R., den Besten, H., & Maljaars, J.. Validity of High-cycle Variable Amplitude Lifetime Estimates of Steel Welded Joints Using Design Models. *Structural Engineering International*, 1–8 (2026). <https://doi.org/10.1080/10168664.2025.2610472>
2. Marir, M. A., Sheng, E. L., Isa, M. R., Bachi, I. O. Destructive and nondestructive remaining fatigue life prediction methods of metals: a review. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 37 (8), 1-17. (2023). <http://doi.org/10.1007/s12206-023-04-y>
3. Belodedenko, S., Bilichenko, G., Hanush, V. et al., Advancement of risk analysis methods during prolonging the service life of industrial equipment. *Discov Mechanical Engineering* 2, 9 (2023). <https://doi.org/10.1007/s44245-023-00017-4>
4. Belodedenko, S.V., Chechenev, V.A. Safety protection of blast-furnace jackets when in operation. *Metallurgical and mining industry* 11, 127-132 (2015).
5. Фененко О.А. Влияние деградационных процессов на механические характеристики конструкционных материалов элементов планера летательного аппарата. *Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил*, 4(45), 116-119. (2015).
6. Лебедев А.А., Музыка Н.Р., Швец В.П. Метод оценки вязкости разрушения материала по рассеянию характеристик твёрдости . *Проблемы прочности*, №6, 5-12 (2007).
7. Lebedev, A. A., Muzyka, N. R., Volchek, N. L. Determination of Damage Accumulated in Structural Materials by the Parameters of Scatter of Their Hardness Characteristics. *Strength of Materials*, V. 34(4), 317-321 (2002). <https://doi.org/10.1023/A:1020376103529>
8. Krechkov's'ka, H. V., Student, O. Z., Nykyforchyn H.M. Diagnostics of the engineering state of steam pipelines of thermal power plants by the hardness and crack resistance of steel. *Materials Science*, Vol. 54, No. 5, 627-637(2019). DOI 10.1007/s11003-019-00227-w

Інформаційна комп'ютерна технологія діагностики та керування технічним станом устаткування шахтних підйомних комплексів

С.Р. Ільїн^{а1}, Л.Г. Адорська^а, І.С. Ільїна^б

^аІнститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України, Дніпро, Україна

^бНТУ «Дніпровська політехніка», Дніпро, Україна

¹ iljin_sr@ukr.net

У роботі розглянуто інформаційну комп'ютерну технологію діагностики та керування технічним станом обладнання шахтних підйомних комплексів. Технологія базується на використанні програмно-апаратного комплексу «Техно-Мак», який забезпечує вимірювання, збір і обробку параметрів роботи підйомного обладнання. Представлено апаратну та математичну складові системи, що включають датчики, контролери та спеціалізоване програмне забезпечення для аналізу динамічних процесів у системі «підйомна посудина – армування». Математичні моделі враховують особливості багатоланкової структури шахтних підйомних комплексів та параметричний характер коливальних процесів. Розроблена технологія дозволяє оцінювати знос елементів армування, напружено-деформаційний стан провідників та розпорів армування і нерівномірність динамічних навантажень по глибині стовбура. Практичне застосування системи підтверджено результатами обстеження понад 600 стовбурних відділень шахт і копалень України.

Ключові слова: шахтний підйом, шахтні стовбури, підйомна посудина, армування стовбуру, провідники, розпори.

Особливість функціонування систем підйому на шахтах та копальнях України за останні роки полягає в зростанні матеріальних і технічних витрат на забезпечення безпечної експлуатації шахтних підйомних комплексів (ШПК) через надзвичайно великий рівень зносу та деградації елементів їх устаткування у сучасних умовах. Зниження експлуатаційної безпеки систем підйому призводить до аварійних ситуацій, що пов'язане з загрозою для життя людей, зупинками всього технологічного циклу видобутку і доставки корисних копалин, значними фінансовими збитками підприємства.

У 60-х роках на вугільних шахтах України сталася серія несподіваних аварій на нових підйомних установках підвищеної продуктивності порівняно з попередніми поколіннями. Дослідження показали, що ці аварії були викликані параметричною нестійкістю динамічних процесів у системах «підйомна посудина – армування» шахтних стовбурів, яка не була врахована в попередніх методиках розрахунку при проектуванні підйомних установок, оскільки в той час більшість наукових досліджень з проблематики ШПК були присвячені вивченню окремих процесів без урахування їх комплексної взаємозалежності з іншими супутніми процесами [1]. Така ситуація вимагала розробки нових математичних моделей та методик розрахунку визначення всієї сукупності параметрів установок різних типів, які гарантують потрапляння цих параметрів у зони динамічної стійкості під час будівництва нових установок, за умови їх тривалої експлуатації та деградації і зносу елементів. Були розроблені загальні математичні моделі, що враховують процеси, які відбуваються в системі управління, електроприводі, механічній частині підйомної машини, протяжній системі головних

та врівноважувальних канатів, а також параметричні взаємодії підйомних посудин із жорстким армуванням тощо. Узагальнення цих робіт наведено у [2].

Надалі роботи велися у напрямі розвитку методів апаратурної діагностики електромеханічних процесів у багатоланкових системах шахтних підйомних комплексів і відповідного цим процесам математичного забезпечення з урахуванням технічно можливих відхилень від проектних режимів та обмежень, які часто зустрічаються на практиці [3, 4]. Дослідження показали, що в таких системах при одночасній реалізації кількох локальних електромеханічних ризикоутворюючих процесів може відбуватися їх кумулятивний взаємовплив, що створює підвищений ризик аварії, навіть якщо окремі параметри складових процесів не виходять за нормовані для них граничні значення.

Аналіз попереднього досвіду довів, що перспективним шляхом запобігання аваріям в стовбурах є розробка та впровадження комплексної системи моніторингу їх експлуатаційного стану із застосуванням техніки і технологій, які дозволяють оперативно проводити аналіз технічного стану стовбурів та приймати запобіжні заходи щодо подовження терміну служби устаткування ШПК. В плані реалізації цієї стратегії Інститут геотехнічної механіки ім. М.С. Полякова НАН України вже понад 30 років виконує роботи з розробки та впровадження науково-методичного забезпечення і автоматизованих цифрових систем реєстрації та обробки даних щодо керування станом експлуатаційної безпеки ШПК у сучасних умовах. Роботи виконуються у відповідності з вимогами [5] на основі інформаційної комп'ютерної технології діагностики діючого обладнання із застосуванням програмно-апаратного комплексу «Техно-Мак», що поєднує апаратурну і математичну складові та спеціальне програмне забезпечення [6 - 9]. Призначення технології - удосконалення технічного стану устаткування ШПК з метою підвищення їх безпеки, надійності та швидкості підйому для суттєвого збільшення обсягу видачі на поверхню корисних копалин як основного показника продуктивності роботи шахти у сучасних умовах.

Наукове підґрунтя технології становить інтегрована система нових теоретичних положень та підходів, спрямованих на розв'язання актуальної науково-технічної задачі забезпечення ефективного керування технічним станом підйомного обладнання у процесі його довготривалої експлуатації за складних гірничо-геологічних і виробничих умов [6].

Результати проведених досліджень охоплюють:

- особливості динамічних процесів у шахтних підйомах за умов інтенсифікації їх роботи з урахуванням деградаційних змін елементів обладнання впродовж тривалого терміну служби у сучасних умовах;

- оцінювання технічного стану підйомних установок як у стаціонарних, так і в перехідних режимах з урахуванням взаємопов'язаного впливу фізико-механічних процесів у динамічних підсистемах, зумовлених зношуванням, ремонтно-відновлювальними втручаннями, а також часовою і просторовою варіативністю параметрів взаємодії підйомних посудин з армуванням;

- закономірності взаємодії динамічних елементів підйомних систем та формування принципів керування параметрами їх вузлів, що забезпечують стабілізацію руху, зниження динамічних навантажень і підвищення безпеки експлуатації в умовах корозійного впливу, механічного зносу та випадкових змін характеристик взаємодії;

- вплив фізико-механічних характеристик конструктивних елементів підйомних установок на рівень безпеки їх функціонування за умов випадкового розподілу геометричних і механічних параметрів армування по глибині стовбурів.

Встановлені закономірності визначають:

- характер трансформації параметрів експлуатаційного стану обладнання при переході від потенційно небезпечних до безпечних режимів;

- залежність динамічних характеристик у системах передачі зусиль і стабілізації руху від технологічних параметрів роботи підйомів у різних типах установок (одно- та багатоканатних) і видів армування;

- умови виникнення внутрішніх (параметричних) резонансів у елементах системи залежно від їх геометричних та інерційних характеристик з урахуванням деградаційних процесів і стохастичного розподілу параметрів армування, а також визначення елементів, що акумулюють динамічну енергію;

- особливості динамічної взаємодії у системі «підйомна посудина — армування» залежно від просторових викривлень провідників, параметрів швидкісних режимів і їх неоднорідного та випадкового розподілу в межах робочих циклів;

- взаємозв'язок кінематичних і силових характеристик взаємодії посудин з елементами жорсткого армування за наявності нелінійних (східчастих) характеристик жорсткості амортизаційно-демпфуючих пристроїв;

- вплив законів керованої зміни жорсткісних і дисипативних параметрів демпфуючих систем на динаміку взаємодії в процесі підйому і спуску;

- тягові можливості багатоканатних шківів тертя залежно від геометричних параметрів і жорсткісних характеристик піддатливої футеровки жолобів та їх роль у запобіганні прослизанню канатів;

- амплітудні характеристики горизонтальних коливань гнучких врівноважувальних канатів у зоні петлі внизу стовбура як функцію їх згинальної жорсткості;

- умови виникнення нестійкості руху підйомних посудин, зумовлені відхиленнями геометрії барабана підйомної машини.

Наукоємний характер технології зумовлений глибиною теоретичних обґрунтувань, складністю та новизною застосованих підходів, а також не традиційністю інженерних рішень. Додатковим чинником є висока технічна складність проведення експериментальних досліджень безпосередньо в шахтних умовах. У зв'язку з цим ефективно впровадження технології потребує постійного науково-технічного супроводу, зокрема шляхом надання практичної підтримки на етапах її освоєння у виробництві.

Апаратурна частина технології – це багатозадачний програмно-апаратний комплекс, в який в даний час входить: ПЕОМ, багатоканальний контролер з аналого-цифровими перетворювачами, тензопідсилювальний блок, безконтактні датчики прискорень, силовимірювальні башмаки з контактними датчиками, дистанційний пульт управління комплексом (рис. 1). Навісні блоки комплексу зв'язані із центральним записуючим модулем 7. Передача даних від навісних блоків до керуючого контролеру здійснюється за протоколом бездротового зв'язку IEEE 802.11n. (Wi-fi4).

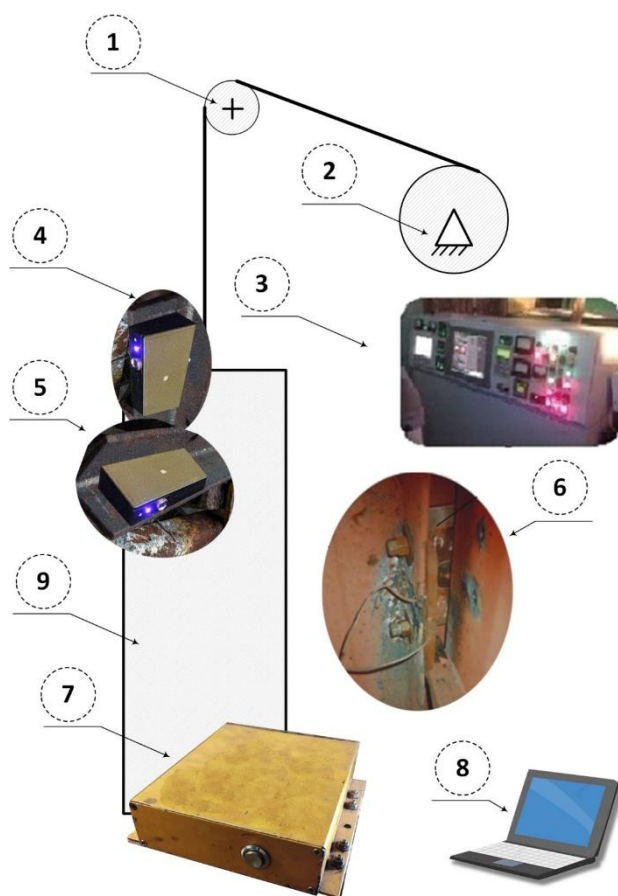


Рис. 1. Схема динамічних випробувань стовбурного обладнання ШПК на базі програмно-апаратного комплексу «Техно-Мак»: 1 – копровий шків; 2 - підйомна машина; 3 – наземний вимірювальний комплекс в машинному будинку підйому; 4, 5 – навісні датчики-акселерометри; 6 – навісні силовимірювальні башмаки посудини; 7 – мобільний записуючий блок апаратури із вбудованим ПК; 8 – стаціонарний ПК для обробки даних; 9 – підйомна посудина

Розроблені конструктивно нові рішення для систем передачі зусиль і стабілізації руху, що забезпечують підвищення рівня безпеки роботи підйомних установок в умовах інтенсифікації експлуатації, деградації матеріальних властивостей елементів, складних гірничо-геологічних умов та деформацій масиву гірських порід у колостовбурній зоні.

Тестові динамічні випробування у шахтних підйомних установках показали, що однією з ключових проблем виявляється витрати часу на монтаж та демонтаж усіх блоків обладнання. Раніш ці процеси займали досить багато часу, при використанні аналогової апаратури, що мала досить громіздкі блоки, систему віброперетворювачів для вимірювання та запису даних, довгі, захищені кабелі для їх з'єднання між собою. За останні роки відбувся перехід на нову малогабаритну, багатофункціональну мікропроцесорну техніку для вимірювання динамічних параметрів та безперервного запису їх під час усього періоду випробувань впродовж 2-3 годин, в залежності від робочої швидкості підйомних посудин. Це відкрило нові можливості для отримання

динамічної інформації та потребує розробки нових математичних моделей, які описують просторовий рух підйомної посудини у провідниках армування з періодичними функціями жорсткості, підвищеними параметрами викривлення у просторі, підвищеним зносом стінок та полок провідників та розпорів, неоднорідності цих порушень по глибині стовбурів та по їх довжинах у ярусах армування.

Математична частина технології містить методи розрахунку параметрів експлуатаційного стану підйомного обладнання, які враховують багатоланкову структуру ШПК з розподіленими масами канатів та дискретними тілами підйомної машини та підйомних посудин, просторовий характер армування стовбуру із металевими провідниками з періодичною пружністю між дискретно встановлених по глибині стовбуру розпорами. В загальній математичній моделі враховуються такі фактичні дефекти обладнання:

- відхилення кожного з провідників від вертикалі та їх ширина колії на кожному ярусі армування;
- остаточні товщини елементів провідників та розпорів армування;
- значення миттєвої вертикальної швидкості руху підйомної посудини;
- кінематичні зазори між запобіжними башмаками ковзання підйомної посудини та провідниками армування;
- зміщення центру мас вантажу у підйомній посудині від її вертикальної осі;
- розбаланс натягів головних канатів багатоканатної підйомної установки;
- розбаланс радіусів канатоведучих жолобів багатоканатних шківів тертя підйомної установки (головного та відхиляючих);
- залишкова міцність головних та врівноважувальних канатів;
- інші параметри, що суттєво впливають на стан підйомної установки.

При математичному моделюванні досліджуваних процесів використання традиційного способу усереднення деяких параметрів по глибині стовбура або його протяжній ділянці не може дати коректного результату. Таке становище потребує проведення досить ретельних та густо розташованих між собою вимірювань параметрів зносу, відхилень провідників від вертикалі, та їх вимірювання у декількох точках по довжині прольотів провідників і розпорів та по їх поперечних перерізах. При моделюванні та програмних розрахунках всі ці параметри повинні бути занесені у математичні моделі, використовуватися програмами при розрахунках залишкових параметрів міцності кожного прольоту провідників та розпорів по всіх ярусах армування та по всій трасі руху підйомної посудини.

Найбільш відповідальною частиною підйомного комплексу є система «підйомна посудина – армування». Динамічні процеси у ній мають параметричний характер та описуються системами диференціальних рівнянь типу Мат'є-Хілла, які мають декілька зон нестійкості з аварійно небезпечним рівнем параметричного резонансу аналогічно діаграмі Айнса-Стретта внаслідок суттєвої різниці між поперечною жорсткістю провідників у місцях скріплення з розпорами та в прольотах між ними. Внаслідок наявності обов'язкових кінематичних зазорів між поверхнями жорстких башмаків ковзання, закріплених на підйомних посудинах, та поверхнями провідників у лобовій та боковій площинах взаємодія посудини з провідниками армування носить ударно-циклічний характер [3, 4].

Спеціальне програмне забезпечення, яке розроблене на базі цих математичних моделей, виконує системну обробку даних з врахуванням результатів вимірювань

зносу армування, просторових викривлень профілів провідників, горизонтальної плавності та вертикальної швидкості руху посудин, динамічного напружено-деформаційного стану провідників та розпорів. Це дає змогу контролювати динамічну взаємодію одночасно усіх запобіжних напрямних підйомних посудин із провідниками жорсткого армування, комплексно оцінювати динамічний стан і рівень безпеки систем «посудина-армування» стовбура.

Розподіл динамічних навантажень на армування та механічних напружень у провідниках та розпорах від дії підйомних посудин має суттєво неоднорідний характер по глибині стовбура та залежить від сполучень багатьох параметрів комплексу та швидкості руху посудин. Така неоднорідність також суттєво підсилюється за рахунок того, що знос провідників та розпорів має дуже різний рівень на різних ділянках армування по глибині стовбура. Це наглядно ілюструється графіками на рис. 2, які побудовані на прикладі даних вимірювань та розрахунків в реальній діючій підйомній установці однієї з копалень України [6].

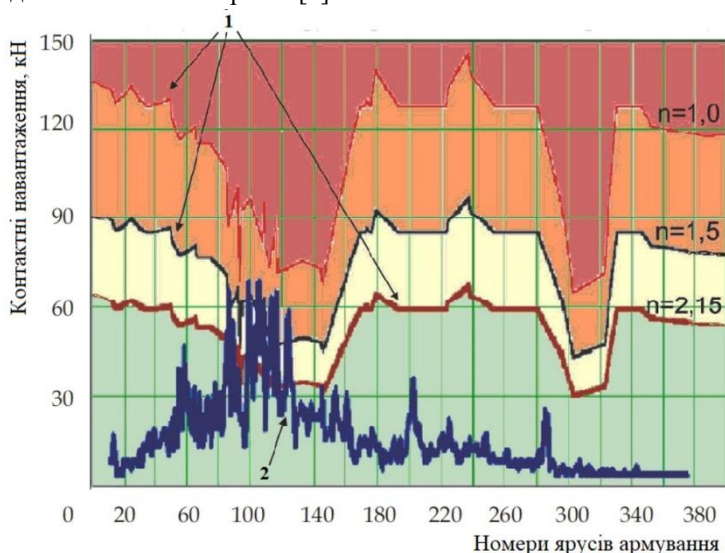


Рис. 2. Визначення рівня безпечної експлуатації обладнання ШПК: 1 – допустимі навантаження при заданих запасах міцності (n); 2 – експлуатаційні навантаження.

Комплекс «Техно-Мак», завдяки малим габаритам вимірювальних приладів, може застосовуватися у всіх видах випробувань, пов'язаних з визначенням динамічних навантажень на армування у скіпових, клітьових та противагових відділеннях стовбурів у робочих режимах підйому, для виявлення наявності аварійно небезпечних відхилень параметрів від припустимих значень і резонансних явищ.

Етапи обстеження шахтних стовбурів наступні:

1. Оптико-візуальний огляд стовбура (визначення залишкової товщини металоконструкцій провідників і розпорів, міцності з'єднань, уступів на стиках провідників, стану кріплення стовбурів, з адресною прив'язкою до глибинних позначок чи номерів ярусів армування).

2. Динамічні випробування армування (деталізація картини динамічного навантаження армування за окремими ділянками стовбура та ранжування цих ділянок за рівнями навантаження).

3. Періодичні виміри геометричних відхилень провідників від вертикалі, спеціальна математична обробка їх даних та виконання спільного аналізу результатів математичної обробки динамічних та геометричних параметрів провідників по ділянках ярусів стовбура.

4. Деформаційно-міцнісні розрахунки провідників та розпорів (визначення їх залишкових запасів міцності та динамічних прогинів, оцінка їх за двома граничними станами на підставі даних вимірювань залишкової товщини провідників та розпорів та результатів поярусних вимірювань динамічних навантажень на провідники).

5. Технічне діагностування.

6. Спільний аналіз даних математичної обробки профілювань, контактних навантажень, залишкових запасів міцності та деформацій металоконструкцій, комплексна розробка заходів щодо збереження працездатності армування на необхідному рівні.

7. Аналіз даних про швидкість корозії та зносу провідників та розпорів підйомних відділень у поєднанні з даними щодо зафіксованого на момент обстеження запасу міцності, складання прогнозу щодо зміни несучої здатності армування у часі у прийнятому режимі експлуатації.

8. Розробка прогнозу довговічності армування залежно від прийнятих режимів експлуатації підйому та фактичного стану обладнання підйому.

За цією технологією за останні 30 років обстежено більш 600 стовбурних відділень копалень та вугільних шахт України. За результатами випробувань надаються рекомендації щодо поліпшення експлуатаційного стану армування вертикальних стовбурів.

В даний час комп'ютерна технологія діагностики та керування технічним станом обладнання ШПК на базі програмно-апаратного комплексу «Техно-Мак» є складовою частиною сучасного ризик-орієнтованого підходу до забезпечення надійності та безпеки експлуатації шахтного підйому на шахтах і копальнях [10 – 14]. Завдяки цьому керування ризиками в системі шахтного підйому поєднує інженерні методи із цифровими технологіями моніторингу, збору даних, аналізу та прогнозування. Це дозволяє своєчасно виявляти ознаки потенційних несправностей до їх фактичного прояву та зменшити ймовірність виникнення аварійних ситуацій і виробничого травматизму. Такий підхід має забезпечити перехід до превентивного технічного обслуговування та підвищення загального рівня надійності та безпечності функціонування ШПК.

Практичне застосування технології дозволяє вирішити економічні проблеми галузі за рахунок сприяння підвищенню швидкості підйому, збільшенню обсягу видачі на поверхню корисних копалин, зниженню витрат на ліквідацію аварій при одночасному підвищенні безпеки роботи підйомних установок і скороченні виробничого травматизму при експлуатації стовбурів. Подальший розвиток і впровадження новітніх підходів до керування, моніторингу та технічного обслуговування ШПК є запорукою стабільної роботи гірничих підприємств у довгостроковій перспективі.

1. Н.Г. Гаркуша. Про історію вирішення однієї великої проблеми гірничої механіки ХХ століття. *Гірничі електромеханіка та автоматика*, 2(61), 5 – 8, (1999).

2. В.І. Дворников, С.Ю. Кърцелін. Теоретичні засади динаміки шахтного підйомного комплексу. *Софія, Болгарія: Поліграфічне підприємство Міністерства освіти, науки та технології* (1997).
3. С.Р. Ільїн, С.С. Ільїна, В.І. Самуся. Механіка шахтного підйому. *ДВНЗ «Національний гірничий університет»* (2014).
4. В.І. Самуся, С.Р. Ільїн, В.Є. Кириченко, І.С. Ільїна. Динаміка канатних та гідротранспортних підйомних комплексів гірничих підприємств. *ДВНЗ «Національний гірничий університет»* (2015).
5. ГР 3-032-2004. Діагностика стану систем „кріплення-масив” та „підйомна посудина-жорстке армування” шахтних стовбурів. Порядок та методика виконання. *Київ: Міністерство промислової політики України* (2004).
6. С.Р. Ільїн, Л.Г. Адорська, І.С. Ільїна та інші. Вимірювально – аналітична комп'ютерна технологія діагностики та управління станом обладнання шахтних підйомних комплексів. *Геотехнічна механіка*, **93**, 28–38 (2011).
7. С.Р. Ільїн, В.К. Радченко. Комп'ютерна технологія діагностики та управління станом обладнання шахтних підйомних комплексів. *Науково-технічне забезпечення гірничого виробництва. Праці ІГС ім. Д. А. Кунаєва. Алмаати*, 15-22 (2014).
8. С.Р. Ільїн, Л.Г. Адорська, В.К. Радченко. Концепція системи моніторингу при експлуатації глибоких стовбурів шахт та копалень України. *Геотехнічна механіка*, **143**, 15–22 (2018).
9. С.Р. Ільїн, В.І. Василькевич, К.А. Соломенцев. Комплексна методика оцінки динамічної безпеки систем «підйомна посудина – армування» вертикальних стовбурів шахт та копалень. *Бюлетень МАДСК, Одеса*, **13**, 23 -33 (2019).
10. С.Р. Ільїн, В.К. Радченко, Л.Г. Адорська. Ризикоутворюючі процеси під час роботи шахтних підйомних установок. *Геотехнічна механіка*, **134**, 22–33 (2017).
11. S. Ilin, L. Adorska, V. Samusia, D. Kolosov, I. Ilina. Conceptual bases of intensification of mining operations in mines of Ukraine based on monitoring and condition management of mine hoisting systems. *E3S Web of Conferences*, **109**, 00030. (2019). Available at: <https://doi.org/10.1051/e3sconf/201910900030>.
12. S. Ilin, L. Adorska, D. Patarai, I. Ilina. Risk-forming factors and processes at the stages of the life cycle of hoisting equipment in the mine vertical shafts. *Geo-Technical Mechanics*, **161**, 17–30 (2022).
13. S. Ilin, L. Adorska, D. Patarai, I. Ilina. Diagnostics of mine hoisting systems at mines operating in rock shear zones. *Geo-Technical Mechanics*, **170**, 144 – 155 (2024).
14. S. Ilin, L. Adorska, I. Ilina. Risk-forming dynamic processes in the components of mine multi-rope hoisting installations operating from great depths. *Geo-Technical Mechanics*, **175**, 54 – 67 (2025).

Електромеханічні пристрої повороту лопатей вітроколеса вітроенергетичних установок з горизонтальною віссю обертання

В.С. Дудніков

Інститут транспортних систем і технологій НАН України, Дніпро, Україна
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

dudvlad1944@gmail.com

Розглядаються результати роботи з розробки електромеханічних приводів повороту лопатей вітроенергетичних установок з горизонтальною віссю обертання вітроколеса. Крім того, було розроблено привід для заміни оригінального дорогого американського приводу повороту лопатей (приводу пітчу) на ліцензійний BEV USW-56–100, виготовлення решти елементів якої було освоєно підприємствами України, зокрема, Південним машинобудівним заводом (м. Дніпро). У всіх розробках для перетворення обертального руху електродвигуна в поступальний рух штоків приводів використовувалися кулькові гвинтові передачі, які відрізняються великим коефіцієнтом корисної дії, що дозволило значно зменшити потужність електродвигунів, що входять до складу приводів. У конструкціях приводів використовувалися тільки вітчизняні комплектуючі (електромагнітні муфти та гальма). Наведено основні технічні характеристики розроблених приводів. Усі роботи проводились під керівництвом автора.

Ключові слова: вітроенергетика, вітроустановки, поворот лопатей, електромеханічні приводи

Аналіз результатів патентно-інформаційних досліджень показує, що пошук альтернативних джерел енергії – основне завдання сучасної енергетичної галузі в усіх розвинених країнах світу. Копалини, які зберігаються в земних надрах, і стрімкими темпами використовуються у якості джерел енергії, близькі до виснаження. Економічний розвиток промислових галузей і комфортне існування людини залежить від пошуку і розробки нових поновлюваних джерел енергії. Одним з таких поновлюваних джерел безперечно є вітер, а одним з господарсько-економічних напрямків діяльності людини, спрямованих на отримання енергії з вітру, є вітроенергетика.

Варто зазначити, що вітрова енергетика робить суспільство незалежним не лише в питанні електроенергії, але й в питанні декарбонізації інших вуглецеємних галузей економіки, включно і з транспортним сектором.

В українській Енергетичній стратегії планується, що до 2030 року в Україні 2 ТВт·год. електроенергії будуть вироблятися вітровими установками.

За останні роки вітроенергетика стала галуззю сучасної «чистої» або, як її ще називають, «зеленої» енергетики, що по-справжньому бурхливо розвивається. Засоби перетворення кінетичної енергії вітрового потоку в механічну, теплову, і електричну форми енергії займають все більшу частку в енергетичній світовій галузі. Запаси цієї енергії невичерпні, оскільки вітер виникає в результаті дії сонця, а рівень шкідливих викидів при такій генерації практично нульовий.

Ефективність вітроустановок залежить від системи регулювання. Регулювання частоти обертання, зване регулюванням кроку лопатей, яке набирає чинності в режимі повного навантаження, здійснюється шляхом регулювання кута нахилу лопатей ротора.

Використовуються гідравлічні або механічні (електромеханічні) приводи поступального переміщення. Гідравлічні виконавчі механізми порівняно прості в конструктивному відношенні, але мають підвищені габарити і вагу, вимагають додаткове джерело зовнішньої енергії, періодичних регламентних робіт з усунення витоків масла, при пошкодженні гідроциліндрів і магістралей, що їх живлять, робіт з усунення витоків масла,

Гідравлічні регулятори вимагають постійної роботи насоса та, як наслідок, непродуктивних витрат електроенергії на обслуговування самої вітроустановки.

Фахівці конструкторського бюро „Південне“ (Дніпро, Україна) спочатку зменшили швидкість спрацьовування регуляторів з 70 мм/с до 30 мм/с, а потім замінили гідравлічні регулятори на електромеханічні.

Електромеханічні регулятори, складніші по конструкції, але більш безпечні і компактні. Електричний привід зазвичай монтується з передавальними виконавчими механізмами в єдиний блок, з єдиним корпусом та загальними зв'язками, що ще більшою мірою призводить до скорочення габаритів та ваги. Електромеханічні регулятори витрачають електроенергію тільки в моменти регулювання лопатей вітроколеса.

В ліцензійній вітроустановці USW 56–100 передача гвинт-гайка тертя ковзання використовується у регуляторі повороту лопатей.

Зовнішній діаметр нарізі трапецеїдального гвинта становить один дюйм (25,4 мм), а крок 3,175 мм. У поєднанні з бронзовою гайкою довжиною 52,3 мм забезпечується сумарна опорна площа витків 1960 мм, що при допустимому питомому тиску 10 МПа відповідає допустимому осьовому навантаженню 19,60 кН.

Гвинт передачі гвинт-гайка тертя ковзання, що не обертається, жорстко закріплений на керуючій штанзі, що повертає лопаті при своєму поступальному переміщенні в шліцевому з'єднанні щодо маточини вітроколеса. Так як гвинт обертається разом з вітроколесом, а гайка тільки в моменти керування кутом установки лопатей, то сумарна відносна кутова швидкість обертання гвинта і гайки визначається як сума або різниця кутових швидкостей вітроколеса і кутової редукованої швидкості двигуна. В результаті гайка нагвинчується або, навпаки, згвинчується з гвинта, викликаючи його осьове переміщення, що призводить до зміни кута установки лопатей. Після досягнення потрібного кута установки лопат подається команда на відключення двигуна та гальма. Гальмо жорстко з'єднує між собою гвинт і гайку.

Вони обертаються разом із кутовою швидкістю вітроколеса. Через кожні 3,2 с проводиться замір фактичного кута установки лопат і у разі потреби подається команда на коригування його значення. При цьому подається напруга на гальмо та двигун. Гайка та гвинт починають обертатися один щодо одного у потрібному напрямку, гвинт переміщається поступово, повертаючи лопаті.

Як показала практика, саме гвинтова передача є ланкою, що визначає працездатність електромеханічного пристрою повороту лопатей.

В модернізованому варіанті електромеханічного пристрою повороту лопатей (ліцензійна BEU USW 56–100) замінено передачу гвинт-гайки тертя ковзання на кулькогвинтову передачу тертя кочення. Замість оригінальних електромагнітної однодискової фрикційної муфти зчеплення та багатодискового фрикційного електромагнітного гальма використовуються освоєні в серійному виробництві в

Україні відповідно електромагнітна фрикційна багатодискова муфта серії ЕТМ з винесеними дисками та однодискове електромагнітне безлюфтове гальмо. Як двигун використовується серійний асинхронний електродвигун серії АІР (або 4А) меншої потужності.

Дослідний зразок регулятора складався з трифазного електродвигуна АІР-71 потужністю 250 Вт (замість 470 Вт в американському варіанті) і частотою обертання 685 об/хв, черв'ячного редуктора з передавальним числом 7,5, кулькогвинтової передачі з номінальним діаметром 25 мм, діаметром кульок 3 мм, електромагнітного фрикційного гальма НЗТБ-11-10А, електромагнітної фрикційної сухої муфти ЕТМ 083С для зв'язку гайки кулькогвинтової передачі з валом вітроколеса, електромагнітної фрикційної муфти ЕТМ 053С, що установлена між двигуном і редуктором.

В альтернативному варіанті електромеханічного регулятора повороту лопатей ВЕУ USW 56–100 гайка кулькогвинтової передачі приводиться у обертання одноступінчастим хвильовим зубчастим редуктором. Лопаті вітроколеса за допомогою кривошипно-кулісного механізму з'єднані з керуючим штоком, який розташований всередині валу вітроколеса, що обертається. Керуючий шток за допомогою розділової муфти, що містить два радіально-упорних конічних роликових підшипника, поставлених враспор; єднується з іншим штоком, в середній частині якого розташований гвинт кулькогвинтової передачі, що закривається призматичної напрямної, що переміщується всередині нерухомого корпусу пристрою.

Пристрій забезпечений фотоелектричним реверсивним датчиком лінійних переміщень, що забезпечує підсумовування та віднімання імпульсів двійковим реверсивним лічильником в залежності від напрямку ротора двигуна (напрямки лінійних переміщень керуючого штока). Інформація про поточне значення лінійних переміщень штока (кута повороту лопатей вітроколеса) по ланцюгу зворотного зв'язку надходить на контролера, який визначає тривалість включення двигуна, а отже, величину та напрямок зміни кута установки лопатей. Після досягнення лопатями вітроколеса розрахункового значення кута контролер подає команду на відключення двигуна та включення гальма. Для увімкнення гальма необхідно зняти з нього електричне живлення.

Замість гідравлічних регуляторів повороту лопатей вітроколеса ВЕУ-250С, розробленої конструкторським бюро „Південне“, нами було запропоновано електромеханічний регулятор, що складається з двох ідентичних перетворювачів обертального руху на поступальне та системи управління ними. Кожен перетворювач включає асинхронний електродвигун, двоступінчастий циліндричний зубчастий редуктор, кулькогвинтову передачу, систему з двох герконових кінцевих вимикачів, що відключають живлення електродвигуна при досягненні штоком, що поступово переміщається, своїх граничних положень.

На вхідному валу редуктора жорстко закріплений фрикційний диск нормально замкнутого електромагнітного гальма і чутливий елемент фотоелектричного датчика переміщень. Для збільшення кута повороту лопатей включається електродвигун, зменшення ж кута повороту лопатей відбувається під дією зусилля поворотної пружини і аеродинамічного навантаження на лопатях вітроколеса, при цьому двигун працює в режимі, що підгальмовує, при включеному гальмі. Після електричного відключення гальма він утримує шток перетворювача у будь-якому проміжному стані без підведення енергії. Відключення гальма відбувається у моменти нульової частоти

обертання (моменти зміни частоти обертання) ротора двигуна за показаннями фотоелектричного датчика переміщень, одночасно датчика швидкості. При аварійному відключенні живлення двигуна регулятор автоматично здійснює переведення вітроколеса у флюгерний режим, для чого здійснюється циклічне увімкнення-вимкнення гальма по команді від блоку управління, який при цьому переходить на живлення від акумулятора напруги 24, наявного на ВЕУ.

У вітчизняної ВЕУ–500 регулятор виконаний багатоблочним та співвісним. Він частково розташовується всередині пустотілого валу зубчастого мультиплікатора і, з одного боку, через підшипникову розділову муфту з'єднаний з штангою, що обертається, керуючої через важили поворотом лопатей вітроколеса, а, з іншого боку, за межами мультиплікатора, має шарнірно-кардане з'єднання. Обертання асинхронного електродвигуна через двоступінчастий планетарний редуктор передається на гвинт кулькогвинтової передачі, за допомогою якої перетворюється на поступальне переміщення вихідного штока, що передається через підшипникову розділну муфту керуючої штанги, що обертається разом з вітроколесом, що повертає лопаті.

Регулятор має фотоелектричні датчики кінцевих положень, що подають команди на відключення живлення та зупинки електродвигуна. Після спрацювання кінцевих вимикачів можливий лише реверс електродвигуна. Крім того, регулятор оснащений фотоелектричним датчиком переміщень, що є реверсивним лічильником імпульсів і дозволяє судити про поточне положення вихідного штока регулятора. На одному валу з датчиком переміщень встановлено електромагнітне безлюфтове нормально закрите фрикційне гальмо, яке при відсутності електроживлення, що синхронізується з відключенням електродвигуна, дозволяє утримувати лопаті вітроколеса в будь-якому положенні, що визначається швидкістю потоку, що набігає.

По команді від системи управління ВЕУ подається електроживлення на гальмо і електродвигун, що призводить до відповідної зміни положення лопатей, що відповідає новому значенню швидкості потоку, що набігає. Для зручності експлуатації регулятор забезпечений ручним дублером приводу.

Існує багато конструкцій пристроїв повороту, але вони не є універсальними. Необхідно переходити до модульного структурного принципу проектування ВЕУ, тобто збирати її з кількох типових модулів, у тому числі пристроїв повороту лопатей.

Це дозволить краще відпрацювати конструкцію кожного модуля, підвищить надійність та довговічність, спростить та здешевить виготовлення, підвищить ремонтпридатність. Для кожного модуля має бути розроблений типорозмірний ряд на певний діапазон потужностей ВЕУ.

1. Дудніков В.С. Гвинтові передачі у складі вітчизняних електромеханічних пристроїв повороту лопатей вітроколес вітроенергетичних установок. The 11th International scientific and practical conference “Science and education: problems, prospects and innovations” (July 21-23, 2021) CPN Publishing Group, Kyoto, Japan. 2021.- С. 135-140. <https://sci-conf.com.ua/wp-content/uploads/2021/07/science-and-education-problems-prospects-and-innovations-21-23.07.21>

Напружено-деформований стан і зношування пари «колесо–рейка» на коліях 1520 і 1435 мм

Т. Ф. Мокрій¹, Л. Г. Лапіна², С. С. Пасічник

^a Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України, Дніпро, Україна

¹mokriyt@gmail.com, ²lapina.l.h@nas.gov.ua

Теоретично проаналізовано напружено-деформований стан контактної пари «колесо–рейка» при експлуатації вагонів на коліях українського і європейського стандартів. Досліджувалась взаємодія набіжних на зовнішню рейку коліс в кругових кривих малого радіуса з урахуванням бічного зношення головок рейок. Побудовано тривимірні скінченноелементні моделі контактної пари та визначено розподіли контактних напружень для різних поєднань профілів головок рейок і ободів коліс – стандартних та розроблених в ІТМ НАНУ і ДКАУ. Показано, що застосування стандартних профілів коліс при контакті зі зношеними рейками іншої залізничної системи призводить до зростання напружень у гребеневій зоні. Оцінено показники гребеневого зносу набіжних на зовнішню рейку коліс з різними профілями ободів. Встановлено, що використання розроблених в ІТМ НАНУ і ДКАУ профілів забезпечує більш рівномірний розподіл контактних напружень і зниження показників гребеневого зносу порівняно зі стандартними профілями, особливо при взаємодії зі зношеними рейками. Це сприятиме підвищенню ресурсу коліс при спільній експлуатації на залізницях України та Західної Європи.

Ключові слова: колії 1520 і 1435 мм, напружено-деформований стан, контактні напруження, пара «колесо–рейка», профілі ободів коліс, зношування коліс.

Вступ. Актуальною задачею для вітчизняного залізничного транспорту є інтегрування до європейської транспортної системи. Суттєвою перешкодою до цього є те, що залізниці України та більшої частини Європи відрізняються параметрами рейкової колії, насамперед шириною (1520 і 1435 мм відповідно). Міжнародний досвід показав, що для швидкого переходу рухомого складу на залізничну колію іншої ширини ефективним технічним рішенням є застосування розсувних колісних пар, які дають змогу змінювати відстань між колесами на спеціальних колійних пристроях без заміни візків. Разом з цим необхідно забезпечити сумісність контактної пари "колесо–рейка" на коліях різних стандартів устрою: з рейками Р65 з кутом нахилу рейки до горизонту (підхилом) 1/20 в Україні; з рейками UIC60 з підхилом 1/40 в країнах Західної Європи. Для вирішення цієї проблеми в Інституті технічної механіки НАН України і ДКА України розроблено нові профілі поверхні кочення коліс ІТМ-73ЕР і ІТМ-73ЕС для пасажирських і вантажних вагонів відповідно [1, 2].

При побудові нових профілів коліс використовувалася просторова математична модель взаємодії залізничного екіпажа та інерційної пружнодисипативної колії, в якій враховуються розміри плям контакту та розподіл по них нормальних та дотичних сил взаємодії [3]. Розподіл сил взаємодії по поверхні знайденої контактної плями визначається шляхом поділу її на малі скінченні елементи, у кожному з яких контакт вважається одноточковим і обчислюються елементарні сили. Дотичні елементарні сили вважаються силами крипу. Повна поздовжня та поперечна складові розподіленої

сили крипу дорівнюють сумі відповідних елементарних сил. Елементарні вертикальні сили взаємодії обчислюються шляхом розподілу повної вертикальної сили між елементами контактної плями пропорційно величині заглиблення колеса в рейку в кожному елементі.

Геометрія профілів коліс визначалась з урахуванням забезпечення необхідного запасу стійкості руху на прямолінійних ділянках та поліпшення показників взаємодії з колією в кривих українських і європейських залізниць. За прогностичними оцінками застосування цих профілів дозволить забезпечити високі динамічні якості екіпажів і прийнятні показники їхньої взаємодії з незношеними рейками колій залізниць обох стандартів.

Проте в процесі експлуатації профілі поверхонь контакту коліс і рейок змінюються внаслідок зношування, особливо інтенсивного в кривих малого радіуса. Форми зношених рейок на коліях 1520 і 1435 мм розрізняються між собою не лише через різницю початкових профілів, а й внаслідок контакту переважно зі стандартними для кожної залізничної системи профілями коліс: ДСТУ ГОСТ 10791:2016 (далі називатимемо цей профіль стандартним) – в Україні, S1002 – в країнах Західної Європи. За таких умов застосування нових профілів ІТМ-73ЕР і ІТМ-73ЕС потребує оцінювання їх впливу на взаємодію пари «колесо–рейка» та ресурс її елементів при контакті зі зношеними рейками.

Оцінювання взаємодії колеса і рейки доцільно виконувати на основі аналізу їх напружено-деформованого стану (НДС), що дозволяє визначати розподіл контактних напружень і прогнозувати зони зношення та утворення дефектів контактної пари.

Метою роботи є аналіз впливу зношення рейок різних стандартів на напружено-деформований стан пари «колесо–рейка» і показники зносу коліс з різними профілями ободів.

1. Розрахункові схеми

Досліджувалась взаємодія коліс з профілями ободів ІТМ-73ЕР і ІТМ-73ЕС, а також – для порівняння – коліс зі стандартними профілями української та західноєвропейської залізничних систем (рис. 1, а) з рейками Р65 і UIC60 з бічним зносом головок від 0 до 8 мм з кроком 2 мм (рис. 1, б, в). Форми зношених головок рейок отримано шляхом математичного моделювання і узгодження з опублікованими у відкритому доступі результатами вимірювань.

Для кожного поєднання колеса і рейки побудовано тривимірні скінченноелементні моделі контактної пари. Геометрія моделей відтворювала профілі поверхонь кочення коліс і головок рейок з урахуванням їх зношення. Розрахункова сітка містила близько 200 тис. об'ємних скінченних елементів і 250 тис. вузлів. В зоні можливого контакту обода колеса з головою рейки застосовано локальне згущення сітки, що забезпечує підвищену точність визначення контактних напружень (рис. 2, а). Взаємодія в парі «колесо–рейка» моделювалася з урахуванням умов непроникності тіл і передачі навантаження через контактну поверхню. Граничні умови задавалися таким чином, щоб відтворити характер навантаження колеса на рейку при вписуванні екіпажа у криву з урахуванням дії вертикальних і бічних сил (рис. 2, б, в).

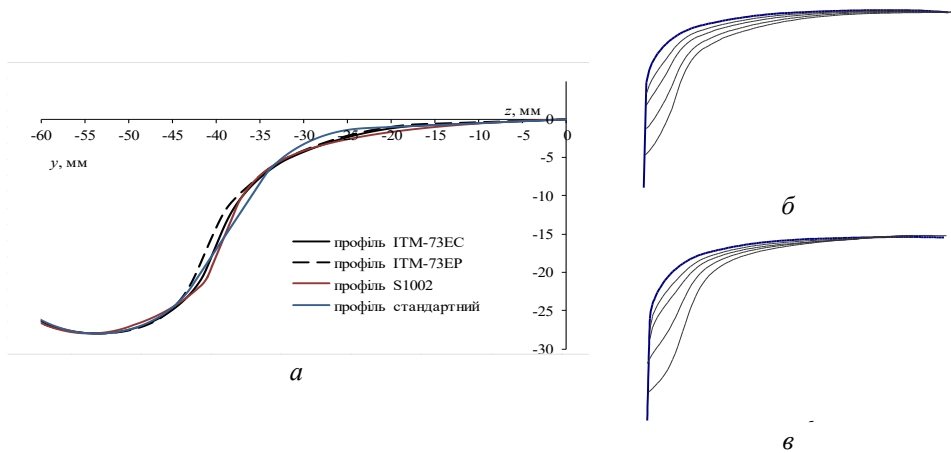


Рис. 1. Порівняння профілів: коліс (а), зношених рейок UIC60 (б) і рейок P65 (в).

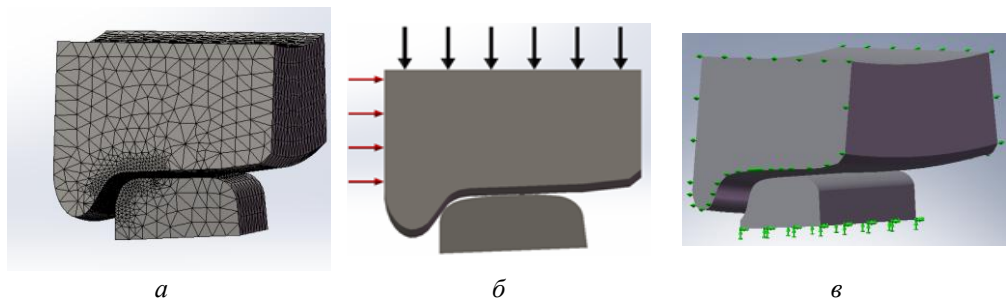


Рис. 2. Скінченноелементна модель пари «колесо – рейка» (а) зі схемою прикладання навантажень (б) і граничними умовами (в).

Оцінювання напруженого стану виконано за критерієм Мізеса, відповідно до якого еквівалентні напруження порівнюються з границею текучості матеріалу. Це дозволяє визначати зони можливого зародження пластичних деформацій і оцінювати умови формування контактної-втомних пошкоджень.

2. Результати розрахунків

На основі побудованих скінченноелементних моделей проведено розрахунки напружено-деформованого стану пари «набійне колесо – рейка» при русі в круговій кривій радіуса 300 м пасажирського вагона з колесами з профілем ITM-73EP і вантажного вагона з колесами з профілем ITM-73EC, а також – для порівняння – із стандартними профілями кожної із залізничних систем.

Як приклад, на рис. 3, 4 проілюстровано окремі варіанти результатів розрахунків НДС пари «колесо–рейка» для пасажирського вагона. Показано випадки контакту коліс з незношеними і сильнозношеними (бічний знос 8 мм) головками рейок типів UIC60 і P65. Для вантажного вагона розподіл напружень виявився аналогічним.

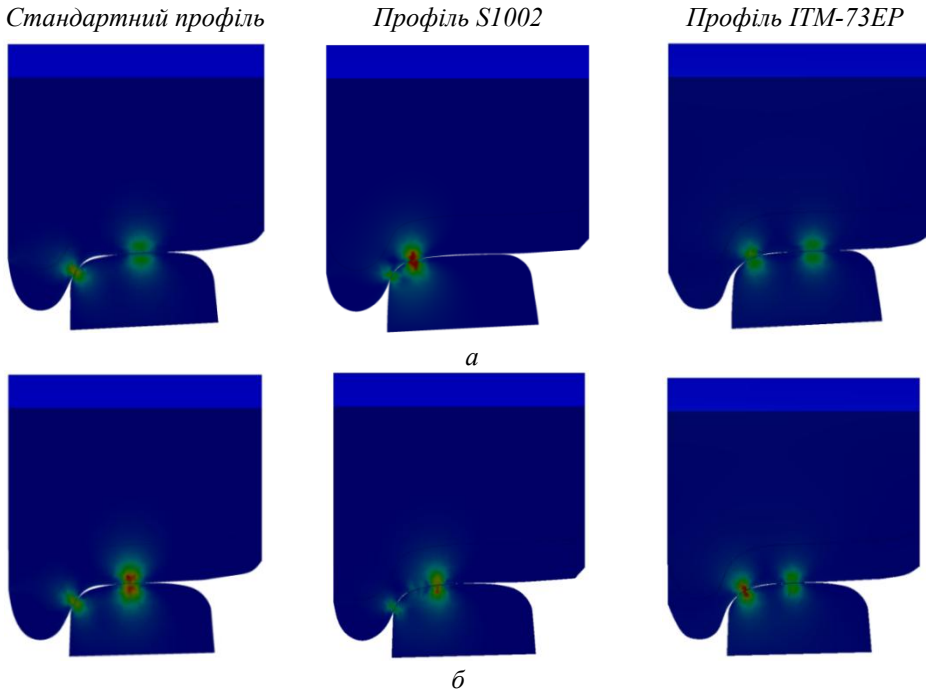


Рис. 3. Напружено-деформований стан контактної пари для коліс з різними профілями і незношених рейок Р65 (а) та UIC60 (б).

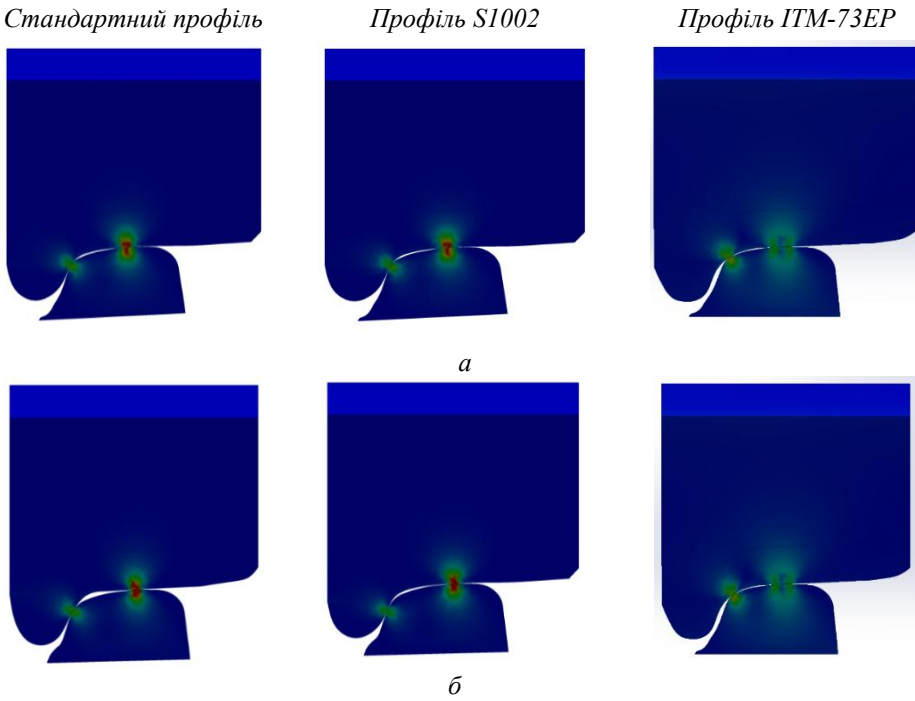


Рис. 4. Напружено-деформований стан контактної пари для коліс з різними профілями і рейок Р65 (а) та UIC60 (б) з бічним зносом 8 мм.

Отримані результати розрахунків показують, що взаємодія коліс з розглянутими профілями і обома типами незношених та зношених рейок має фазу двоточкового контакту. При контакті з рейками коліс із стандартним українським профілем перша точка контакту знаходиться на поверхні кочення, а друга в усіх випадках на гребені. Таке розташування точок контакту призводить до інтенсивного гребеневого зносу внаслідок погіршення вписування колісної пари у криволінійні ділянки колії.

При контактній взаємодії з незношеними рейками коліс з профілем S1002 обидві точки контакту знаходяться на галтелі і наближаються до основи гребеня колеса. По мірі зношування рейок друга точка контакту на колесі переміщується до вершини гребеня. Це може призводити до виникнення таких дефектів колеса, як вертикальний підріз гребеня при його нерівномірному зношуванні або до гострокінцевого накату за рахунок накопичення пластичних деформацій металу.

При контакті коліс з профілем ITM-73EP і ITM-73EC плями контакту знаходяться переважно на галтелі і поверхні кочення в центральній частині, причому у випадку зношених рейок друга контактна пляма зменшується, а пляма контакту в центральній зоні збільшується.

Встановлені особливості розподілу контактних напружень визначають умови зношування елементів пари «колесо–рейка», проте для повної оцінки її працездатності необхідно розглянути також показники зношування. Таким показником, що безпосередньо характеризує інтенсивність цього процесу, є показник зносу A – питома робота сил тертя (крипу).

Проведено розрахунки максимальних значень A – показника гребеневого зносу набіжних на зовнішню рейку коліс пасажирського і вантажного вагонів з профілем ITM-73EP і ITM-73EC відповідно та (для порівняння) коліс із стандартним українським і європейським профілем при русі екіпажів в круговій кривій радіуса 300 м зі швидкістю пасажирського вагона 80 км/год, вантажного – 60 км/год. Під терміном «гребеневий» розуміється знос гребеня і галтелі. Отримані залежності показника A від ступеня зносу рейок P65 і UIC60 для пасажирського вагона наведено на рис. 5. Для вантажного вагона якісний характер залежностей є таким самим.

Аналіз отриманих результатів свідчить про те, що інтенсивність зношування коліс з профілями ITM-73EP і ITM-73EC є меншою, ніж **стандартних українських коліс**, в усьому розглянутому діапазоні зношування рейок обох типів. При цьому при контакті з незношеними рейками значення показника зносу A для коліс з профілями ITM-73EP і ITM-73EC є нижчими у 2–3 рази, із зростанням бічного зносу рейок значення A поступово збільшується і при зносі 8 мм наближається до відповідних значень для стандартного колеса.

Для коліс з профілями ITM-73EP і ITM-73EC у випадку незношених головок рейок значення показника A можуть дещо перевищувати відповідні значення коліс із **стандартним європейським профілем S1002**. Водночас швидкість зростання цього показника для коліс з розробленими в ІТМ НАНУ і ДКАУ профілями зі збільшенням зносу рейки є значно нижчою, ніж для коліс з профілем S1002. Уже при малому бічному зносі рейок значення показника A для коліс з профілем S1002 перевищує відповідне значення A для коліс як з профілем ITM-73EP, так і профілем ITM-73EC, а при бічному зносі 8 мм різниця між ними досягає 2,2–2,5 разів.

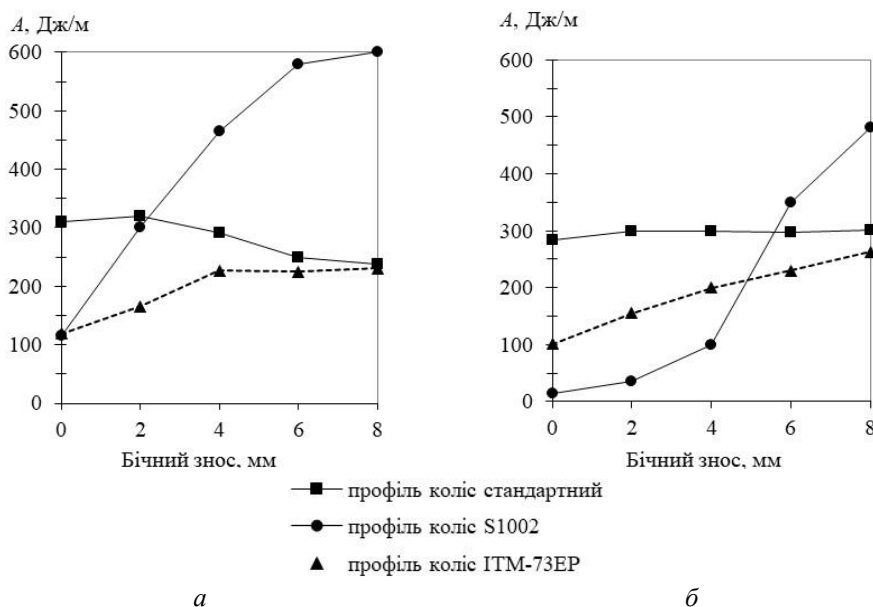


Рис. 5 Залежності інтенсивності гребеневого зносу коліс від бічного зносу рейок при русі в кругових кривих пасажирських вагонів

Висновки. Проведений аналіз напружено-деформованого стану пари «колесо–рейка» з урахуванням зношення рейок різних стандартів показав, що застосування стандартних профілів коліс при їх взаємодії зі зношеними рейками іншої залізничної системи може призводити до зростання контактних напружень у гребеневій зоні і, як наслідок, до інтенсифікації зношування. Використання розроблених в ІТМ НАНУ і ДКАУ профілів ободів ІТМ-73ЕР і ІТМ-73ЕС забезпечує більш рівномірний розподіл контактних напружень і зниження значень показника гребеневого зносу порівняно зі стандартними профілями, особливо при взаємодії зі зношеними рейками.

Отримані результати свідчать про доцільність застосування профілів ІТМ-73ЕР і ІТМ-73ЕС при спільній експлуатації рухомого складу на залізницях колії 1520 і 1435 мм, що сприятиме зменшенню інтенсивності зношування коліс і підвищенню їх ресурсних показників.

1. Т. Ф. Мокрій, І. Ю. Малишева, Л. Г. Лапіна, Н. В. Безрукавий. Профіль обода коліс пасажирського вагона для умов спільної експлуатації на українських і європейських залізницях, *Технічна механіка*, № 4, 111–120 (2022). <https://doi.org/10.15407/itm2022.04.111>
2. Т. Ф. Мокрій, І. Ю. Малишева, С. С. Пасічник. Профіль обода коліс вантажного вагона з перспективними візками для умов спільної експлуатації на українських і європейських залізницях. *Технічна механіка*, № 4, 90–103 (2023). <https://doi.org/10.15407/itm2023.04.090>
3. В. Ф. Ушкалов, Т. Ф. Мокрій, И. Ю. Малышева. Математическая модель взаимодействия железнодорожного экипажа и пути с учетом распределения контактных сил по пятнам контакта, *Техническая механика*, № 2, 79–89 (2015).

Геомеханічні процеси, як чинник структурних перетворень твердих вуглеводневих матриць

К. А. Безручко¹, О. В. Бурчак, Л. І. Пимоненко, О.В. Приходченко

Інститут геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України, Дніпро, Україна

¹gvrvvg@meta.ua

Встановлено, що карбонізована органічна речовина є енергетично активною та здатною накопичувати пружну енергію на молекулярному рівні під дією механічних навантажень. Накопичена енергія являє собою внутрішній потенціал, який впливає на кінетику подальших фізико-хімічних процесів і може служити енергетичним ресурсом для структурних та функціональних перетворень у вуглеводневій матриці. Отримані дані поглиблюють розуміння механохімічних аспектів поведінки вугільної речовини та формують теоретичну основу для розробки нових технологічних підходів до керування процесами перетворення вуглецевих матеріалів та підвищення ефективності використання вугільної сировини. У науковому плані набуло подальшого розвитку положення про наявність обмеженого ресурсу безоборотного поглинання енергії вугільною речовиною, який реалізується в межах початкових циклів навантаження та визначає формування квазістабільного енергетичного стану системи.

Ключові слова: тверда вуглеводнева матриця, викопне вугілля, геомеханічний чинник, тиск, структурно-функціональні перетворення, пружна енергія.

Вступ. Перетворення органічної речовини в процесі вуглефікації відбувається під впливом зовнішніх сил, які з різною інтенсивністю діють на вуглепородний масив. Потік енергії, яка надходить в масив, витрачається на фізико-хімічні перетворення органічної речовини і частково накопичується у вигляді структурних напружень на різних масштабних рівнях. Тому при аналізі еволюції стану та властивостей твердих вуглеводневих матриць необхідні дослідження впливу тиску, як одного з основних геомеханічних чинників, який обумовлює кількість енергії, що надходить у вугільну речовину і акумулюється у молекулярній структурі.

За сучасними уявленнями викопне вугілля, є складною полікомпонентною, гетерогенною, метастабільною системою, здатною до накопичення значних обсягів внутрішньої енергії на молекулярному рівні. Ця енергія акумулюється у вугільних пластах у гірському масиві під впливом геодинамічних процесів, створюючи передумови для зміни фазового стану речовини у вигляді як раптового викиду, так і поточної газогенерації. Але оцінка цієї енергії і її зміна на різних стадіях еволюції викопної органіки раніше не проводилась.

Вивчення процесів, що відбуваються у геологічному середовищі, дослідження чинників, умов та шляхів перетворень вугілля, що пов'язані з формуванням властивостей вугільної речовини принципово важливе при розробці нових технологій альтернативного використання викопної органіки у виробництві синтетичних палив, водню або новітніх вуглецевих наноматеріалів та мінімізації

негативного впливу на довкілля. Все це вимагає детального дослідження умов активації і проходження структурних перетворень на нанорівні.

Метою роботи була оцінка величини енергії, що накопичується у вугільній речовині під дією геомеханічного чинника, за рахунок якої можуть відбуватися структурно-функціональні перетворення у кам'яному вугіллі для подальших науково обґрунтованих технологічних рішень з керування процесами трансформації матриць твердих вуглеводнів.

1. Методика досліджень. Було застосовано комплексний метод досліджень, який включає аналіз та узагальнення геологічних умов; технічний аналіз вугілля (зольність та вихід летких речовин), лабораторну перевірку отриманих даних шляхом фізичного моделювання процесів у вугільній речовині на атомно-молекулярному рівні під зовнішнім впливом. Отримані дані співставленні з результатами досліджень сучасними фізичними методами: ядерного магнітного резонансу (ЯМР), інфрачервоної спектроскопії (ІЧС) та безконтактної оцінки енергетичного стану кам'яного вугілля методом SQUID-магнітометрії.

Для дослідження геомеханічного чинника еволюції твердих вуглеводневих матриць проводилось оцінка пружних властивостей зразків вугілля всіх стадій метаморфізму статичним методом за опором стиску. За основу алгоритму проведення вимірів застосовано методику досліджень викладену в роботі [1,2]. За опором тиску оцінені величини енергії у вугіллі різних марок на п'ятьох циклах.

Залежно від щільності та міцності вугільного порошку частинки по-різному реагують на стиск. Більш м'які частинки вугілля при стисканні пластично і незворотно деформуються без порушення суцільності і заповнюють проміжки між більш жорсткими зернами, зменшуючи обсяг порожнеч [3,4]. За підвищеного тиску можливі механо-хімічні або фізико-хімічні перетворення, з утворенням нових атомно-молекулярних зв'язків між функціональними групами з частковим збереженням властивостей вихідної речовини. При ущільненні порошоків коефіцієнт упаковки прагне до одиниці. При великих тисках, коли всі критичні порожнечі заповнені, речовина відчуває тільки пружну деформацію [5].

2. Отримані результати. Встановлено, що на першому та частково на другому етапі експерименту в речовині відбуваються крихкі та пластичні деформації. Після третього циклу енергетичний стан речовини практично стабілізується, що вказує на проходження всіх можливих для даного тиску пластичних деформацій та фізико-хімічних перетворень у структурі органічної речовини. Відсутність незворотних перетворень свідчить про здатність речовини накопичувати в молекулярній структурі тільки пружну енергію у вигляді зміни міжатомних відстаней та торсійних кутів з утворенням конформаційних дефектів. Ефект накопичення пружної енергії в молекулярній структурі впевнено простежується на зразках вугілля всіх ступенів метаморфізму.

Переконливим доказом накопичення пружної енергії у молекулярній структурі вугільної речовини і релаксаційних процесів після зняття тиску є також збільшення діаметру пігулки після виймання з прес-форми в середньому на 0,08мм. (Діаметр отвору прес-форми дорівнює 13,00 мм.)

Структурні перетворення можна визначати як процеси просторового перегрупування ядер та перебудови електронних оболонок за зміни загального енергетичного стану системи під зовнішнім впливом. Для підтвердження можливостей накопичення пружної енергії у вугільній речовини проведені дослідження методами спектроскопії (ЯМР, ІЧС) та SQUID-магнітометрії. У дослідженнях використовували ті ж самі вугільні проби, що і в основному експерименті з оцінкою пружної енергії за опором тиску.

Методом ЯМР встановлено, що після підвищення тиску змінилося співвідношення інтегральних інтенсивностей сигналів з одночасною зміною значень хімічного зсуву (δ) – зміщення резонансної частоти ядра атома відносно еталона, зумовлене його електронним оточенням (27,1→30 ppm; 188→180 ppm). Ця зміна свідчить про перерозподіл атомів вуглецю між sp^3 - та sp^2 - станами за підвищеного газового тиску і вказує на зміну внутрішньої енергії речовини [6].

Паралельно, ґрунтуючись на інформації про зміну частот коливань C-H зв'язків за зміни тиску, квантово-хімічними методами були побудовані моделі комплексів, що описують найбільш ймовірні внески у взаємодії між неполярними молекулами. Отримані результати можуть бути ідентифіковані як слабкі дисперсійні сили, що свідчить про накопичення енергії на атомно-молекулярному рівні під силовим навантаженням [7].

Методом ІЧ-спектроскопії експериментально підтверджена можливість накопичення енергії в структурі вугілля у вигляді конформаційних деформацій та зміни міжатомних відстаней. Зокрема зареєстровано зсув на 20cm^{-1} смуг поглинання функціональних груп (зміна частот валентних коливань) в умовах механічного стискання, що відповідає поглинанню речовиною енергії ($\approx 2,45 \cdot 10^{-3}$ еВ) у вигляді структурних напружень [8].

Методом SQUID-магнітометрії доведено, що зростання магнітного сигналу під тиском є наслідком накопичення енергії в атомно-молекулярній структурі вугільної речовини. Зниження магнітного сигналу зразків вугілля в часі свідчить про релаксацію накопиченої енергії [8].

Релаксація молекулярною структурою вугільної речовини акумульованої енергії призводить до активації структурно-функціональних перетворень у вугіллі, наслідком чого є зниження накопиченої енергії з деструкцією речовини з утворенням великої кількості низькомолекулярних з'єднань, зокрема, метану та структуризації твердого залишку з підвищенням вмісту вуглецю.

Висновки. Запропоновано інноваційний підхід до ідентифікації та кількісного оцінювання пружної енергії, що може бути накопичена в молекулярній структурі вугільної речовини під механічним навантаженням. За допомогою сучасних структурно-чутливих методів дослідження (ЯМР, ІЧС, SQUID-магнітометрії) підтверджено можливість акумуляції енергії в атомно-молекулярній структурі вугільної речовини.

Встановлено, що вуглефікована органіка є енергетично активною речовиною, здатною акумулювати пружну енергію на молекулярному рівні під дією силових навантажень. Накопичена енергія є внутрішнім потенціалом, що впливає на кінетику подальших фізико-хімічних процесів і може виступати

енергетичним ресурсом для структурно-функціональних перетворень у вуглеводневій матриці.

Виявлено ефект стабілізації енергетичного стану після багаторазового стискання, що свідчить про завершення деформаційних, крихких та фізико-хімічних процесів за заданих умов навантаження. Подальша дія механічного фактору не призводить до суттєвих структурних змін, а характеризується накопиченням пружної енергії, що дозволило обґрунтувати достатність трьох циклів навантаження для коректної оцінки величини накопиченої пружної енергії у зразках вугілля та забезпечити оптимізацію експериментальної процедури, підвищення відтворюваності результатів та вдосконалення раніше запропонованої методики.

Отримані дані поглиблюють уявлення про механохімічні аспекти поведінки вугільної речовини та формують теоретичне підґрунтя для використання накопиченої пружної енергії при оцінці її реакційної здатності та прогнозуванні поведінки в умовах зовнішнього механічного навантаження.

1. А.Ф. Булат, О.П. Круковський, Ю.Ю. Буліч, К.А. Безручко, О.В. Бурчак, Geomechanics as a factor of carbonification transformations at various hierarchical and scale levels, *Геотехнічна механіка*, № 170, 156–164 (2024). <https://doi.org/10.15407/geotm2024.170.156>
2. К.А. Bezruchko, L.I. Pymonenko, O.V. Burchak, V.I. Baranovskyi, O.V. Prykhodchenko, Residual deformations of coal during destruction under pressure, *Геотехнічна механіка*, № 172, 93–104 (2025). <http://www.geotm.dp.ua/index.php/en/collection/460-2025en/geotm-172en/8757-geotm172-09>
3. A. Taboada, K.J. Chang, F. Radjaï, F. Bouchette, Rheology, force transmission, and shear instabilities in frictional granular media from biaxial numerical tests using the contact dynamics method, *J. Geophys. Res.: Solid Earth*, **110**(B9) (2005).
4. K.L. Johnson, Contact mechanics, Cambridge University Press, Cambridge (1987).
5. A. Koynov, F. Romanski, A.M. Cuitiño, Effects of particle size disparity on the compaction behavior of binary mixtures of pharmaceutical powders, *Powder Technology*, **236**, 5–11 (2013).
6. A.F. Bulat, V.L. Bogdanov, V.V. Trachevsky, O.V. Burchak, Yu.A. Serikov, Research of mechanisms and driving forces of the self-organization of the matrices of natural solid hydrocarbons, *Доп. НАН України*, № 3, 26–32 (2021). <https://doi.org/10.15407/dopovid2021.03.026>
7. A.V. Tokar, A.F. Bulat, O.V. Burchak, The quantum-chemical criteria for intermolecular interactions efficiency in complex systems “methane/carbon dioxide – aromatic hydrocarbons” of fossil coal, *Journal of Chemistry and Technologies*, **33**(3), 588–594 (2025). <http://chemistry.dnu.dp.ua/article/view/332701>
8. A. Bulat, O. Burchak, V. Trachevskyi, A. Tokar, Evolution of electron structure of the methane-coal sorption system components and properties, in: A.N. Guz, H. Altenbach, V. Bogdanov, V.M. Nazarenko (eds.), *Advances in Mechanics, Advanced Structured Materials*, vol. 191, Springer, Cham (2023). https://doi.org/10.1007/978-3-031-37313-8_5

Методи стабілізації положення палива в баках космічних ступенів в умовах мікрогравітації

О. Д. Ніколаєв^а, І. Д. Башлій^{1а}, Д. В. Клименко^б

^аІнститут технічної механіки Національної академії наук України та Державного космічного агентства України, Дніпро, Україна

^бГП «КБ «Південне», Дніпро, Україна

¹ bashliyin@gmail.com

Особливістю запропонованого авторами методу стабілізації положення палива в баках космічних ступенів в умовах мікрогравітації, яка необхідна для повторних стабільних запусків двигунів, є урахування нестационарних теплових процесів, сепараційних та поглинаючих газ явищ: абсорбції (процесу поглинання газу або пару з газової суміші рідким абсорбентом з утворенням розчину) та десорбції (процесу виділення газу з рідини). Розроблено новий підхід до теоретичного розрахунку параметрів просторового руху газових утворень у рідкому паливі в умовах мікрогравітації сучасних космічних ступенів. Підхід використовує метод скінченних елементів, метод об'єму рідини та сучасні комп'ютерні засоби, розроблені для скінченно-елементного аналізу. Проведено чисельне моделювання руху рідини в експериментальному зразку сферичного бака в умовах мікрогравітації із штучно створеною зоною нагріву поблизу верхнього днища баку та без неї. Отримані в результаті математичного моделювання параметри руху границі розділу системи «газ – рідина» в циліндричному і сферичному баках задовільно узгоджуються з експериментальними даними. Використання розробленого підходу дозволить підвищити якість проєктування систем живлення та значно скоротити обсяг експериментальних випробувань верхніх та космічних ступенів.

Ключові слова: космічна ракета-носіє, мікрогравітація, багаторазовий запуск двигуна, пасивний етап польоту, метод об'єму рідини, пристрій керування паливом.

Вступ

Для реалізації програмного руху космічного корабля і управління переорієнтацією в умовах мікрогравітації система управління космічної двигунної установки повинна забезпечити кілька пусків і зупинок головних рідинних ракетних двигунів. Під час пасивного польоту космічного ступеня при зупинці двигуна рідке паливо за інерцією рухається до верхньої частини паливного баку, а газ наддуву – в його нижню частину. При цьому в різних елементах рідини відбуваються явища абсорбції та десорбції газу в об'ємі газонасиченого рідкого палива, що в цілому створює потенційну небезпеку для реалізації надійного багаторазового запуску двигуна внаслідок надходження газу наддуву на вхід двигуна. Для виключення можливості попадання газу в двигун при повторному запуску необхідно на етапі проєктування рідинних ракетних двигунних установок космічного ступеня прогнозувати поведінку динамічної системи «газ – рідина», що описує рух рідини і газу в баку при польоті РН в умовах мікрогравітації та розвитку сепараційних явищ в даній системі. Процеси у цій динамічній системі є предметом різнобічного експериментального і теоретичного вивчення, якому присвячені численні публікації [1, 2, 3]. В роботах [4, 5] ці дослідження проводилися для РН CZ-3A та Ariane 5 відповідно, використання двох двигунів малої тяги для осадження палива в баку розглянуто в роботі [6]. Можливості експериментального відпрацювання внутрішньобакових процесів, що потребує відтворення умов мікрогравітації, у більшості випадків обмежені використанням спеціальних «кидкових веж» [4].

Незважаючи на досягнутий прогрес у вивченні динаміки газорідних середовищ у баках РН визначення параметрів руху рідини в баках палива в умовах мікрогравітації є актуальною проблемою, яка потребує вирішення при проектуванні космічних рідинних двигунних установок [7].

1. Підхід до теоретичного розрахунку параметрів руху системи «газ – рідина» в паливних баках сучасних космічних ступенів в умовах мікрогравітації

Розроблено чисельний підхід до теоретичного розрахунку параметрів просторового руху системи «газ – рідина» в паливних баках сучасних космічних ступенів в умовах мікрогравітації. Підхід базується на використанні методу об'єму рідини з урахуванням сил поверхневого натягу та змочування палива, сил опору руху палива, особливостей конструкції паливного баку за допомогою сучасних комп'ютерних інструментів для скінченно-елементного аналізу (Computer Aided Engineering systems) [8].

Розроблена модель, що описує нестационарну течію нестисливої рідини з деформованою вільною поверхнею в баку (k-ε модель турбулентності), включала рівняння нерозривності, моменту кількості руху, рівняння енергії і рівняння руху вільної поверхні рідини, що записані відносно функції C [8], яка характеризує долю рідини в розрахованому об'ємі скінченного елемента в скінченно-елементній моделі баку з рідиною. Ці рівняння в узагальненому вигляді записуються наступним чином [8]:

– рівняння нерозривності

$$\nabla V = 0, \quad (1)$$

– рівняння кількості руху рідини

$$\partial(\rho V)/\partial t + \rho(V \cdot \nabla V)V = -\nabla p + \mu \nabla^2 V + F_s + \rho a_z, \quad (2)$$

– рівняння енергії

$$\partial(\rho E)/\partial t + \nabla(V(\rho E + p)) = \nabla \cdot (k_{eff} \nabla T) + S_h, \quad (3)$$

– рівняння руху вільної поверхні рідини

$$\partial(C)/\partial t + V \cdot \nabla C = 0, \quad (4)$$

де ∇ – оператор Гамільтона; p, μ, F_s – відповідно тиск, в'язкість і сила поверхневого натягу рідини ($F_s = \sigma k \nabla C$); k – середня кривизна поверхні розділу середовищ «рідина – газ» в розрахунковій точці; σ – коефіцієнт поверхневого натягу, що визначається експериментально для конкретної пари «рідина – тверде тіло», a_z – поздовжнє прискорення космічного ступеня РН, T – температура, ρ, V – густина та швидкість кожного контрольного об'єму розрахункової комірки; $E(x, t)$ – функція (повна енергія, внутрішня та кінетична), яка задає температуру в момент часу t в точці з координатою x ; k_{eff} – ефективна теплопровідність, S_h – потужність на одиницю об'єму джерела тепла.

Функція C в рівнянні (4) може приймати наступні значення: $C = 0$ – при відсутності рідкого заповнення в об'ємі скінченного елемента, $C = 1$ – при повному заповненні його об'єму рідиною, $0 < C < 1$ – для проміжних станів.

При формуванні граничних умов встановлюється кут контакту на границі розділу фаз газ – рідина, сили спротиву в забірних пристроях баку, врахування гарячої зони біля верхнього днища баку.

Для отримання більш стійкого розв'язку нестационарна задача у змінних швидкості – тиск розв'язується за допомогою методу Artificial Compressibility у неявній схемі та дискретизації за часом 1-го порядку у програмному комплексі FLUENT. При виконанні розрахунків крок інтегрування системи рівнянь (1) – (4), яка описує рух газу і рідини в баці, покладався рівним 1×10^{-4} с. Загальний час нестационарного розрахунку становив близько 80 с, що достатньо для стабілізації руху газової порожнини, який досліджується.

Запропонований підхід апробований при визначення параметрів руху границі розділу «газ – рідина» в модельному циліндричному баку паливного баку космічного ступеню «Центавр» [4] і в баках сфероподібної форми ДП «КБ «Південне» [9], експериментально досліджених в «кидкових вежах» в умовах мікрогравітації.

2. Чисельне моделювання руху рідини в експериментальному зразку резервуара сферичної форми без урахування та з урахуванням штучно введеної гарячої зони.

Відповідно до літературних джерел фізичні властивості компонентів палива істотно залежить від температури. Це може бути використане для стабілізації розташування газової порожнини в баку космічного ступеня на пасивній ділянці польоту [10]. З використанням підходу проведено чисельне моделювання руху рідини в експериментальному зразку резервуара сферичної форми в різних умовах: без урахування та з урахуванням штучно введеної гарячої зони, розташованої біля верхнього днища баку.

Розглянемо кілька розрахункових випадків руху рідкого палива у криогенному сферичному паливному баку, заповненому хладоном, в умовах мікрогравітації на пасивній ділянці польоту за різної температури та отримані за допомогою запропонованого підходу та рівнянь (1) - (4) розташування поверхні розділу середовищ «рідина – газ» в умовах мікрогравітації і розрахункові розподіли швидкостей (V) та амплітуд тиску (δp) у вузлах скінченних елементів рідкого палива та газу в баку.

Для розрахункового випадку 1 руху палива в умовах мікрогравітації для хладону при $T = -30^\circ\text{C}$, $\sigma = 0,0226$ Н/м, $\mu = 0,00157$ Па·с, $\rho = 1686,7$ кг/м³ без урахування нагріву (див. рис. 1, рис. 2) газова порожнина спускається до нижнього днища баку (момент часу 80 с). Ця газова порожнина може бути небезпечною і призвести до потрапляння недопустимої кількості газу в паливну магістраль.

Для розрахункового випадку 1 (див. рис. 2) амплітуди тиску в газорідинному середовищі в області, розташованій біля нижнього днища баку, $\delta p = 0,08$ Па і швидкість в газорідинному середовищі в цій області $V = 0,0153$ м/с мають достатньо великі значення. Цей факт може призвести до небезпечної ситуації, описаної вище.

Для розрахункового випадку 2 руху палива в умовах мікрогравітації з урахуванням нагріву для хладону (в місці нагріву) при $T = -22^\circ\text{C}$, $\sigma = 0,0217$ Н/м, $\mu = 0,00136$ Па·с, $\rho = 1669,6$ кг/м³ (рис. 3) газова порожнина стабілізується в центрі баку (момент часу 42 с).

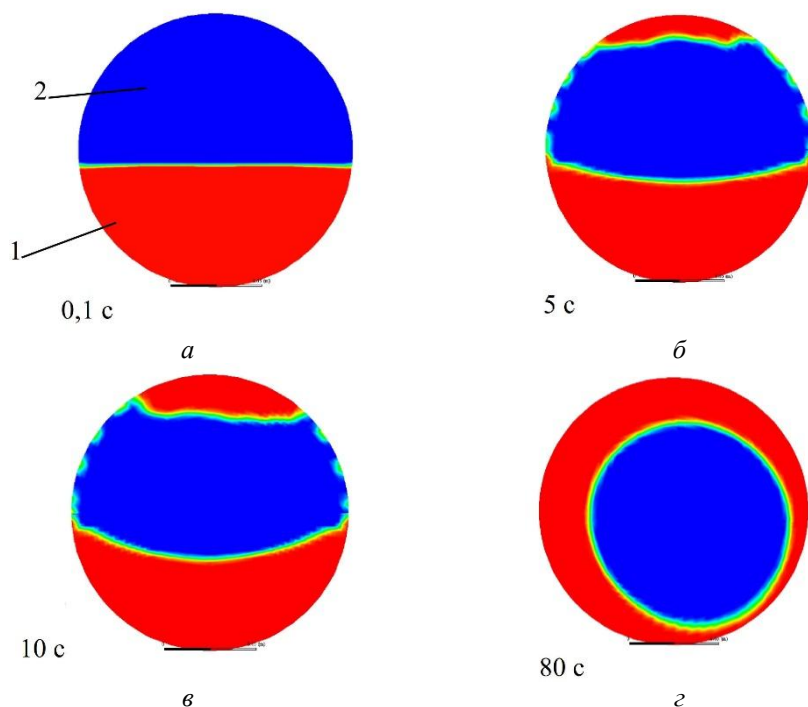


Рис. 1. Процес руху рідкого палива в досліджуваному баку в умовах мікрогравітації для моментів часу: *а* – 0.1 с, *б* – 5 с, *в* – 10 с, *г* – 80 с (випадок 1 для $T = -30^{\circ}\text{C}$). Області, що займають рідина та газ, позначені цифрами 1 і 2 відповідно.

Для розрахункового випадку 2 амплітуди тиску $\delta p = 0,289$ Па і швидкість $V = 0,039$ м/с в газорідинному середовищі в області, розташованій на стінці баку справа і зверху, там де стабілізується газовий міхур, приймають достатньо великі значення. Проте для розрахункового випадку 2 величини амплітуд тиску $\delta p = 0,001$ Па і швидкості $V = 0,001$ м/с в газорідинному середовищі в області, розташованій біля нижнього днища баку, значно менші, ніж величини, отримані для випадку 1. Газова порожнина стабілізується в центрі баку і не виникає небезпечної ситуації, описаної для випадку 1.

Поставлена задача вирішується тим, що з використанням штучно введеної гарячої зони відбувається сепарація компонентів палива від вільних газових включень, що утворюються в компонентах палива в польоті космічного ступеня з працюючим маршовим двигуном і після його виключення при маневруванні ступеня на пасивній ділянці польоту в умовах мікрогравітації в компонентах палива, що переміщується після зупинки маршового двигуна до верхнього днища баку. Ці процеси створюють температурне поле з градієнтом температур, спрямованим в бік верхнього днища, здійснюючи нагрів компонентів палива в зоні, що примикає до нього, до температури, що перевищує температуру компонентів палива в баку, і ініціюючи тим самим виникнення термокапілярного дрейфу вільних газових включень в напрямку градієнта температури в компонентах палива і їх подальшу евакуацію в сукупну газову порожнину, що утворюється.

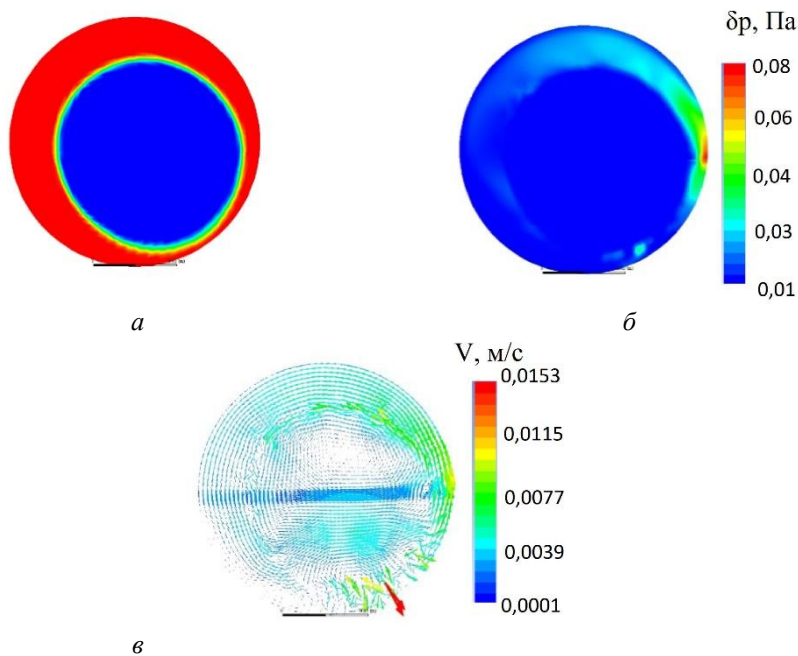


Рис. 2. Розрахункові параметри руху рідкого палива в досліджуваному баку у вузлах скінченних елементів рідкого палива та газу в баку по його поздовжньому перерізу в умовах мікрогравітації для моменту часу 80 с: *а* – процес руху рідкого палива в досліджуваному баку, *б* – розрахункові амплітуди тиску (δp), *в* – розрахункові розподіли швидкостей (V) (випадок 1 для $T = -30^\circ\text{C}$).

Висновки

Запропоновано чисельний підхід до оцінки параметрів руху границі «газ – рідина» в об'ємі паливних баків сучасних космічних ступенів РН в умовах мікрогравітації (протягом часу від моменту зупинки основного РРД космічного ступеня до моменту зупинки РРД).

Виконано чисельне моделювання руху рідини в експериментальному зразку резервуару сферичної форми в умовах мікрогравітації без урахування та з урахуванням гарячої зони, розташованої біля верхнього днища баку. Показано істотне зниження амплітуд тиску і швидкості в газорідинному середовищі в області, розташованій біля нижнього днища баку, з урахуванням гарячої зони, порівняно з амплітудами в газорідинному середовищі в баку, отриманими без урахування гарячої зони. В результаті розрахунків показано, що у випадку урахування гарячої зони газова порожнина стабілізується і не виникає небезпечної ситуації, коли газ потрапляє на вхід у двигун у кількостях, що перевищують допустимі норми. При цьому ураховується явище термодрейфу, яке проявляється в результаті впливу температури на коефіцієнт поверхневого натягу газу в зоні стінки.

Підхід може бути використаний для теоретичного прогнозування динамічної міцності та працездатності двигунних установок космічного ступеня РН в умовах багаторазових пусків-зупинок та програмного руху ступеня РН під час його маневрування в просторі. Застосування розробленого підходу дозволить значно скоротити обсяг експериментальної перевірки проєктованих космічних ступенів.

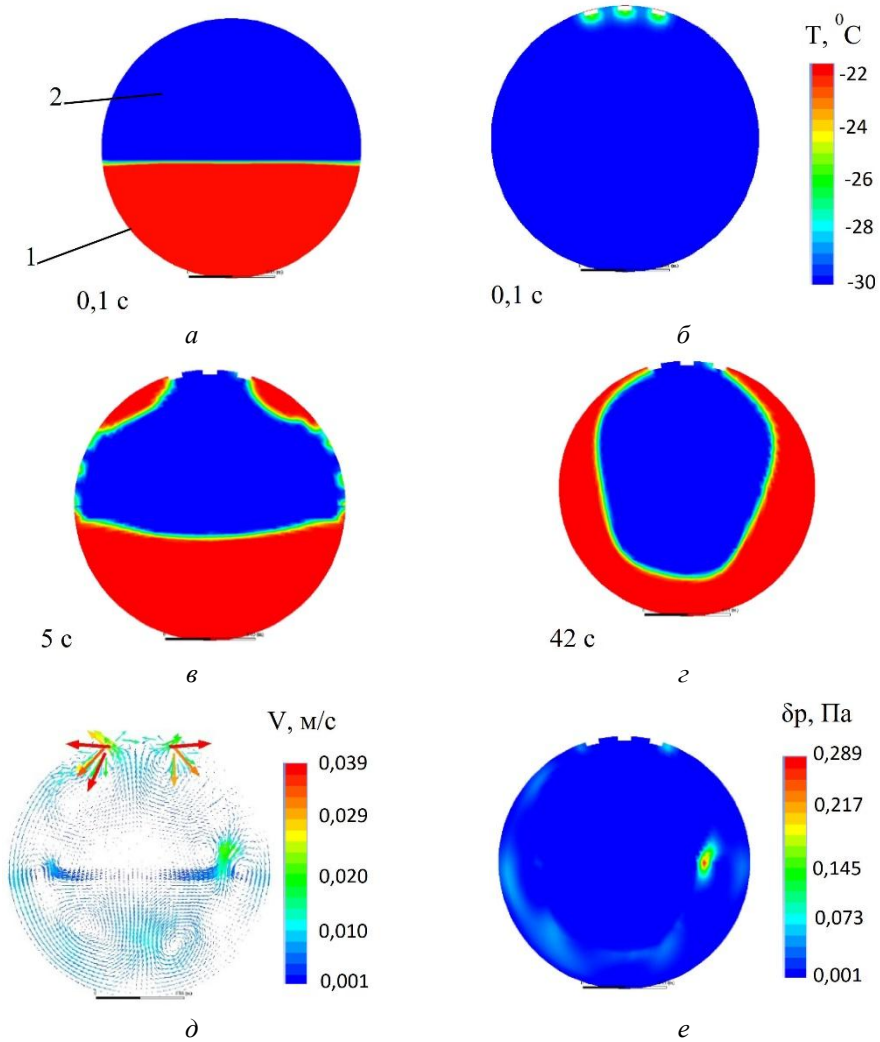


Рис. 3. Розрахункові параметри руху рідкого палива в досліджуваному баку у вузлах скінченних елементів рідкого палива та газу в баку по його поздовжньому перерізу в умовах мікрогравітації: а – процес руху рідкого палива в баку для моменту часу 0.1 с, б – розрахунковий розподіл температури (T) у вузлах скінченних елементів рідкого палива та газу в баку для моменту часу 0.1 с, в – процес руху рідкого палива в баку для моменту часу 5 с, г – процес руху рідкого палива в баку для моменту часу 42 с, д – розрахункові розподіли швидкостей (V), е – розрахункові амплітуди тиску (δp), (випадок 2 для зони нагріву $T = -22^{\circ}\text{C}$). Області, що займають рідина та газ, позначені цифрами 1 і 2 відповідно.

1. O. E. Kashanov, O. V. Degtyarev, O. V. Pylypenko, O. M. Zavoloka, O. D. Nikolayev, M. F. Sviridenko Ensuring operating efficiency of space stages propellant feeding systems in different operating conditions. *66th Astronautical Congress International*, 8832-8838. (2015).

2. E. Ducret, L. Le Moullec, B. Spencer, P. Balaam Propellant management device studies, computational methods and neutral buoyancy tests. *AIAA 28th Joint Propulsion Conference and Exhibit*, 92-3611. (1992).
3. И. Д. Блоха, А. Н. Заволока, А. Д. Николаев, Н. Ф. Свириденко Влияние продольных вибраций космической ступени РН на работоспособность внутрибаковых устройств обеспечения сплошности компонентов топлива в системе питания маршевого двигателя. *Техническая механика*, №2, 65 -74. (2011).
4. LI Zhang-Guo, LIU Qiu-Sheng, LIU Rong, HU Wei, DENG Xin-Yu. Influence of Rayleigh–Taylor Instability on Liquid Propellant Reorientation in a Low-Gravity Environment. *Chinese Physical Society and IOP Publishing Ltd*. Vol.26, No.11, 114701-1-114701-4. (2009). [https://doi.org/ 10.1088/0256-307X/26/11/114701](https://doi.org/10.1088/0256-307X/26/11/114701).
<https://www.doi.org/10.1088/0256-307X/26/11/114701>
5. Ph. Behruzi, M. Michaelis, G. Khimeche Behavior of the Cryogenic Propellant Tanks during the First Flight of the Ariane 5 ESC-A Upper Stage. *42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, 1-10. (2006). <https://doi.org/10.2514/6.2006-5052>
6. И. В. Седых, Д. С. Назаренко, А. Н. Минай, Я. О. Бабийчук Экспериментальное определение времени осаждения топлива в сферическом баке перед повторным включением маршевого двигателя *Системне проєктування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки*, Том XXVII, 136-144 (2019).
7. И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шептун *Ракета как объект управления*, АРТ–Пресс, Днепропетровск (2004).
8. P. Kohnke *Ansys, Inc. Theory Manual* 001369, Twelfth Edition, Canonsburg, (2001)
9. I. V. Sedykh, D. S. Nazarenko, A. N. Minai, Ya. O. Babiychuk, Experimental determination of the fuel sedimentation time in a spherical tank before restarting the main engine. *System design and analysis of the characteristics of aerospace technology*. 27, 136—144. (2019).
10. S. Gregory Mungas, *Thermal phase separation*, FIRESTAR ENGINEERING, US 2013/0048097, F16L 53/00, 28.02.2013. (2013).

Оцінка граничного стану валопроводів парових турбін при короткому замиканні на турбогенераторі

А.П. Бовсуновський^{а1}, М.В. Бородій^б, О.А. Бовсуновський^б

^аІнститут атомної та теплової енергетики НТУУ КІП ім. І. Сікорського, Київ, Україна

^бІнститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України, Київ, Україна

¹ apbovsunovsky@gmail.com

Метою дослідження була розробка методу визначення граничного стану вала парової турбіни з втомними пошкодженнями типу тріщини за динамічного навантаження внаслідок короткого замикання на турбогенераторі. Запропоновано метод оцінки критично небезпечних розмірів кільцевої, поперечної та поздовжньої тріщини, при яких коротке замикання на турбогенераторі призводить до руйнування вала турбіни, тобто до досягнення його граничного стану. Оцінка критично небезпечних розмірів тріщин базувалася на визначенні динамічних моментів, що виникають у найбільш напружених ділянках вузла вала турбіни внаслідок короткого замикання на турбогенераторі, амплітуд напружень у цих ділянках та коефіцієнтів інтенсивності напружень у тріщині того чи іншого типу, розташованій на цих ділянках.

Ключові слова: вал турбіни, крутильні коливання, коротке замикання, критичний розмір тріщини, умови руйнування.

Вступ. Коротке замикання (КЗ) на турбогенераторі є аварійним режимом його роботи, при якому виникає електричне з'єднання між фазами обмотки статора або між фазою та корпусом. Одним з його наслідків є виникнення потужного електродинамічного моменту, який за певних умов [1], однією з яких є розвинуті тріщини втомі у роторах турбіни, може спричинити руйнування як турбогенератора, так і турбіни [2, 3].

Наслідком КЗ на турбогенераторі є поява інтенсивного знакозмінного електромагнітного моменту в результаті взаємодії магнітного потоку, зумовленого аперіодичними струмами статора, з постійним струмом в обмотці збудження. Розрахунок електромагнітних моментів, що діють на ротор турбогенератора ТГВ-200 при КЗ на турбогенераторі, продемонстрував, що вони можуть перевищувати номінальний крутний момент на валопроводі турбіни до 8 разів [3]. Збереження цілісності конструкції за навантаження такої інтенсивності є проблематичним навіть за відсутності тріщини. Очевидно, що наявність тріщини у роторах турбіни суттєво зменшує здатність валопровода турбіни витримати динамічне навантаження такого типу.

Вплив двофазного та трифазного КЗ на турбогенераторі на інтенсивність крутильних коливань валопроводів турбін різного типу і потужності досліджено в роботах [4, 5]. Водночас, питання щодо можливості збереження цілісності валопровода турбіни з тріщиною у разі КЗ на турбогенераторі залишається відкритим.

Вісім кругових тріщин різної глибини (від 1,5 до 12 мм при максимально допустимій глибині 18 мм) були діагностовані у роторі середнього тиску турбіни К-200-130, яка мала напрацювання 297 тис. годин. Тріщини локалізувалися переважно в термічних канавках, тобто в зонах концентрації напружень, [6].

Кругові тріщини також були виявлені в роторах парових турбін різної потужності [7, 8]. Одна з них за десять років експлуатації турбоагрегату досягла приблизно 75% поперечного перерізу ротора, не призвівши до його руйнування, що залишає відкритим питання про розмір критично небезпечної тріщини.

Розвиток тріщини у конструктивних елементах при крученні супроводжується взаємодією її берегів, що за даними [9] зменшує коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН) при крученні. Водночас, результати дослідження [10] продемонстрували незначний вплив нерівностей на швидкість росту тріщини.

Метою роботи є розробка методу оцінки параметрів кругової, поперечної або поздовжньої тріщини, які є критично небезпечними для цілісності валів парових турбін різного типу і потужності у разі КЗ на турбогенераторі.

1. Динамічне навантаження валопровода турбіни через КЗ на турбогенераторі. В роботі використані результати розрахунків крутних моментів у найбільш навантажених ділянках валопроводів парових турбін К-220-44-2М (потужністю 220 МВт), К-325-23,5 (потужністю 325 МВт) і К-1100-60/1500-2М (потужністю 1100 МВт), спричинених КЗ на турбогенераторі [4, 5]. Розрахункові схеми валопроводів турбін наведені на рис. 1, де РВТ, РСТ і РНТ відповідно ротор високого, середнього і низького тиску; ТГ – турбогенератор.

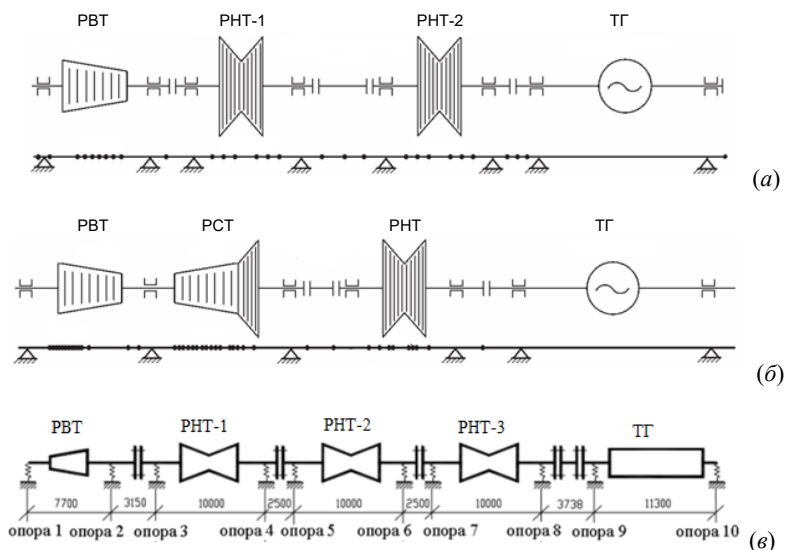


Рис. 1. Розрахункова схема валопроводів турбін К-220-44-2М (а), К-325-23,5 (б) і К-1100-60/1500-2М (в).

Дослідження розвитку тріщини було виконано для ділянок валопроводів, де виникають найбільші напруження при КЗ на турбогенераторі. Для всіх турбін це ділянка між РНТ і турбогенератором. В табл. 1 наведені амплітуди крутильних коливань на цій ділянці за різної тривалості КЗ. У цих таблицях t_{sc2} та t_{sc3} – тривалість двофазного та трифазного КЗ відповідно; N – номер цикла коливань.

Таблиця 1. Амплітудні значення напружень на валопроводах турбін між РНТ та турбогенератором

N	К-220-44-2М		К-325-23,5		К-1100-60/1500-2М
	$t_{sc2}=0,1$ с	$t_{sc2}=0,11$ с	$t_{sc2}=0,05$ с	$t_{sc3}=0,07$ с	$t_{sc2}=0,1$ с
	τ_N , МПа	τ_N , МПа	τ_N , МПа	τ_N , МПа	τ_N , МПа
1	316,2	315,7	388,0	325,1	363,3
2	270,6	269,6	295,9	168,7	106,9
3	247,8	240,8	189,2	24,7	85,5
4	22,8	21,4	200,8	222,2	150,0
5	101,1	96,3	305,6	168,7	128,2
6	220,4	203,3	339,5	325,1	213,7
7	221,7	502,9	281,3	300,4	21,4
8	211,9	436,6	176,5	201,6	106,9
9	218,4	407,7		139,9	64,1
10	208,6	461,2		197,5	
11		458,0			

2. Алгоритм розрахунку КІН. Оскільки в роторах турбін в процесі експлуатації виникають тріщини різного типу, в роботі розглядалися кругова, поперечна та поздовжня тріщини (рис. 2).

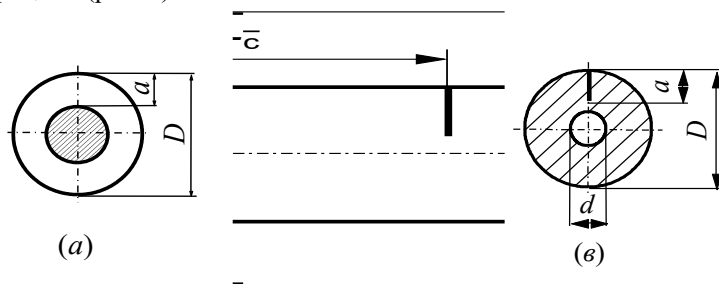


Рис. 2. Поперечний переріз вала з круговою (а), поперечною (б) та поздовжньою (в) тріщинами.

Для розрахунку КІН у круговій тріщині при крученні використовували рівняння [11]

$$K_{III} = \frac{\tau_N}{\beta^3} g(\beta) \sqrt{0,5\pi D \beta (1 - \beta)}, \quad (1)$$

де τ_N – номінальні напруження на N тому циклі коливань; τ_N/β^3 – напруження в перерізі з тріщиною; $g(\beta) = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{8}\beta^2 + \frac{5}{16}\beta^3 + \frac{35}{128}\beta^4 + 0,208\beta^5 \right)$; $\beta = 1 - 2a/D$; a – глибина тріщини; D – діаметр перерізу (рис. 2, а).

У випадку крайової поперечної тріщини з напівеліптичним фронтом (рис. 2, б) КІН визначався за рівнянням [12]

$$K_{III} = F_{III} \tau_N \sqrt{\pi a}. \quad (2)$$

При $a/b=0,6$, функція F_{III} в точках А і В фронту тріщини розраховувалась відповідно до наступних рівнянь, де $\gamma=a/D$:

$$F_{III} = 0,0144 + 2,77779\gamma - 0,41071\gamma^2;$$

$$F_{III} = 0,05895 + 6,1523\gamma - 20,15714\gamma^2 + 18,72222\gamma^3.$$

Для поздовжньої тріщини (рис. 2, в) КІН визначався за рівнянням [13]

$$K_{III} = F_{III} \tau_N \frac{\pi(D^4 - d^4)}{2\sqrt{2}D^3\sqrt{D}}, \quad (3)$$

де $F_{III} = 0.16923 + 1.86156\lambda - 2.88482\lambda^2 + 2.16221\lambda^3$; $\lambda = 2a/(D-d) < 1$; d – діаметр технологічного каналу.

3. Алгоритм розрахунку критичного розміру тріщини. Алгоритм розрахунку процесу росту тріщини внаслідок крутильних коливань валопровода є модифікацією алгоритму, представленому в [14], для оцінки критичного розміру тріщини, тобто такого, який спричиняє руйнування валопровода через КЗ на турбогенераторі.

Для кожного циклу коливань N розраховується КІН згідно з рівняннями (1-3). Це значення КІН (K_{III_n}) порівнюється з пороговим значенням ($K_{III_{th}}$) для роторної сталі. Якщо $K_{III_n} < K_{III_{th}}$, тріщина не росте. Якщо $K_{III_n} \geq K_{III_{th}}$, тріщина зростає на величину da_1 і набуває значення

$$a_1 = a_0 + da_1, \quad (4)$$

де a_0 – початкова глибина тріщини.

При наступному амплітудному значенні напруження, при якому виконується умова росту тріщини, розрахунок виконується з урахуванням зміненого розміру тріщини

$$a_2 = a_1 + da_2. \quad (5)$$

Цикл розрахунків продовжуються до виконання умови $\Delta K_{III} \geq \Delta K_{IIIc}$ (ΔK_{IIIc} – в'язкість руйнування), тобто коли матеріал досягає свого граничного стану, який безпосередньо передуює руйнуванню. При цьому фіксується кінцевий розмір тріщини a_{cr} . Якщо умова $\Delta K_{III} \geq \Delta K_{IIIc}$ для заданого значення a_0 не виконується, початковий розмір тріщини збільшується на крок обчислень, і розрахунки повторюються. Зрештою, знаходиться мінімальне значення початкової глибини тріщини, при якому КЗ на турбогенераторі призводить до руйнування ротора.

Для розрахунку росту тріщини було використано рівняння Періса [15]

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_{III})^m, \quad (7)$$

де C і m – емпіричні параметри; ΔK_{III} – розмах КІН.

За відсутності кінетичної діаграми росту тріщини при циклічному крученні при високих температурах для сталі 25Х1МФА у подальших розрахунках була використана діаграма розвитку тріщини нормального відриву у цій сталі за температури 550°C [16]. Вона була апроксимована трьома рівняннями Періса для відповідних діапазонів КІН (табл. 2). За цих параметрів C і m тріщина вимірюється в мм.

Таблиця 2. Коефіцієнти рівняння Періса

$K_{I_{max}}, \text{ МПа м}^{1/2}$	C	m
≤ 30	$1,8744 \cdot 10^{-17}$	7,112
30...48	$1,9661 \cdot 10^{-11}$	3,036
> 48	$9,1296 \cdot 10^{-23}$	9,777

Залежність між КІН для тріщини нормального відриву і поперечного зсуву була встановлена експериментально [17], а саме

$$K_{III} = K_I \sqrt{\frac{1-\nu}{1+\nu}}, \quad (8)$$

де ν - коефіцієнт Пуассона. Для сталі 25Х1МФА $\nu=0,27$, отже $K_{III}=0,76K_I$.

Порогове значення КІН було прийнято на рівні $K_{IIIth}=8 \text{ МПа м}^{1/2}$, а критичне значення КІН через відсутність даних для роторної сталі та через значний вплив температури на цю характеристику варіювалося в діапазоні $K_{IIIc}=60-150 \text{ МПа м}^{1/2}$.

4. Оцінка критичного розміру тріщини. На рис. 3-5 показано критичні розміри кругової, поперечної та поздовжньої тріщини, розраховані за алгоритмом з попереднього розділу, за яких досягається критичне значення КІН під час КЗ на турбогенераторі в залежності від в'язкості руйнування роторної сталі.

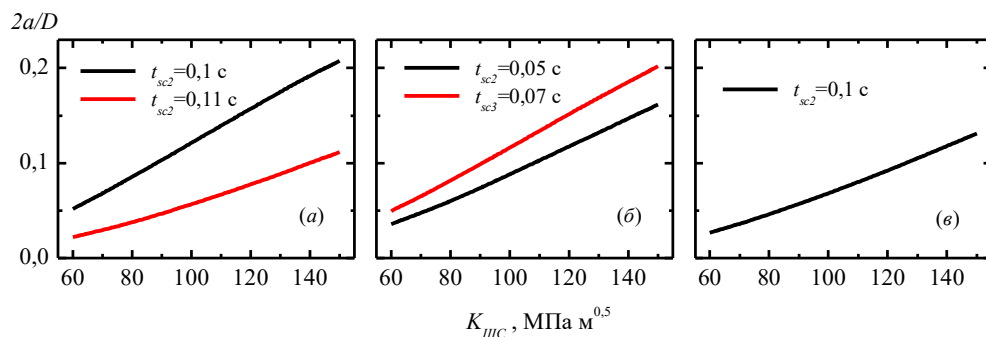


Рис. 3. Залежність критичного розміру кругової тріщини у валу турбіни К-200-44-2М (а) та К-325-23,5 (б) і К-1100-60/1500-2М (г) від в'язкості руйнування роторної сталі.

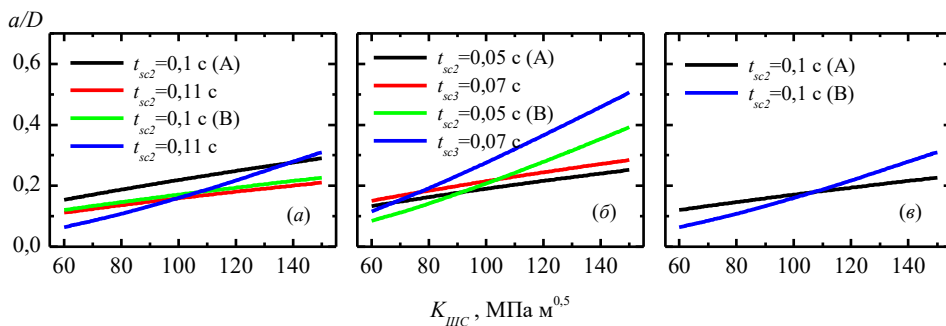


Рис. 4. Залежність критичного розміру поперечної тріщини у валу турбіни К-200-44-2М (а) та К-325-23,5 (б) і К-1100-60/1500-2М (г) від в'язкості руйнування роторної сталі.

Критичний розмір відповідних тріщин в абсолютних та відносних значеннях наведено в таблицях 3-5. Як видно, зі збільшенням в'язкості руйнування у 2,5 рази критичний розмір кругової тріщини у валу турбіни К-200-44-2М збільшується в 4,0 ($t_{sc2}=0,1 \text{ c}$) та 5,1 ($t_{sc2}=0,11 \text{ c}$) рази, поперечної – в 2,4 ($t_{sc2}=0,1 \text{ c}$) та 4,0 ($t_{sc2}=0,11 \text{ c}$) рази, а поздовжньої – в 9,0 ($t_{sc2}=0,1 \text{ c}$) та 131,0 ($t_{sc2}=0,11 \text{ c}$) рази. За тієї ж умови критичний розмір кругової тріщини у валу турбіни К-325-23,5 збільшується в 4,5 ($t_{sc2}=0,05 \text{ c}$) та 4,1 ($t_{sc3}=0,07 \text{ c}$) рази, поперечної тріщини – в 3,0 ($t_{sc2}=0,05 \text{ c}$) та 2,4

($t_{sc3}=0,07$ с) рази, а поздовжньої тріщини – в 11,6 ($t_{sc2}=0,05$ с) та 9,3 ($t_{sc3}=0,07$ с) рази. Небезпечний розмір кільцевої тріщини у валу турбіни К-1100-60/1500-2М збільшується у 4,9 рази, поперечної – у 3,6 раз, радіальної – у 21 раз.

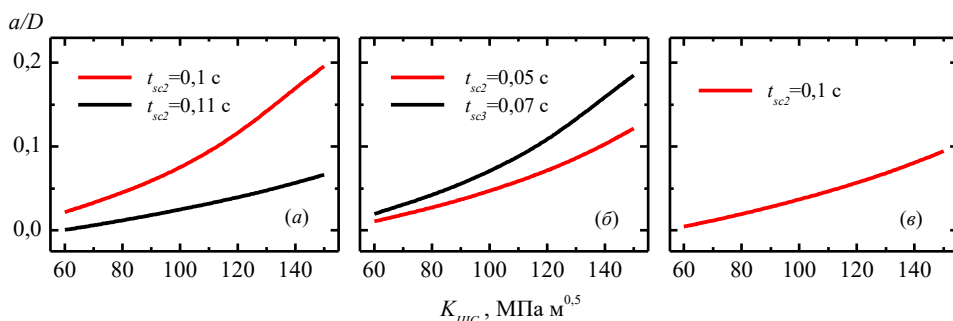


Рис. 5. Залежність критичного розміру поздовжньої тріщини у валу турбіни К-200-44-2М (а) та К-325-23,5 (б) і К-1100-60/1500-2М (в) від в'язкості руйнування роторної сталі.

Отже, критичний розмір всіх досліджених видів тріщини, особливо поздовжньої, суттєво залежить від значення в'язкості руйнування, що робить критично важливим визначення цієї характеристики для сталі ротора в реальних умовах експлуатації турбіни. Результати представлених досліджень дозволяють виконати консервативну оцінку небезпечного розміру тріщини, яка спирається на нижню границю дослідженого діапазона значень в'язкості руйнування роторної сталі.

Таблиця 3. Критичний розмір кругової тріщини

Тип турбіни	t_{sc2} , с	t_{sc3} , с	a_{cr} , мм	$2a_{cr}/D$
К-200-44-2М	0,1		10,4...41,5	0,052...0,208
	0,11		4,4...22,3	0,022...0,112
К-325-23,5	0,05	0,07	7,2...32,3	0,036...0,161
			9,9...40,4	0,050...0,202
К-1100-60/1500-2М	0,1		8,3...40,4	0,027...0,131

Таблиця 4. Критичний розмір поперечної тріщини

Тип турбіни	t_{sc2} , с	t_{sc3} , с	a_{cr} , мм	a/D
К-200-44-2М	0,1		48,9...116,2	0,122...0,291
	0,11		20,9...84,3	0,052...0,211
К-325-23,5	0,05	0,07	33,8...100,2	0,085...0,252
			46,6...113,9	0,117...0,285
К-1100-60/1500-2М	0,1		39,4...140,3	0,064...0,226

Таблиця 5. Критичний розмір поздовжньої тріщини

Тип турбіни	t_{sc2} , с	t_{sc3} , с	a , мм	a/D
К-200-44-2М	0,1		8,7...78,4	0,022...0,196
	0,11		0,2...26,2	0,0005...0,066
К-325-23,5	0,05	0,07	4,2...48,7	0,011...0,122
			8,0...74,2	0,020...0,185
К-1100-60/1500-2М	0,1		2,8...58,6	0,005...0,094

З огляду на наведені вище результати, найбільш небезпечною для цілісності вала

турбіни у разі КЗ на турбогенераторі є поздовжня тріщина. Непрямим підтвердженням цього висновку є катастрофічне руйнування ротора середнього тиску парової турбіни в місті Галатин (США) [1], який стався в результаті тривалого розвитку поздовжньої тріщини за умови циклічного кручення. Саме такі умови навантаження вала парової турбіни періодично виникають під час нештатних режимів роботи турбогенератора, до яких відносяться КЗ на турбогенераторі і підключення турбогенератора до мережі з неточною синхронізацією. Останні мають місце практично при кожному пуску турбіни, кількість яких перевищує 2000 протягом терміну служби турбіни.

Розмір критично небезпечної кругової та поперечної тріщини дещо більший, ніж поздовжньої. Особливістю поперечної тріщини є складніший розподіл КІН вздовж фронту. Тому оцінка критичного розміру тріщини була проведена на основі розрахунків КІН у точках А та В фронту тріщини (рис. 4). На нижньому кінці розглянутого діапазону в'язкості руйнування розмір тріщини визначається КІН у точці В, а на вищому кінці – КІН у точці А, тобто за умови, що в цих точках досягається його найбільше з двох значення.

Інтенсивність крутильних коливань вала і, як наслідок, критичний розмір тріщини суттєво залежать від тривалості і типу КЗ. Збільшення тривалості двофазного КЗ лише на 0,01 с зменшує критичний розмір кругової тріщини в 1,9...2,4 рази, поперечної тріщини – в 1,4...2,3 рази, а поздовжньої – у 3,0...43,5 рази. Пояснення причини впливу тривалості КЗ на інтенсивність коливань вала можна знайти в [1]. Приклад турбіни К-325-23,5 вказує на більшу небезпеку двофазного короткого замикання. Водночас, руйнування аналогічної турбіни потужністю 300 МВт [1] стався в результаті трифазного КЗ. З огляду на це при оцінці критичного розміру тріщини варто враховувати найгірший сценарій впливу КЗ на інтенсивність коливань вала.

Висновки. КЗ на турбогенераторі зумовлює інтенсивні крутильні коливання вала турбіни, які за наявності навіть невеликої тріщини можуть призвести до руйнування вала. Забезпечення безпечної роботи турбіни вимагає своєчасного виявлення тріщин докритичного розміру. Запропоновано метод оцінки критичного розміру кругової, поперечної та поздовжньої тріщини, за якої КЗ на турбогенераторі призведе до руйнування вала турбіни. Метод застосовано для визначення умов руйнування вала парових турбін різного типу і потужності. Критичні розміри трьох видів тріщини були визначені в широкому діапазоні в'язкості руйнування сталі ротора через невизначеність цієї характеристики в умовах циклічного кручення та різної температури. Підвищення точності прогнозування умов руйнування вала парової турбіни за наявності в ньому тріщини можливе за умови визначення в'язкості руйнування сталі ротора при циклічному крученні і відповідній температурі.

1. A.P. Bovsunovskii, O.Yu. Chernousenko, E.V. Shtefan, D.A. Bashta, Fatigue damage and failure of steam turbine rotors by torsional vibrations, *Strength Mater*, **42**, 108–113 (2010). <https://doi.org/10.1007/s11223-010-9196-2>
2. N.G. Shul'zhenko, P.P. Gontarovskii, N.G. Garmash, N.N. Grishyn, Torsional vibrations and damageability of turboset shaftings under extraordinary generator loading, *Strength Mater*, **47**, 227–234 (2015). <https://doi.org/10.1007/s11223-015-9652-0>
3. В.П. Куєвда, Є.В. Штефан, Ю.В. Куєвда, Д.А. Башта, Визначення динамічних крутних моментів, що діють на ротор турбогенератора ТГВ-200 при трифазних

- коротких замиканнях. *Енергетика та електрифікація*, № 8, 14–20 (2011).
4. Н.Г. Гармаш, Дослідження напруженого стану валопроводів турбін при коротких замиканнях. *Вісник НТУ «ХПІ»*. Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування, №15(1124), 141–145 (2015).
5. М.М. Гришин, Б.П. Зайцев, О.К. Морачковський, Ю.Г. Пашенко, О.Г. Кантор, Динаміка системи роторів турбоагрегату потужністю 1100 МВт. *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування, № 3(1328), 55–60 (2019). <https://doi.org/10.20998/2078-774X.2019.03.08>
6. О.Ю. Черноусенко, Д.В. Риндюк, В.А. Пешко, Тепловий та напружений стан ротора середнього тиску енергоблоку № 11 Бурштинської ТЕС. *Вісник НТУ «ХПІ»: Серія “Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування”*, № 1–2, 5–14 (2022). <https://doi.org/10.20998/2078-774X.2022.01.01>
7. Majid Yadavar Nikraves, Mojtaba Meidan Sharaf, Failure of a steam turbine rotor due to circumferential crack growth influenced by temperature and steady torsion. *Eng. Fail. Anal.*, **66**, 296–311, (2016). <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2016.03.020>
8. S. Barella, M. Bellogini, M. Boniardi, S. Cincera, Failure analysis of a steam turbine rotor *Eng. Fail. Anal.*, **18**, 1511–1519, (2011). <https://doi.org/10.1016/j.engfailanal.2011.05.006>
9. A. Vaziri, H. Nayeib-Hashemi, The effect of crack surface interaction on the stress intensity factor in Mode III crack growth in round shafts. *Eng. Fract. Mech.*, **72**, 617–629 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2004.03.014>
10. Sungcheol Park, Yuya Tanaka, Saburo Okazaki, Yusuke Funakoshi, Hideto Kawashima, Hisao Matsunaga, Role of grain boundaries and precipitates in small, fatigue crack-growth resistance of additively-manufactured, Ni-based superalloy 718 under torsional cyclic loading. *Mater. Lett.*, **350**, 134844 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.matlet.2023.134844>
11. H. Tada, P.C. Paris, G.R. Irwin, The stress analysis of crack handbook. 3rd ed. ASME Press (2000).
12. A.E. Ismail, A.K. Ariffin, S. Abdullah, M.J. Ghazali, R. Daud, Mode III stress intensity factors of surface crack in round bars. *Adv. Mater. Research*, **214**, 192–196 (2011). <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.214.192>
13. Stress intensity factors handbook, Volum II, Y. Murakami (editor-in-chief), The Society of Materials Sci., Japan and Pergamon Press (1987).
14. A. Bovsunovsky, E. Shtefan, V. Peshko, Modeling of the circumferential crack growth under torsional vibrations of steam turbine shafting. *Theor. Appl. Fract. Mech.*, **125**, 103881 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2023.103881>
15. D. Broek, The practical use of fracture mechanics. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London (1988).
16. V. Shlyannikov, D. Kosov, D. Fedorenkov, Xian-Chen Zhang, Shan-Tung Tu, Size effect in creep–fatigue crack growth interaction in P2M steel. *Fatig. Fract. Eng. Mater. Struct.*, **44**, 3301–3319 (2021). <https://doi.org/10.1111/ffe.13557>
17. M.R.M. Aliha, A. Bahmani, Sh. Akhondi, Determination of mode III fracture toughness for different materials using a new designed test configuration. *Mater. & Des.*, **86**, 863–871 (2015). <http://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.08.033>

Визначення деформацій осьової повзучості в тонкостінних трубчастих елементах із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану

Я.В. Павлюк

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

email: creep@inmech.kiev.ua

Розв'язано та експериментально апробовано задачу розрахунку деформацій осьової повзучості тонкостінних трубчастих елементів із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу та комбінованого навантаження розтягом із скрученням. Розв'язок ґрунтується на використанні моделі в'язкопружності у формі пропорційності девіаторів. Ядра повзучості задаються дробово-експериментальними функціями. Розраховано деформації повздовжньої (осьової) повзучості тонкостінних трубчастих елементів із поліетилену високої щільності за умов одновісного розтягу та комбінованої дії постійних нормальних напружень розтягу та постійних дотичних напружень кручення

Ключові слова: тонкостінні трубчасті елементи, лінійні в'язкопружні матеріали, одновісний розтяг, розтяг із крученням.

Вступ

В процесі експлуатації полімери і композити в більшості елементів конструкцій деформуються і руйнуються при складному напруженому стані і складних режимах навантаження. При цьому необхідно мати на увазі, що у більшості практично важливих випадків (трубопроводи, посудин високого тиску та інші) деформування в'язкопружних матеріалів вимагає врахування спадкових ефектів [1,2]. Особливо актуальними є задачі повзучості і релаксації напружень, розв'язок яких суттєво залежить від вибору адекватних реальним процесам моделей механічної поведінки і методів визначення характеристик механічних властивостей полімерних матеріалів.

У даній роботі задача розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов розтягу із крученням розв'язується на основі моделі повзучості, що побудована виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів.

1. Постановка задачі. Вихідні співвідношення

Розглядається усталена повзучість тонкостінних трубчастих елементів круглого поперечного перерізу (рис. 1,а) з діаметром серединної поверхні d_{cp} й товщиною стінки h з лінійно-в'язкопружних матеріалів. Трубчасті елементи навантажуються постійним за часом осьовим розтягуючим зусиллям N та крутильним моментом M_t . Під сталою повзучістю розуміється повзучість за умов постійних напружень.

Напружений стан тонкостінного трубчастого елемента двовісний (рис. 1,б), однорідний ($h \ll d_{cp}$) та статично визначений. Нормальна σ_{xx} та дотична τ_{xy} компоненти тензора напружень розраховуються виходячи з рівнянь рівноваги, так що

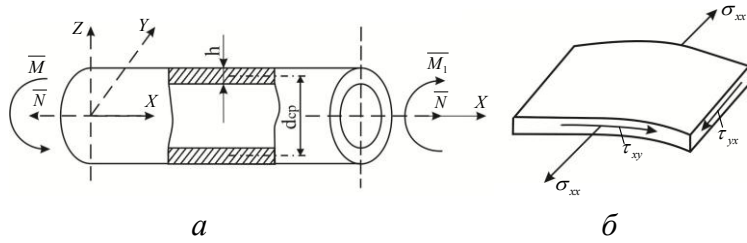


Рис. 1

$$\sigma_{xx} = \frac{N}{\pi d_{\text{ср}} h}; \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{2M_t}{\pi d_{\text{ср}}^2 h}. \quad (1.1)$$

Визначальні рівняння лінійної теорії в'язкопружності за умов складного напруженого стану, що задає залежність між компонентами тензорів деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$, тензорів напружень σ_{ij} та часом t , записується виходячи з гіпотези пропорційності девіаторів у вигляді [3]

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i(t, \sigma_i)}{\sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} \sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_v(t); & (i, j = 1, 3); \\ \varepsilon_i(\sigma_i, t) = \frac{2(1+\nu_0)}{3E} \left(\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right); \\ \varepsilon_v(\sigma_0, t) = \frac{3(1-2\nu_0)}{E} \left(\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right), \end{cases} \quad (1.2)$$

де $\varepsilon_v(t)$ і $\varepsilon_i(t, \sigma_i)$ – об'ємна деформація та інтенсивність деформацій повзучості; $\sigma_0(t)$ і $\sigma_i(t)$ – середнє напруження та інтенсивність напружень; $K_i(t-\tau)$ та $K_v(t-\tau)$ – ядра інтенсивності деформацій повзучості та об'ємної повзучості; E – модуль пружності; ν_0 – коефіцієнт Пуассона; λ_i , λ_v – реологічні параметри; δ_{ij} – одинична функція Кронекера.

Для компонентів тензора деформацій повзучості $\varepsilon_{ij}(t)$ зі спільного розгляду рівнянь, що входять до (1.2), можна також записати

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = \frac{(1+\nu_0)}{E} \frac{1}{\sigma_i(t)} \left[\sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t-\tau) \sigma_i(\tau) d\tau \right] & \left[\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij} (\sigma_0(t)) \right] + \\ + \frac{(1-2\nu_0)}{E} \left[\sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t-\tau) \sigma_0(\tau) d\tau \right]; & \quad (i, j = \overline{1,3}), \end{aligned} \quad (1.3)$$

що дозволяє розраховувати значення деформацій повзучості при різних комбінаціях нормальних та дотичних напружень.

Ядра повзучості $K_i(t-\tau)$ й $K_v(t-\tau)$ в (1.2) задаються дробово-експоненціальними функціями [3-5], так що

$$K_i(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_i}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_i)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_i)]} \quad (1.4)$$

та відповідно

$$K_v(t-\tau) = \frac{1}{(t-\tau)^{-\alpha_v}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha_v)}}{\Gamma[(1+n)(1+\alpha_v)]}. \quad (1.5)$$

Тут α_i , β_i і α_v , β_v – параметри ядер інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості; $\Gamma[\cdot]$ – гамма-функція Ейлера.

Задача полягає у визначенні параметрів ядер інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів та в розв'язку задач розрахунку деформацій повздовжньої (осьової) повзучості тонкостінних трубчастих елементів із поліетилену високої щільності [6] за умов одновісного розтягу та комбінованої дії постійних нормальних напружень розтягу та постійних дотичних напружень кручення.

2. Матеріал трубчастих елементів. Матеріальні функції та константи

Розв'язок задач повзучості елементів конструкцій із лінійно-в'язкопружних матеріалів з використанням системи визначальних рівнянь (1.3) передбачає обґрунтування лінійності в'язкопружних властивостей матеріалів, визначення пружних постійних E і ν_0 та визначення параметрів ядер інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$ та об'ємної повзучості $K_v(t)$.

2.1. Матеріал трубчастих елементів. Базові експериментальні дані

Як матеріал для трубчастих елементів обрано поліетилен високої, а у якості базових експериментальних даних розглядаються криві поздовжньої та поперечної повзучості за умов одновісного розтягу та криві зсувної повзучості за умов чистого кручення. Експериментальні дані запозичені відповідно з [6].

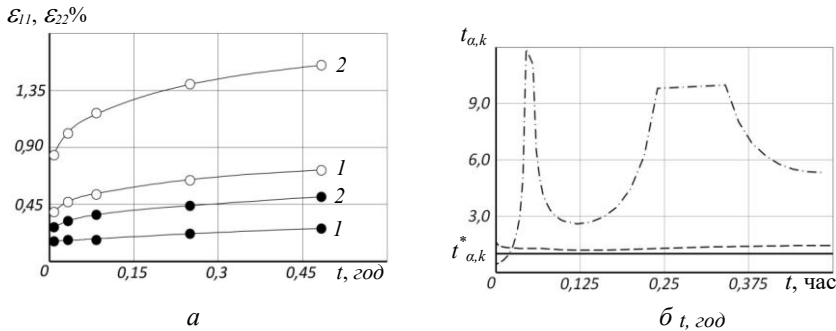


Рис. 2

На рис. 2,а наведено експериментальні криві поздовжньої (○) та поперечної (●) повзучості поліетилену високої щільності за умов одновісного розтягу напруженнями $\sigma_{11} = 2,5$ (1) та 5,0 (2) МПа. Лініями нанесена апроксимація експериментальних даних згладжуючими кубічними сплайнами. Методика побудови згладжуючих сплайн-апроксимацій експериментальних даних з повзучості викладена в роботі [6].

2.2. Обґрунтування області лінійності в'язкопружних властивостей матеріалів трубчастих елементів

Вважається [3-5], що матеріал є лінійно-в'язкопружним у заданій області напружень $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ та $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ з похибкою δ та імовірністю p , якщо для кожної області напружень виконується умова

$$t_{\alpha,k} = \frac{\delta \bar{J}(t_j) \sqrt{n}}{S_J(t_j)} \geq t_{\alpha,k}^*, \quad (2.1)$$

де $t_{\alpha,k}$, $t_{\alpha,k}^*$ – розрахункове та критичне (табличне) значення квантиля статистики; $\bar{J}(t_j)$ – вибіркове середнє значення функції повзучості $J(t_j)$; $S_J(t_j)$ – вибіркове середнє квадратичне відхилення функції повзучості $\bar{J}(t_j)$; m – число часових інтервалів розбивки експериментальних кривих повзучості та відповідних їм функцій повзучості; n – обсяг вибірки (число функцій повзучості).

Методика побудови та експериментальні значення функцій повзучості $J(t_j)$ поліетилену високої щільності, а також методика визначення величин $\bar{J}(t_j)$ і $S_J(t_j)$ та значення величин $\bar{J}(t_j)$ наведені в [5].

На рис.2, б наведено розрахункові $t_{\alpha,k}$ та табличні $t_{\alpha,k}^*$ значення квантиля статистики для поздовжньої, поперечної (б) повзучості поліетилену високої щільності. Розрахункові значення квантиля статистики $t_{\alpha,k}$ для поздовжньої та зсувної повзучості нанесено штриховими лініями, а для поперечної повзучості – штрихпунктирною лінією. Табличні значення квантиля статистики $t_{\alpha,k}^*$ нанесено суцільними лініями. Значення величини $t_{\alpha,k}^*$ визначалися згідно таблиць, що наведені в [5].

У цілому, як це свідчать наведені на рис.2, б дані поліетилену високої щільності є при заданих рівнях напружень із похибкою $\pm 7,5\%$ лінійно-в'язкопружними матеріалами.

2.3. Пружні постійні

Розв'язок задач повзучості елементів конструкцій з лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану із використанням визначальних рівнянь (1.2) припускає визначення пружних постійних матеріалу E , ν_0 та параметрів ядер повзучості $K_i(t-\tau)$ й $K_v(t-\tau)$.

Методика визначення пружних постійних в'язкопружних матеріалів наведена в роботах [3-5]. В табл. 1 наведені значення пружних постійних поліетилену високої щільності. На додаток до модуля поздовжньої пружності E і коефіцієнту Пуассона ν_0 наведені також значення модуля зсуву G та об'ємного модуля B .

Таблиця 1

Значення пружних постійних поліетилену високої щільності

E , МПа	G , МПа	B , МПа	ν_0
$8,67 \cdot 10^2$	$3,21 \cdot 10^2$	$9,63 \cdot 10^2$	0,350

2.4. Параметри ядер повзучості

Методи визначення параметрів ядер повзучості лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану для випадку пропорційності девіаторів наведені в роботі [3,5]. Методи засновані на результатах апроксимації дискретних значень ядер повзучості за умов складного напруженого стану функціями, що задають ядра. Дискретні значення ядер розраховуються згідно співвідношень, що встановлюють залежність між ядрами інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості за умов складного напруженого стану та ядрами повзучості за умов одновимірних напружених станів. Одновимірні напружені стани розглядаються як базові.

У роботі у якості базового обрано одновісний розтяг із виміром поздовжніх та поперечних деформацій повзучості. У цьому випадку для залежності між ядрами інтенсивності деформацій повзучості $K_i(t)$, об'ємної повзучості $K_v(t)$, поздовжньої повзучості $K_{11}(t)$ й поперечної повзучості $K_{22}(t)$ отримано співвідношення [3,5]

$$\lambda_i K_i(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) + \nu_0 \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 + \nu_0}, \quad (2.2)$$

та відповідно співвідношення

$$\lambda_v K_v(t) = \frac{\lambda_{11} K_{11}(t) - 2\nu_0 \lambda_{22} K_{22}(t)}{1 - 2\nu_0}, \quad (2.3)$$

що дозволяють розраховувати дискретні значення ядер інтенсивності деформацій повзучості й об'ємної повзучості за ядрами поздовжньої й поперечної повзучості.

У табл. 2 наведено розраховані за викладеною у роботах [3,5] методикою із використанням співвідношень (2.2) та (2.3) параметри дробово-експоненційних ядер повзучості α , β , λ поліетилену високої щільності.

Таблиця 2

Параметри дробово-експоненційних ядер повзучості поліетилену високої щільності.

$K_{11}(t)$, година ⁻¹			$K_{22}(t)$, година ⁻¹		
α_{11}	$\beta_{11}, \text{год}^{-(1+\alpha_{11})}$	$\lambda_{11}, \text{год}^{-(1+\alpha_{11})}$	α_{22}	$\beta_{22}, \text{год}^{-(1+\alpha_{22})}$	$\lambda_{22}, \text{год}^{-(1+\alpha_{22})}$
-0,6460	0,1398	1,9439	-0,5158	1,0137	3,1427
$K_i(t)$, година ⁻¹			$K_v(t)$, година ⁻¹		
α_i	$\beta_i, \text{год}^{-(1+\alpha_i)}$	$\lambda_i, \text{год}^{-(1+\alpha_i)}$	α_v	$\beta_v, \text{год}^{-(1+\alpha_v)}$	$\lambda_v, \text{год}^{-(1+\alpha_v)}$
-0,6191	0,2764	2,1493	-0,6988	0,1229	1,6334

3. Повзучість тонкостінних трубчастих елементів за умов розтягу із крученням

Розв'язується задача розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов одновісного розтягу та комбінованого навантаження розтягом із крученням.

3.1. Одновісний розтяг

Розраховуються деформації поздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$, тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності за умов одновісного розтягу напруженням $\sigma_{11} = \text{const}$ ($\tau_{21} = \tau_{12} = 0$).

Повздовжня осяова повзучість. Для деформацій повздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ з (1.3) за умов $\sigma_{11} = \text{const}$ та $\tau_{21} = \tau_{12} = 0$ із урахуванням (1.4) та (1.5) одержуємо рівняння

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{2(1+\nu_0)}{3E} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \sigma_{11} + \frac{(1-2\nu_0)}{3E} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11}, \quad (3.1)$$

або відповідно рівняння

$$\varepsilon_{11}(t) = \frac{1}{3G} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \sigma_{11} + \frac{1}{9B} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11}, \quad (3.2)$$

де прийнято

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma_{11}; \quad 1 + \nu_0 = \frac{E}{2G}; \quad 1 - 2\nu_0 = \frac{E}{3B}.$$

Результати розрахунків деформацій поздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ тонкостінних трубчастих елементів за умов одновісного розтягу, що виконано за рівняннями (3.1)

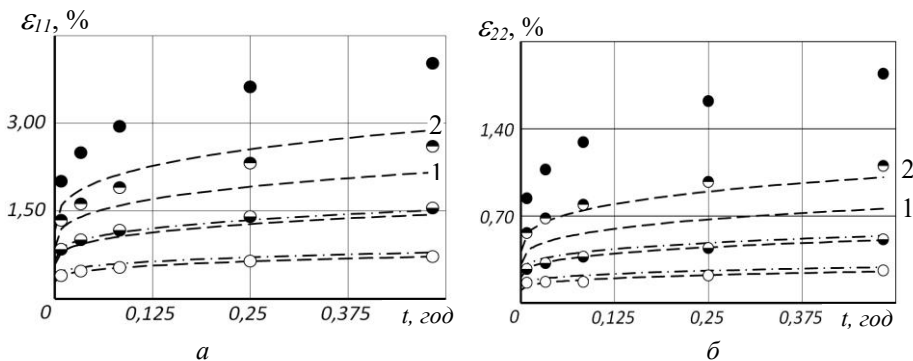


Рис. 3

та (3.2), зіставлено на рис. 3, а із експериментальними даними для трубчастих елементів з поліетилену високої щільності за напружень $\sigma_{11} = 2,5$ ($\circ$), $5,0$ ($\bullet$), $7,5$ ($\circ$) і $10,0$ ($\bullet$) МПа. Штриховими лініями нанесено результати розрахунків, що виконані за рівнянням (3.1), а штрих-пунктирними – за рівнянням (3.2).

Тут та далі експериментальні дані нанесено точками, а результати розрахунків – лініями. Розрахунки виконані з використанням значень параметрів ядер $K_i(t)$ та $K_v(t)$, що знайдено за ядрами поздовжньої $K_{11}(t)$ та поперечної $K_{22}(t)$ повзучості, та наведено у табл. 2.

Поперечна (радіальна) повзучість. Для деформацій поперечної повзучості $\varepsilon_{22}(t)$ коли $\sigma_{11} = \text{const}$ й $\varepsilon_{22} = 0$, виходячи з умови, що $\varepsilon_{22}(t) = -\nu_0 \varepsilon_{11}(t)$, із (3.1) отримуємо рівняння

$$\varepsilon_{22}(t) = - \left\{ \frac{2\nu_0(1+\nu_0)}{3E} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \sigma_{11} + \right. \\ \left. + \frac{\nu_0(1-2\nu_0)}{3E} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11} \right\}, \quad (3.3)$$

та відповідно рівняння

$$\varepsilon_{22}(t) = - \left\{ \frac{(E-2G)}{6G^2} \left\{ 1 + \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_i)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right\} \sigma_{11} + \right. \\ \left. + \frac{(E-2G)(3G-E)}{6EG^2} \left\{ 1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (\beta_v)^n (t)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right\} \sigma_{11} \right\}, \quad (3.4)$$

де прийнято

$$\nu_0 = \frac{E}{2G} - 1; \quad 2\nu_0 = \frac{E}{G} - 2.$$

Результати розрахунків деформацій поперечної повзучості $\varepsilon_{22}(t)$ тонкостінних трубчастих елементів за умов одновісного розтягу, що виконано за рівняннями (3.3) та (3.4) із використанням наведених у табл. 1 та 2 значень матеріальних констант, зіставлено на рис. 3,б із експериментальними даними для поліетилену високої щільності за напружень $\sigma_{11} = 2,5$ (○), 5,0 (⊖), 7,5 (1, ⊖) і 10,0 (2, ●) МПа. Штриховими лініями нанесено розрахунки, що виконані за рівнянням (3.3), а штрих-пунктирними – за рівнянням (3.4).

3.2. Розтяг із крученням

В роботі розраховано деформації поздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$ й зсувної $\varepsilon_{21}(t)$ повзучості тонкостінних трубчастих елементів із поліетилену високої щільності за умов комбінованої дії постійних нормальних напружень розтягу ($\sigma_{11} = \text{const}$) та постійних дотичних напружень кручення ($\tau_{21} = \text{const}$).

За умов комбінованої дії постійних за часом нормальних та дотичних напружень взаємовплив напружень на процес повзучості, як це і впливає із рівняння (1.3), не враховується. У цьому випадку, деформації поздовжньої й зсувної повзучості за умов спільної дії нормальних та дотичних напружень розраховуються за тими ж рівняннями, як і у випадку одновісного розтягу та чистого кручення.

Поздовжня (осьова) повзучість. Результати розрахунків деформацій поздовжньої повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ тонкостінних трубчастих елементів із поліетилену високої щільності за умов навантаження розтягом із крученням, що виконано за

рівняннями (3.1) та (3.2) із використанням значень матеріальних констант, що наведено у табл. 1 та 2, зіставлено на рис. 4,б, а з експериментальними даними (точки) при напруженнях $\sigma_{11} = 5,31$ та $\tau_{21} = 0$ (○) МПа; $\sigma_{11} = 5,31$ та $\tau_{21} = 2,49$ (●) МПа.

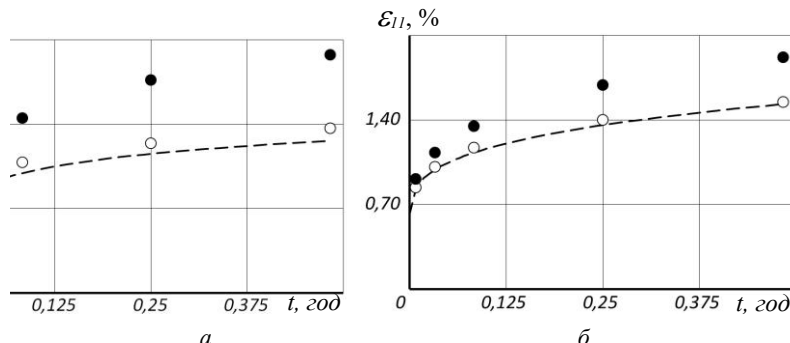


Рис. 4

Висновки. Як видно із отриманих результатів, що наведено на рис. 3-4, отримано цілком задовільне узгодження результатів розрахунків з даними експериментів. Методика побудована на використанні гіпотези пропорційності девіаторів може бути використана для розв'язку задач повзучості елементів конструкцій із лінійно-в'язкопружних матеріалів за умов складного напруженого стану. Варто зауважити, що за умови незмінних за часом напружень такий підхід є адекватним підходу, що заснований на принципі суперпозиції зсувної та об'ємної повзучості. Проте в такому випадку взаємовплив нормальних та дотичних напружень на процес повзучості не враховується, що не підтверджується результатами експериментів.

1. Xiaowei Yue, Ruiwen Guo, Ning An, Jinxiong Zhou, Modeling viscoelasticity–viscoplasticity of high-strain composites for space deployable structures, *International Journal of Solids and Structures*, **308** (2025). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.113154>.
2. Jingwen Ren, Hanxiang Wang, Jiaqi Che, Yanwen Zhang, Yanxin Liu, Feixue Ren, Modeling and stress analysis of fusion-bonded joints in reinforced thermoplastic pipes under combined internal pressure and axial tension, *Structures*, **84** (2026). <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2025.110978>.
3. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of the hereditary kernels of isotropic linear-viscoelastic materials in combined stress state. 2. Proportional deviators, *Inter. Applied Mechanics*, **52**, N8, 648-660 (2016). <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0786-y>.
4. Golub V.P., Maslov B.P., Fernati P.V. Identification of creep kernels of isotropic linear-viscoelastic materials under the complex stress state. 1. Superposition of shear and bulk creep, *Inter. Applied Mechanics*, **52**, N2, 165-175 (2016). <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0744-8>.
5. Golub V.P., Pavlyuk Ya.V., Reznik V.S. Analysis of creep strains and stress relaxation in thin-walled tubular members made of linear viscoelastic materials. 1. Superposition of shear and volume creep, *Int. Appl. Mech*, **56**, 156-169 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10778-020-01011-z>.
6. Крегерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений, *Механика композитных материалов*, **2**, 195-201, (1985).

Міцність конструкції як ключовий фактор підвищення ефективності доставки та маневреності різних типів транспортних засобів

Ігор Нестерук

Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, Київ, Україна

inesteruk@yahoo.com

Маса корисного вантажу менша за загальну масу транспортного засобу. Цей факт вимагає корекції відомого критерію комерційної ефективності (співвідношення ваги до опору). Ефективність доставки корисного вантажу була введена як кількість енергії, необхідна для переміщення 1Н ваги корисного вантажу на відстань 1м, і була оцінена для електричних, ядерних та інших типів транспортних засобів. Були запропоновані аналітичні формули, що пов'язують ефективність та маневреність зі співвідношенням ваги до опору, співвідношенням максимальної до порожньої ваги транспортного засобу та іншими безрозмірними характеристиками. Для досягнення високих рівнів ефективності доставки необхідні найвищі значення співвідношення ваги до опору, а також співвідношення максимальної до порожньої ваги. Відповідно необхідно покращити конструктивну міцність оптимальних транспортних засобів.

Ключові слова: конструктивна міцність; комерційна ефективність; маневреність; зменшення опору; збільшення дальності польоту; оптимізація форми

Вступ

Ефективність доставки E можна виміряти кількістю енергії, що використовується для переміщення 1Н ваги корисного вантажу на відстань 1м. Якщо корисне вантаження збігається з вагою транспортного засобу (або тварини), ця характеристика називається вартістю руху [1]. Віднесена до 1 Н загальної ваги mg транспортного засобу або тварини, вартість руху дає відношення опору до ваги $l/k = X/mg$. Зворотну характеристику $k = mg/X$ (відношення ваги до опору) запропонували Габріеллі та фон Карман для оцінки кількості тонн-кілометрів, які може перевезти транспортний засіб за одиницю часу [2]. З фіксованою ємністю палива (або іншої енергії) на борту, транспортний засіб з максимальним значенням має максимальну дальність польоту R [2-4]. Дальність польоту планерів, що спускаються в спокійній атмосфері, також пропорційна значенню k (див., наприклад, [4, 5]).

Маса корисного вантажу менша за загальну масу транспортного засобу (винятком є криголами, які використовують свою загальну вагу для розбиття льоду). Цей факт вимагає корекції критерію k , що буде змістом цього дослідження. Ми запропонуємо аналітичні формули, що пов'язують ефективність доставки корисного вантажу E та маневреність зі співвідношенням маси до опору k , масами вантажу, паливом та масою порожнього транспортного засобу. Будуть наведені деякі приклади розрахунків та обговорена необхідність підвищення міцності конструкцій транспортних засобів.

Матеріали та методи

Для доставки корисного вантажу масою m_u на відстань R при сталому горизонтальному русі транспортного засобу зі швидкістю U необхідна механічна енергія пропорційна $Rm_u g$ (g – гравітаційна константа). Тоді ефективність доставки можна ввести як відношення цієї енергії до енергії Q , що використовується для досягнення дальності R .

$$E = \frac{Rm_u g}{Q} \quad (1)$$

Кількість Q може бути запасена на борту в паливі, електричних батареях/акумуляторах або атомному реакторі (для атомних транспортних засобів) і може бути перетворена на механічну енергію. Енергія Q також може постачатися під час руху (трамваї, електропоїзди тощо). Ми не будемо зосереджуватися на таких неавтономних транспортних засобах, оскільки їхня ефективність залежить від зовнішньої інфраструктури енергопостачання.

Припустимо, що енергія Q використовується рівномірно протягом часу $T=R/U$ (без застосування рівняння Бреге [6]) і також пов'язана з потужністю двигуна/двигунів та бортового обладнання N_A :

$$T = \frac{Q}{N_A} \quad (2)$$

Крейсерська потужність $N=XU$ (X – опір транспортного засобу) пов'язана з N_A коефіцієнтом:

$$p_1 = \frac{N_A}{N} \quad (3)$$

Зазвичай N_A є у 2-4 рази більшою за N . Зокрема, для неелектричних літальних апаратів коефіцієнт (3) можна оцінити за формулою [5, 7]:

$$p_1 = \frac{N_A}{N} \approx 3.24(m_1 g)^{-0.037} \quad (4)$$

що впливає з усереднених характеристик неелектричних літальних апаратів, доступних у [8] (масу $m_1 = 1.393m_e$ потрібно брати в кілограмах; m_e – маса порожнього транспортного засобу).

З (2) та (3) випливає, що

$$R = UT = \frac{UQ}{N_A} = \frac{UQ}{p_1 XU} = \frac{kQ}{p_1 m g} \quad (5)$$

а з (1) та (5), що

$$E = \frac{k m_u}{p_1 m} \quad (6)$$

Комерційна ефективність $k=(mg)/X$ – це відношення ваги до опору. Маса m у рівнянні (3) – це середня маса транспортного засобу під час доставки корисного вантажу на відстань R , тобто $m = m_e + m_u + 0.5m_f$, коли для досягнення дальності R необхідне паливо (наприклад, бензин, природний газ, водень тощо) масою m_f . Для електричних та ядерних транспортних засобів виключимо масу батарей/акумуляторів або атомної електростанції з маси порожнього транспортного засобу та позначимо її m_f . Тоді $m = m_e + m_u + m_f$ для цих транспортних засобів.

Припустимо лінійну залежність між m_e та максимальною масою транспортного засобу $m_m = m_e + m_u + m_f$ (до початку доставки, наприклад, максимальна злітна маса літака)

$$m_m = k_m m_e \quad (7)$$

Зокрема, статистичні дані для неелектричних літальних апаратів, проаналізовані [8], дають середнє значення:

$$k_m = 1.786 \quad (8)$$

Тоді масу транспортного засобу можна представити наступним чином:

$$m = \begin{cases} \frac{k_m(m_u + m_f)}{(k_m - 1)}, & \text{for electrical and nuclear vehicles} \\ \frac{k_m m_u + 0.5 m_f (k_m + 1)}{(k_m - 1)}, & \text{for other vehicles} \end{cases} \quad (9)$$

Враховуючи (6) та (9), ефективність (1) дорівнює:

$$E = \begin{cases} \frac{k m_u (k_m - 1)}{p_1 k_m (m_u + m_f)}, & \text{for electrical and nuclear vehicles} \\ \frac{k m_u (k_m - 1)}{p_1 [k_m m_u + 0.5 m_f (k_m + 1)]}, & \text{for other vehicles} \end{cases} \quad (10)$$

Ефективність (10) залежить лише від співвідношення

$$k_u = \frac{m_f}{m_u} \quad (11)$$

таким чином:

$$E = \begin{cases} \frac{k(k_m - 1)}{p_1 k_m (1 + k_u)}, & \text{for electrical and nuclear vehicles} \\ \frac{k(k_m - 1)}{p_1 [k_m + 0.5 k_u (k_m + 1)]}, & \text{for other vehicles} \end{cases} \quad (12)$$

Можна побачити, що ефективність доставки не залежить від Q , зростає зі збільшенням співвідношення ваги до опору k та коефіцієнта k_m , а також зі зменшенням відношення k_u . Оскільки дальність польоту пропорційна m_f , найефективнішою є доставка великих корисних вантажів на малі відстані (щоб мати найменші значення відношення m_f / m_u , зокрема, k_u прямує до нуля для планерів). Маса порожнього транспортного засобу має бути якомога меншою, щоб мати найвищі значення k_m . Конструктивна міцність оптимальних транспортних засобів повинна бути відповідно покращена. Доставка великими транспортними засобами є кращою через менші значення коефіцієнта p_1 .

Шляхи збільшення співвідношення ваги до опору для наземних, повітряних та водних дозвукових транспортних засобів детально обговорювалися в [3-5, 7, 9, 10]. Були розглянуті та порівняні аеро- та гідродинамічний опір корпусу та опір, пов'язаний з підтримкою ваги транспортного засобу. Зокрема, для збільшення значення k необхідно використовувати бездиривні корпуси спеціальної форми [11-13] та крила з великим видовженням [3-5, 7, 9]. Зручний інтерфейс був розроблений у [9] для концептуального проектування дозвукових літаків та планерів. Щоб усунути вплив відношення ваги до опору, можна розглянути новий коефіцієнт ефективності:

$$E^* = \frac{E}{k} = \begin{cases} \frac{(k_m - 1)}{p_1 k_m (1 + k_u)}, & \text{for electrical and nuclear vehicles} \\ \frac{(k_m - 1)}{p_1 [k_m + 0.5 k_u (k_m + 1)]}, & \text{for other vehicles} \end{cases} \quad (13)$$

Згідно з (3) та (13), $E^* < 1$. Це означає, що ефективність доставки корисного навантаження (1) завжди нижча за відношення ваги до опору.

Слід зазначити, що висока комерційна ефективність або ефективність доставки зазвичай відповідають низькій маневреності [3], яку можна пов'язати зі відношенням потужності до ваги P_W наступним чином:

$$P_W = \frac{N_a}{mg} = \frac{p_1 X U}{mg} = \frac{p_1 U}{k} \quad (14)$$

Враховуючи (12) та (14), можна отримати:

$$P_W = \begin{cases} \frac{U(k_m-1)}{E k_m (1+k_u)}, & \text{for electrical and nuclear vehicles} \\ \frac{U(k_m-1)}{E[k_m+0.5k_u(k_m+1)]}, & \text{for other vehicles} \end{cases} \quad (15)$$

Формула (15) показує, що співвідношення потужності до ваги збільшується зі збільшенням швидкості та коефіцієнта k_m , а також зі зменшенням ефективності доставки E . Щоб мати високу маневреність, співвідношення k_u та маса порожнього транспортного засобу повинні бути якомога меншими. Таким чином, треба збільшувати конструктивну міцність оптимальних транспортних засобів, щоб підвищити як ефективність доставки, так і маневреність.

Додаткові вимоги до міцності виникають через те, що збільшення коефіцієнта k та дальності польоту вимагає використання видовжених корпусів з великими значеннями відношення довжини L до максимального діаметра D ($L/D \gg 1$), [3-5, 7, 9]. Зокрема, при використанні спеціальних осесиметричних тіл, що запобігають відриву пограничного шару [11, 12], можна забезпечити ламінарний потік при достатньо високих числах Рейнольдса. У цьому випадку мінімальні значення об'ємного коефіцієнта опору досягаються при:

$$\frac{UV}{L^2} = 1.81 \cdot 10^5 \nu \quad (16)$$

(див. [5, 13]; ν - кінематична в'язкість води або повітря). Використовуючи наближену формулу для об'єму $V \approx 0.28LD^2$ осесиметричних тіл спеціальної безвідривної форми [3], отримуємо з (16) параметри оптимальних корпусів

$$Re_L = \frac{UL}{\nu} = 6,46 \cdot 10^5 \left(\frac{L}{D}\right)^2 \quad (17)$$

З формули (17) видно, що використання максимально видовжених корпусів дозволяє збільшити швидкість та габарити оптимальних транспортних засобів. Зменшення опору літаків та планерів досягається використанням максимально видовжених крил [3-5, 7, 9], що також вимагає збільшення міцності конструкцій.

Результати та обговорення

На рис. 1-3 представлені приклади розрахунків ефективності за формулою (13) для різних значень параметрів. Вплив розміру транспортного засобу проілюстровано на рис. 1, де два значення p_l (4 та 2,5, типові для малих та великих транспортних засобів відповідно) були використані для розрахунку ефективності E^* електричних (або ядерних) транспортних засобів. Ефективність інших транспортних засобів (наприклад, тих, що використовують бензинові двигуни) вища при тих самих значеннях параметрів p_l , k_u , k_m (порівняйте суцільні та пунктирні (що відповідають електричним апаратам) криві на рис. 2 та 3). Різниця в ефективності немає лише для $k_u = 0$ (відповідні чорні криві збігаються на рис. 3).

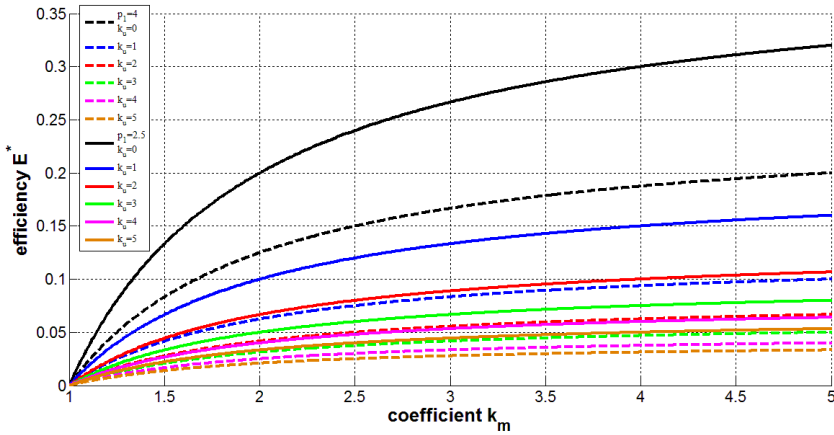


Рис. 1. Ефективність доставки E^* в залежності від k_m для електричних транспортних засобів при різних значеннях p_l та k_u . Суцільні криві відповідають $p_l = 2,5$, пунктирні – $p_l = 4$. Різні значення коефіцієнта k_u представлені кривими різного кольору

Приклади розрахунків значень E^* для деяких відомих транспортних засобів представлені в Таблиці 1. Найвище значення відповідає Shahed-136 (через найвищі значення k_m та малий k_u). Планер ЕТА має найнижче значення E^* (через найнижче значення k_m). Тим не менш, ефективність доставки E (згідно з рівнянням (12)) є досить високою для планера ЕТА через дуже велике відношення ваги до опору (k може бути близько 70 для цього транспортного засобу, [15], а $E = 4,73$). З іншого боку, відносно низьке значення $k = 10,3$ для Cessna-172R, [17] дає лише $E = 0,81$. Таким чином, для досягнення високих рівнів ефективності доставки E необхідні найвищі значення k_m та комерційної ефективності (відношення ваги до опору) k .

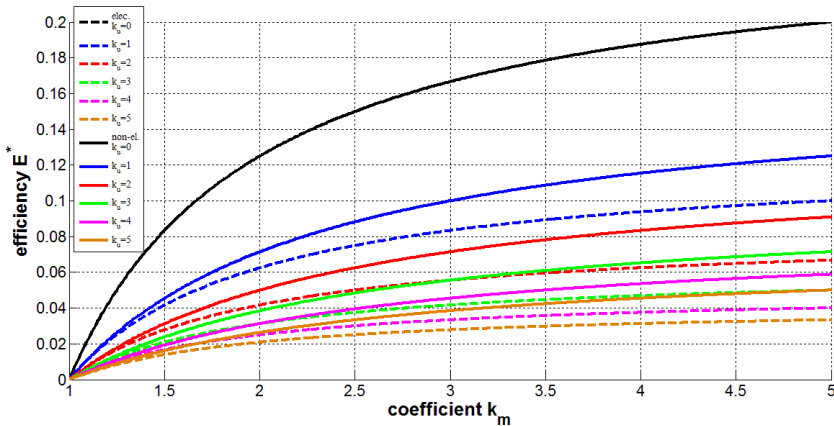


Рис. 2. Ефективність доставки E^* в залежності від k_m для електричних транспортних засобів при різних значеннях p_l та k_u . Суцільні криві відповідають неелектричним транспортним засобам, пунктирні – електричним. Різні кольори відповідають різним значенням k_u .

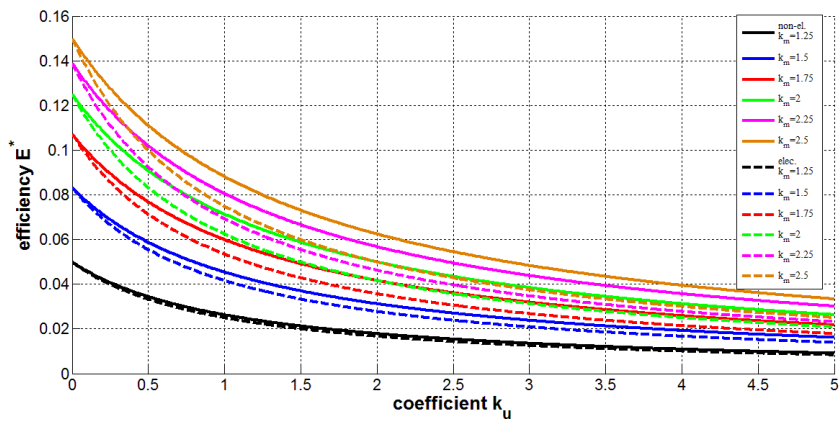


Рис. 3. Ефективність доставки E^* в залежності від k_u для електричних транспортних засобів при різних значеннях k_m та $p_l=4$. Суцільні криві відповідають неелектричним транспортним засобам, пунктирні – електричним. Різні кольори відповідають різним значенням k_m .

Великі значення коефіцієнта k_m вказують на високу міцність конструкції, що дозволяє розміщувати більше корисних вантажів на одиницю ваги самої конструкції. Покращення міцності конструкції також дозволяє збільшити співвідношення ваги до опору, оскільки для досягнення високого k необхідні крила з високим подовженням та дуже видовженими корпусами [3-5, 7, 9, 11-13]. З іншого боку, використання високоміцних матеріалів та конструкцій збільшує вартість транспортних засобів, що також слід враховувати при оцінці їх ефективності.

Таблиця 1.
Характеристики відомих апаратів та розрахунки коефіцієнтів та ефективності E^*

Апарат, посилання	Максимальна злітна маса m_m , kg	Маса порожнього апарата m_e , kg	Маса палива m_f , kg	Маса корисного навантаження $m_u = m_m - m_e - m_f$, kg	$k_m = m_m / m_e$	$k_u = m_f / m_u$	p_l , рівн. (4)	E^*
Cessna-172R, [14]	1,111	767	146	198	1.449	0.737	2.428	0.0786
BN-2B Islander, [14]	2,994	1,866	453	675	1.605	0.671	2.350	0.1038
AN-24, [14]	21,000	13,300	4,052	3,648	1.579	1.111	2.185	0.088
ETA glider, [15]	850	710	0	140	1.197	0	2.435	0.0676
Shahed-136, [16]	240	98	52	90	2.449	0.578	2.620	0.1605

Висновки

Було представлено та оцінено ефективність доставки корисного навантаження для електричних, ядерних та інших типів транспортних засобів. Було запропоновано аналітичні формули, що пов'язують ефективність з коефіцієнтом опору ваги, співвідношенням максимальної до порожньої ваги транспортного засобу та іншими безрозмірними характеристиками.

Для досягнення високих рівнів ефективності доставки необхідні найвищі значення відношень коефіцієнта опору до ваги та максимальної до порожньої ваги. Зокрема, для досягнення високих значень відношення коефіцієнта опору до ваги необхідні крила з високим видовженням та дуже видовжені корпуси. Структурна міцність оптимальних транспортних засобів вимагає покращення, щоб підвищити як ефективність доставки, так і маневреність. Використання високоміцних матеріалів та конструкцій збільшує вартість транспортних засобів. У майбутніх дослідженнях ці витрати слід враховувати при оцінці ефективності доставки.

Конфлікт інтересів: Автор не має жодних конкуруючих інтересів, які можна було б заявити, що стосуються змісту цієї статті.

Фінансування: Ця робота не отримала зовнішнього фінансування.

Доступність даних: Дані, що підтверджують результати цього дослідження, знаходяться у відкритому доступі в Інтернеті.

1. F. Saibene and A. E. Minetti, “Biomechanical and physiological aspects of legged locomotion in humans”, *Eur J Appl Physiol.*, vol. 88, pp. 297–316, 2003. DOI 10.1007/s00421-002-0654-9
2. Y. Gabrielly and Th. von Karman, “What price speed”, *Mechanical Engineering*, USA, vol. 72, No. 10, pp. 775-779, 1950.
3. Nesteruk, I.: Efficiency of Steady Motion and its Improvement with the Use of Unseparated and Supercavitating Flow Patterns. *KPI Science News* 6, 51-67 (2016). <https://doi.org/10.20535/1810-0546.2016.6.81605>.
4. Nesteruk, I. Shape optimization principles for long-range unmanned vehicles. *KPI Science News*, no. 1–4, pp. 49–61 (2024). doi: 10.20535/kpispn.2024.1-4.314223 (in Ukrainian).
5. Nesteruk, I. Instructions for Improving The Shape of Long-range Subsonic Airplanes and Gliders. Preprint Research Square. 09 February 2026. DOI: <https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-8368732/v1>
6. <https://web.mit.edu/16.unified/www/FALL/thermodynamics/notes/node98.html>
7. Nesteruk, I. Prandtl's Boundary-Layer Theory as a Basis for Improving Aerodynamic Shapes. Conference: Topical Problems of Fluid Mechanics 2026, Prague, February 18 – 20, 2026. DOI: [10.14311/TPFM.2026.022](https://doi.org/10.14311/TPFM.2026.022)
8. Tianshu Liu: Comparative Scaling of Flapping and Fixed Wing Flyers. *AIAA Journal*, 44 (1) (2006).
9. Nesteruk, I, Dorozhkin, O. User-Friendly Interface for Conceptual Shape Design of Subsonic Airplanes and Gliders. Preprint Research Gate. February 9, 2026. DOI: [10.13140/RG.2.2.29643.45607](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.29643.45607)

10. Nesteruk, I. (2022): Shapes of the fastest fish and optimal underwater and floating hulls. [Theoretical and Applied Mechanics Letters](#), DOI: [10.1016/j.taml.2022.100378](#)
11. Nesteruk, I. Rigid Bodies without Boundary-Layer Separation. *Int. J. of Fluid Mechanics Research*. 41(3), 260-281 (2014).
12. Nesteruk, I. Maximal speed of underwater locomotion. *Innov Biosyst Bioeng* 3(3), 152-167 (2019). <https://doi.org/10.20535/ibb.2019.3.3.177976>
13. Nesteruk, I. Low-Drag Bodies of Revolution and Their Applications for Effective Transportation. *Transportation Development Research*. 3(2): 1–8 (2025). DOI: <https://doi.org/10.55121/tdr.v3i2.697>
14. Taylor, John W. R., ed. (1988). *Jane's All the World's Aircraft 1988-89*. London: Jane's Information Group. [ISBN 0-7106-0867-5](#).
15. Dillinger, J., Boermans, L.M.M.: *Aerodynamic Design of the Open Class Sailplane Concordia*. XXVIII OSTIV Congress, Eskilstuna, Sweden, June 2006.
16. https://en.wikipedia.org/wiki/HESA_Shahed_136
17. Cessna Skyhawk II Performance Assessment <http://temporal.com.au/c172.pdf>

Деякі підходи до розв'язання задач термопластичності для тіл з функціонально-градієнтних матеріалів

М.Бабешко, В.Савченко, П.Стеблянко

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

caf-vmi@ukr.net

Розглядаються два варіанти моделювання властивостей двокомпонентного функціонально-градієнтного матеріалу і напружено-деформованого стану просторових тіл і тонких оболонок з таких матеріалів в процесах неізотермічного деформування за межами пружності. В першому з них пропонується визначати співвідношення між другими інваріантами девіаторів напруження і деформації на основі діаграм деформування складових матеріалів і заданого закону зміни їх об'ємного вмісту, і використовувати його при розв'язанні крайових задач. Досліджується поведінка сплавів з пам'яттю форми (СПФ) та псевдо-пружно-пластичністю, які можуть використовуватись в складі функціонально-градієнтних матеріалів. Новизна запропонованого підходу полягає в формулюванні феноменологічної моделі для опису властивостей матеріалів з пам'яттю форми і термо-псевдо-пружно-пластичністю в точці з урахуванням тепла, що виділяється в процесі фазового переходу. Деформація в точці представляється у вигляді суми пружної складової, стрибка деформації при фазовому переході, деформації, викликаній температурними змінами і пластичної деформації. При цьому передбачається, що властивості матеріалу залежать від температури. Для опису пружної деформації і деформації фазового перетворення використовувалася діаграма псевдо-пружного матеріалу, що складається з трьох прямолінійних або нелінійних ділянок. Встановлено, що класичні діаграми зразка представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в точках. Проведено узагальнення фізичних співвідношень для застосування при дослідженні тіл з ФГМ при наявності складових з ПФ.

Ключові слова: теорія термопластичності, функціонально-градієнтний матеріал, діаграма деформування, крайова задача, псевдо-пружно-пластичність, пам'яттю форми.

Вступ

Розвиток різних галузей сучасної техніки вимагає створення нових матеріалів з унікальними властивостями, що інколи поєднують суперечливі вимоги, наприклад, міцність і легкість авіаційних конструкцій, твердість і пластичність металорізального інструменту, мініатюрність і високу електроємність компонентів радіоелектронного обладнання та ін.. Цю задачу вирішують композитні матеріали, основними перевагами яких являються підвищені в порівнянні з традиційними матеріалами фізико-механічні властивості та експлуатаційні показники. В останні десятиліття з'явилося нове покоління композитних матеріалів – функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), для яких характерна відсутність чітких меж між компонентами і безперервна просторова зміна фізико-механічних властивостей. Концепція створення ФГМ вперше була запропонована у 1984 р. в Японії при розробці теплоізоляційних покриттів для багаторазових космічних апаратів і полягає у визначенні сукупності властивостей, необхідних для отримання такого складу та властивостей компонентів, який дозволив би знизити концентрацію внутрішніх напружень і збільшити ресурс роботи матеріалу відповідно до експлуатаційних вимог. Склад та структура ФГМ

змінюються за деяким законом, що призводить до відповідних змін властивостей матеріалу. Фізико-механічні властивості ФГМ безперервно змінюються вздовж однієї чи декількох координат. На відміну від шаруватих композитних матеріалів, це дозволяє уникнути різких розривів у властивостях матеріалу на межах розділу шарів, які можуть призводити до концентрації напружень та руйнування.

Будемо розглядати двокомпонентні (двофазні) ФГМ. Методи визначення пружних характеристик ФГМ досить добре розроблені і описані в літературі [1]. Що стосується непружних властивостей ФГМ, їх визначення є одною з найбільш складних областей механіки, оскільки властивості матеріалу змінюються безперервно по координаті (наприклад, вздовж товщини), і класичні моделі для однорідних матеріалів тут не можуть бути застосовані. Тому зусилля багатьох дослідників направлено на моделювання властивостей ФГМ, а наскільки запропоновані моделі адекватно описують процеси деформування таких матеріалів, покажуть експериментальні дослідження.

Розглянемо два підходи до моделювання властивостей ФГМ.

1. Спосіб узагальнення рівнянь термопластичності на опис процесів деформування вздовж траєкторій малої кривизни функціонально градієнтного матеріалу

Будемо моделювати поведінку ізотропного матеріалу, створеного з двох складових в результаті певного технологічного процесу, виходячи з уявлень механіки суцільного середовища, прийнятих при дослідженні деформівних твердих тіл. Будемо вважати, що властивості матеріалу можуть неперервно змінюватися по об'єму, аналогічно тому, як змінюються властивості початково однорідного тіла при нерівномірному нагріванні. Припустимо, що фізико-механічні властивості створеного матеріалу змінюються вздовж однієї координати, як в більшості опублікованих робіт, присвячених чисельному аналізу поведінки елементів конструкцій з функціонально градієнтних матеріалів. Припускаємо, що як пружні, так і пластичні характеристики визначаються відносним об'ємним вмістом складових, тобто по аналогії з [2 - 4] можуть бути виражені формулою

$$X(\xi) = X_1(\xi)V_1(\xi) + X_2(\xi)V_2(\xi), \quad (1.1)$$

де X – характеристика створеного матеріалу, а X_1, X_2 – така ж характеристика складових; V_1 і V_2 – відносні об'ємні вмісти складових матеріалів, $V_1(\xi) + V_2(\xi) = 1$; ξ – координата, за якою змінюються властивості матеріалу. Вважаємо, що закон зміни відносного об'ємного вмісту одного з складових матеріалів в залежності від координати ξ задано. Такий підхід є логічним поширенням підходу, прийнятому при моделюванні властивостей функціонально градієнтного матеріалу в задачах теорії пологих гнучких оболонок [4], на крайові задачі термопластичності.

Сформулюємо визначальні рівняння термопластичного деформування ізотропного матеріалу вздовж траєкторій малої кривизни, властивості якого неперервно змінюються в залежності від координати. В основу цих рівнянь покладемо такі основні припущення:

- тензори напружень і деформацій є сумами девіаторів та кульових тензорів

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma_0 \delta_{ij}; \quad \sigma_0 = \sigma_{ii}/3; \quad \delta_{ij} = 1, i = j; \delta_{ij} = 0, i \neq j; \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon_0 \delta_{ij}; \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ii}/3. \quad (1.3)$$

Компоненти тензора деформації складаються з пружних ε_{ij}^e , пластичних ε_{ij}^p та теплових $\varepsilon_T \delta_{ij}$ складових:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_T \delta_{ij}; e_{ij} = e_{ij}^e + e_{ij}^p; \quad (1.4)$$

де e_{ij}^p - компоненти девіатора пластичних складових деформації, ε_0 - середня деформація, $\varepsilon_T = \alpha_T(T - T_0)$, α_T - коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу, T_0 - початкова температура;

$$\varepsilon_0 - \varepsilon_T = \sigma_0/K, \quad (1.5)$$

де $K = \frac{2G(1+\nu)}{1-2\nu}$: ν і G – коефіцієнт Пуассона і модуль зсуву матеріалу,;

- направляючі тензори девіаторів диференціалів пластичних складових деформацій та напружень збігаються

$$de_{ij}^p = \frac{d\Gamma_p}{S} s_{ij}, \quad (1.6)$$

де $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$, Γ_p – параметр Удквіста

$$\Gamma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^t (de_{ij}^p de_{ij}^p)^{1/2} dt; \quad (1.7)$$

S – інтенсивність дотичних напружень

$$S = \left(\frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.8)$$

На основі цих припущень зв'язок між компонентами тензорів напружень і деформацій записуємо у вигляді закону Гука

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + (K - 2G)\varepsilon_0 \delta_{ij} - \sigma_{ij}^* \quad (1.9)$$

з додатковими членами σ_{ij}^* , які мають вигляд

$$\sigma_{ij}^* = 2G \left[e_{ij}^p + \frac{1+\nu}{1-2\nu} \varepsilon_T \delta_{ij} \right]. \quad (1.10)$$

При використанні рівнянь (1.9),(1.10) процес навантаження необхідно розділити на етапи. Тоді на N -му етапі пластичні складові девіатора деформацій будемо вважати сумами їх приростів

$$e_{ij}^p = \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_k e_{ij}^p + \Delta_N e_{ij}^p. \quad (1.11)$$

Для визначення приростів пластичних складових девіатора деформацій інтегруємо (1.6) в межах етапу з використанням теореми про середнє значення

$$\Delta_k e_{ij}^p = \left\langle \frac{s_{ij}}{S} \right\rangle_k \Delta_k \Gamma_p. \quad (1.12)$$

Для визначення $\Delta_k \Gamma_p$ припускаємо існування залежності виду

$$S = F(\Gamma, T, \vec{\tau}, \xi), \quad (1.13)$$

де Γ – інтенсивність миттєвих деформацій зсуву, $\Gamma = \left(\frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \right)^{\frac{1}{2}}$.

Припускається, що

$$\Gamma = \frac{S}{2G} + \Gamma_p; \quad \Gamma_p = \sum_{k=1}^{N-1} \Delta_k \Gamma_p + \Delta_N \Gamma_p. \quad (1.14)$$

Визначальні рівняння (1.9), (1.10) мають такий же вигляд, як і при опису деформації ізотропних матеріалів вздовж траєкторій малої кривизни [5, 6], але відрізняються від них конкретизацією пружних характеристик та термомеханічної поверхні (1.13). В даному випадку необхідно мати пружні характеристики та залежність (1.13) для кожного з складових матеріалів. Пружні характеристики матеріалу, який розглядається, визначаються через відповідні характеристики складових матеріалів за формулою (1.1). Залежність (1.13) для кожного з складових

матеріалів будується за результатами експериментальних даних, одержаних в процесах пропорціонального навантаження трубчастих зразків при кількох значеннях температури T з діапазону нагрівання. При проміжних значеннях T залежність (1.13) знаходимо шляхом лінійної інтерполяції. Побудова (1.13) на основі даних експериментів детально описана в [5]. Використовуючи задані у вигляді таблиць криві $S \sim \Gamma$ при довільному значення температури T для кожного з складових матеріалу, будуюмо відповідні криві $S \sim \Gamma$ для ФГМ, що розглядається. Для цього для кожного значення Γ обчислюємо відповідне значення S

$$S = S_1 V_1(\xi) + S_2 V_2(\xi), \quad (1.15)$$

де S_1 і S_2 – значення інтенсивності дотичних напружень з діаграм $S \sim \Gamma$ відповідно першого і другого складових матеріалів, $V_1(\xi)$ і $V_2(\xi)$ – відносні об'ємні вмісти цих складових в точці з координатою ξ , і одержуємо діаграму $S \sim \Gamma$ матеріалу, який розглядається. По таблиці побудованих діаграм $S \sim \Gamma$ визначаємо прирости інтенсивності накопиченої пластичної деформації $\Delta_k \Gamma_p$ на поточному етапі так, як це описано в [6], а далі обчислюємо прирости (1.12) і компоненти пластичних складових девіатора деформації (1.11) для ФГМ. Такий спосіб визначення приростів $\Delta_k \Gamma_p$ має місце при активному процесі, тобто коли на даному етапі приріст інтенсивності накопиченої пластичної деформації $\Delta_k \Gamma_p > 0$; в іншому випадку прирости $\Delta_k \Gamma_p$ покладаємо рівним нулю, що відповідає розвантаженню.

Таким чином, поетапно визначаючи компоненти пластичних складових девіатора деформації, повністю конкретизуємо рівняння (1.9), (1.10). Так як рівняння (1.9), (1.10) для ФГМ по формі збігаються з рівняннями теорії процесів малої кривизни для ізотропних матеріалів [5, 6], то можна використовувати розроблені раніше методи [6, 7] і програмні засоби чисельного дослідження напружено-деформованого стану тіл та оболонок обертання, зробивши відповідні зміни в алгоритмах.

Наскільки адекватно рівняння (1.9), (1.10) будуть описувати реальну поведінку функціонально градієнтних матеріалів можна оцінити шляхом порівняння результатів, одержаних з використанням запропонованих рівнянь, з експериментальними даними.

2. Моделювання термомеханічної поведінки матеріалів з пам'яттю форми в складі функціонально-градієнтних матеріалів

Пам'яттю форми називають властивість деяких матеріалів накопичувати деформації визначеної величини при навантаженні, а потім через петлю гістерезиса повертатися у вихідне положення після розвантаження. Основним механізмом при цьому є зворотне мартенситне перетворення між фазами твердого тіла, яке може мати місце при порівняно незначній зміні температури. Таке перетворення може бути викликано зміною температури або зміною напруги. До матеріалів, які проявляють пам'ять форми, псевдо-пружність та псевдо-пружно-пластичність зазвичай відносять наступні: NiTi, AgCd, AuCd, CuAlNi, CuSn, CuZn, FePt, MnCu, FeMnSi, CoNiAl, CoNiGa, NiFeGa, TiPd, NiTi, NiTiNb, NiMnGa. Існує цілий ряд моделей для опису термомеханічної поведінки сплавів з пам'яттю форми та псевдо-пружно-пластичністю. Більшість з них будуються на основі класичних уявлень, тобто ставлять собі за мету безпосереднє описати експериментальні дані, отримані на різних макрозразках при простому і складному навантаженні. Експериментально встановлено, що поведінка матеріалу з ПФ в точці тіла в загальному випадку

відрізняється від поведінки зразка в цілому. Показано, що межа розділу фаз переміщається з постійною для обраної температури швидкістю [8-11].

Метою роботи є дослідження явища пам'яті форми та псевдо-пружно-пластичності в загальній формі з урахуванням швидкостей деформування (навантаження) та температури в складі ФГМ.

Проведено аналіз і класифікацію наявних підходів до моделювання поведінки матеріалів з пам'яттю форми. На базі деяких теорій пластичності побудовано фізичні співвідношення, які дозволили адекватно описати поведінку таких матеріалів.

2.1. Моделювання поведінки матеріалів з ПФ у складі ФГМ

2.1.1. Феноменологічна модель

У цьому параграфі запропоновано варіант феноменологічної моделі поведінки псевдо-пружно-пластичних матеріалів і матеріалів з ПФ. Розглянуто історію питання та моделі запропоновані для їх описання. Різноманітні приклади поведінки матеріалів з пам'яттю форми, псевдо-пружністю та псевдо-пружно-пластичністю наведено в роботах [12 - 16].

Узагальнена залежність між напруженням σ і деформацією ε , в матеріальній точці моделюється кривою що зображена на рисунку 1. При побудові такої діаграми треба задати точки $A(\sigma_M, \varepsilon_M)$ і $B(\sigma_m, \varepsilon_m)$, функції $\varepsilon = \psi_i(\sigma)$, $i = 1, 2, 3$.

В задачах механіки, де вивчається поведінка матеріалів, в яких мають місце фазові переходи, для побудови фізичних співвідношень між напруженням та деформацією необхідно додатково знати положення в зразку фронту фазового переходу $s = s(t)$ і функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$.

Розглянуто квазістатичний процес, в якому треба визначити функції часу $\sigma = \sigma(t)$, $s = s(t)$, $\varepsilon = \varepsilon(t)$. В результаті удується дотичний модуль діаграми матеріалу. При його обчисленні треба попередньо визначити функції $\sigma = \sigma(t)$, $s = s(t)$ а для цього слід додати функцію кінетичного відгуку $\dot{s} = \Phi(f)$. Розглянуто випадок, коли функція кінетичного відгуку задана аналітично.

$$\dot{s} = \dot{s}_0 + \omega(f - f_r),$$

$$(\dot{s} = 0, 0 \leq f \leq f_r). \quad (2.1)$$

В результаті отримана система інтегро-диференціальних рівнянь, яка розв'язується числовим методом. Звідси отримуються розрахункові формули для визначення рушійної сили f .

2.1.2. Експериментальні дослідження поведінки сплавів з ПФ

Інформація про експерименти, які проводились з такими матеріалами міститься в роботах [14, 16]. Особлива увага приділялась роботам по дослідженню пластичного деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів [12, 13, 15]. На основі відомих експериментальних результатів отримано необхідні константи запропонованої феноменологічної моделі.

Феноменологічні співвідношення безпосередньо не залежать від параметрів матеріалу на мікрорівні, а залежать від набору параметрів на макрорівні, які визначаються з експериментальних спостережень. Феноменологічні моделі легко адаптуються до числових методів розв'язання граничних задач на макроскопічному рівні.

Моделі, згадані вище, не залежать від швидкості деформування. Вони враховують залежність поведінки деформація - напруження тільки від траєкторії навантаження. Уточнення моделей були досягнуті в роботі [15], де вже враховувалась залежність від швидкості деформування (навантаження). Формулювання цих моделей враховує і розвантаження у співвідношеннях деформації - напруження.

На кожній з наведених діаграм є початкова лінійна ділянка OA . Зростання та зменшення напруження йде по прямій лінії, а деформації при цьому малі. Межа плинності залежить від температури і визначається координатою точки A . Якщо при напруженні σ , яке відповідає точці C діаграми, зразок розвантажити, то частина деформації ε^e (пружна складова загальної деформації зразка зникне), а та деформація, яка залишається буде саме пластичною деформацією ε^p .

На рисунку 1 показано і пружне розвантаження зразка по прямій CD , яка паралельна лінії OA . Таке припущення механізму розвантаження тільки у загальних рисах відображає дійсну картину деформації матеріалу при малих деформаціях. При великих деформаціях (10% і більше), розвантаження зразка буде нелінійним. Взагалі навіть при малих деформаціях навантаження і розвантаження зразка йде по різних лініях на діаграмі, але при малих деформаціях (до 6%) цими відхиленнями при дослідженні напружено-деформованого стану твердого тіла, нехтують.

Таким чином, механічні характеристики матеріалу при дослідженні процесів деформування задаються у вигляді миттєвих діаграм розтягування зразків, які отримано при різних значеннях температури, і при необхідності дозволяють побудувати інтегральну діаграму матеріалу. Обробка експериментальних даних роботи [8] дозволила побудувати таблиці і діаграми для різних значень температури.

Локальні діаграми матеріалу при активному навантаженні – OAB і BCD при розвантаженні показано на рисунку.

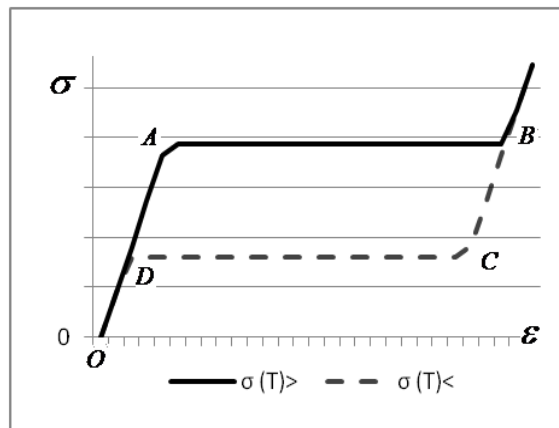


Рисунок 1. Модель діаграми матеріалу з пам'яттю форми

Характерною рисою діаграми такого матеріалу в точці є зуб плинності при переході від чисто пружної ділянки (фаза аустеніт) до горизонтальної ділянки з наступною зміною фази (фаза мартенсит). Площа під кожним піком певним чином відображає теплоту трансформації матеріалу. Величина зубу плинності моделюється окремо і порівнюється з експериментальними даними. При цьому необхідно окремо розв'язувати рівняння теплопровідності і по розбіжності температур визначати

додаткові значення деформації і напруження. Фактично діаграма з зубом плинності є проєкцією траскторії, яка йде по миттєвій термомеханічній поверхні (МТП).

Конкретизація визначальних рівнянь передбачає завдання МТП. Для проведення розрахунків необхідно цю функцію задати аналітично або у вигляді таблиці експериментальних даних $(\sigma)_i, (\varepsilon)_i, i = 0, 1, \dots$ при фіксованих значеннях температури. Маючи МТП та закон, за яким змінюється температура в тій чи іншій точці зразка, можна провести уточнення локальної діаграми матеріала.

2.1.3. Узагальнення фізичних співвідношень

Дані про особливості пластичного деформування термо-псевдо-пружно-пластичних матеріалів наведено в роботах [12, 13].

Одним з аспектів загальної проблеми розв'язання нестационарних задач для непружних тіл є вибір визначальних співвідношень зв'язку між напруженням і деформацією. Цей вибір обґрунтовується узгодженістю з експериментом і тісно пов'язаний з досліджуваними процесами деформації. Детальні відомості з цього питання можна знайти в роботах [14-16].

Тензор повної деформації представимо як суму пружної складової ε_{ij}^e , стрибка деформації при фазовому переході ε_{ij}^T , пластичної деформації ε_{ij}^p і деформації ε_{ij}^θ , яка викликана температурними змінами. В результаті цього можна записати

$$\varepsilon = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T + \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^\theta.$$

Пружні деформації визначаються за допомогою закону Гука. Деформації викликані температурними змінами задовольняють закону лінійного теплового розширення. Стрибок деформацій при фазовому переході будемо визначати так

$$\varepsilon_{ij}^T = \varepsilon_T(T) \frac{\partial f_\gamma(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}$$

де функція $f_\gamma(\sigma_{ij}) = 0$ задає межі деякої поверхні в просторі напруги. При переході через цю поверхню стрибком зростає деформація, обумовлена фазовим переходом. Будемо задавати її наступним чином

$$f_\gamma(\sigma_{ij}) = \sqrt{\frac{3}{2}(S_{ij}S_{ij})} - \sigma_\gamma(T),$$

де

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij}, \\ \sigma_\gamma(T) &= \sigma_M(T), S_{ij}\dot{S} > 0, \\ \sigma_\gamma(T) &= \sigma_m(T), S_{ij}\dot{S} < 0. \end{aligned}$$

Звідси остаточно отримаємо

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{3\varepsilon_T(T)}{2\sigma_\gamma(T)} S_{ij}.$$

Пластичні деформації мають задовольняти співвідношенням тієї чи іншої теорії пластичності. У загальному вигляді фізичні співвідношення можна представити так [36]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t} = a_{ijkl} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial t} + b_{ij}. \quad (2.2)$$

Величини a_{ijkl}, b_{ij} можуть залежати від компонент тензорів напружень, деформацій, а також від інших параметрів.

Отримано приклади запису класичних фізичних співвідношень для теорії малих пружно-пластичних деформацій, теорії течії з ізотропним зміцненням, теорії процесів деформування по траєкторіях малої кривизни розглядаються прості або близькі до них процеси деформування. Співвідношення теорії процесів деформування по траєкторіях малої кривизни в швидкостях напружень і деформацій, придатних для дослідження обох процесів, наведено в першому розділі роботи.

Проведемо узагальнення фізичних співвідношень для застосування при дослідженні ФГМ. У випадку, коли ФГМ складається з двох різних матеріалів (кераміка і метал) користуючись моделлю ТТО (Tamura-Tomota-Ozawa [1]) для (2.2) запишемо

$$\begin{aligned} a_{ijkl}(x, y, z) &= a_{ijkl}^{(1)} V_1(x, y, z) + a_{ijkl}^{(2)} V_2(x, y, z), \\ b_{ij}(x, y, z) &= b_{ij}^{(1)} V_1(x, y, z) + b_{ij}^{(2)} V_2(x, y, z), \\ V_1(x, y, z) + V_2(x, y, z) &= 1. \end{aligned}$$

Ця модель базується на припущенні, що величина напруження та деформації на кожній ділянці двофазного матеріалу залежить від напруження та деформації фазових складових, що зазнали впливу, з їх об'ємними частками, як зазначено (1.1).

$$\sigma = \sigma_1 V_1 + \sigma_2 V_2, \varepsilon = \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2,$$

де σ та ε представляють напруження та деформації в кожній області двофазного матеріалу з об'ємними частками V_1, V_2 . Запропонована для усереднення модель здатна визначити межу текучості ФГМ.

$$\sigma_s = \sigma_{s1} \left[V_1 + \left(\frac{q+E_1}{q+E_2} \right) \left(\frac{E_2}{E_1} \right) (1 - V_1) \right], \quad (2.3)$$

де σ_{s1} вказує на межу текучості матеріалу першої фази. Тут q вказує на деяке емпіричне співвідношення напруження до деформації, яке залежить від типу матеріалу та мікроструктурних взаємодій між двома фазами.

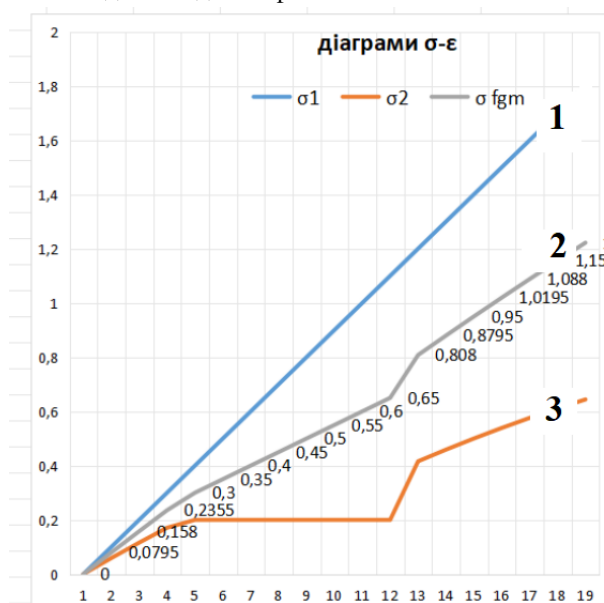


Рисунок 2. Діаграма ФГМ при активному навантаженні ($V_1=V_2=0,5$)

Розроблена методика дозволє отримувати діаграми напруження - деформація конкретного ФГМ в заданій матеріальній точці (лінія 2) на базі відповідних діаграм складових (лінії 1 для кераміки і 3 для матеріалів з ПФ). На рисунку 2 діаграми подано в безрозмірному вигляді в координатах $\sigma/\sigma_s, \varepsilon \cdot 10^4$.

Висновки.

Узагальнено визначальні рівняння теорії процесів непружного деформування ізотропних матеріалів вздовж траєкторій малої кривизни на двокомпонентні функціонально-градієнтні матеріали. При цьому деформаційні властивості функціонально-градієнтного матеріалу визначаються через аналогічні властивості складових матеріалів з використанням заданого закону їх об'ємного вмісту.

Більшість праць направлена на опис поведінки матеріалів точці і існує потреба у розробці теорії термо-псевдо-пружно-пластичності придатної для опису деформації в широкому діапазоні значень температур та швидкостей деформації при довільному навантаженні тіла.

На основі відомих експериментальних результатів отримано необхідні константи запропонованої феноменологічної моделі. Проведено узагальнення ряду відомих фізичних співвідношень теорій пластичності для сплавів з ПФ. Встановлено, що класичні діаграми матеріалів представляють собою криву, що огинає сімейство діаграм матеріалу в матеріальній точці.

1. V. Boggarapu, R. Gujjala., S. Ojha, Sk. Acharya, P. Venkateswara, S. Chowdary, D. Gara, State of the art in functionally graded materials, *Composite Structures*. **262**, 113596 (2021), //doi: 10.1016/j.compstruct.2021.113596.
2. J.N. Reddi, Analysis of functionally graded plates, *Int. J. Numerical Methods in Engng.*, **47**, 663 – 684 (2000).
3. X. Zhao, K.M. Liew, Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method, *Comput. Methods App.Mech. Engng.*, **198**, 2796 – 2811 (2009).
4. S.M. Sklepus, Method of Solving Geometrically Nonlinear Bending Problems of Functionally Graded Shallow Shells of Complex Shape, *Int. Appl. Mech.* **59**, N 6, 725–733 (2023).
5. Ю.Н. Шевченко, Р.Г. Терехов, *Физические уравнения термовязкопластичности*, Киев: Наук. думка, (1982).
6. Yu.N. Shevchenko, V.G. Savchenko, Three-Dimensional Problems of Thermoviscoplasticity: Focus on Ukrainian Research (Review), *Int. Appl. Mech.*, **52**, N 3, 217 –271 (2016)

Газодинаміка і міцність круглого сопла для щільних компоновок літальних апаратів

Н.С. Прядко¹, К.В. Тернова

Інститут технічної механіки НАН і ДКА України, Дніпро, Україна

¹ np-2006@ukr.net

У ракетно-космічній техніці під час вирішення завдань створення щільних компоновок літальних апаратів (ЛА) виникають завдання суттєвого зменшення довжини сопла з збереженням ступеня його геометричного розширення. Розглядається принципово новий тип надзвукового сопла ракетного двигуна - найпростіший із можливих варіантів сопла для вирішення подібних задач - укорочене конічне сопло з насадком сферичної форми. Діаметр вихідного перерізу насадка відповідає необхідному ступеню розширення потоку соплового газу, а радіус його контуру дозволяє оптимізувати рішення задачі ущільнення ЛА. Незвичайна форма такого сопла вимагає детального дослідження характеристик течії і напруг у стінці насадка для розробки рекомендацій до проектних розробок. У статті розглядаються можливі варіанти геометрії насадка та їх вплив на його газодинамічні характеристики.

Ключові слова: ракетний двигун, укорочене сопло, дзвоноподібний насадок, імпульс сопла, хвильова структура потоку газу.

Вступ

Інтерес до сопла з кардинально укороченим профілем виник у зв'язку з розробленням літальних апаратів щільного компоновання. Укорочений профіль сопла дає можливість суттєво зменшити або виключити наявність вільних об'ємів, які потрібні для розміщення повнорозмірного сопла, спрофільованого за лінією течії [1,2]. Розробники ЛА за щільним компонованням звернули увагу на нові зміни круглого сопла, що дають можливість значно зменшити об'єми, а тим самим зменшити масу двигуна. Спроби ущільнити компоновання, зберігаючи довжину сопла незмінною (наприклад, застосовуючи втоплене в камеру сопло, розсувні секційні сопла, тощо), призводять, як правило, до необґрунтовано значних ускладнень конструкції соплового блока та зменшення його енергомасової ефективності у складі ЛА.

Тому розробники ЛА щільного компоновання віддають перевагу, як правило, стаціонарним сопловим блокам з незмінною стиснутою геометрією та газодинамічними органами керування вектором тяги.

1. Огляд літературних джерел

Початок створенню надзвукових сопел зі стиснутим профілем покладено працями Г. Гудерля, Р. Рао, А. А. Сергієнка, Л. Є. Стерніна, Ю. Д. Шмиглевського, присвяченими завданню варіаційної побудови контуру надзвукового сопла максимальної тяги для заданої його довжини [3]. У роботі Л.В.Гогіша [4], запропоновано афінний стиск профілю сопла, яке дає змогу зменшити довжину сопла настільки, що безударне вирішення варіаційного завдання контуру стає неможливим.

У проектних розробках щільного компоновання двоступінчастої твердопаливної ракети з частково зтопленим соплом другого ступеня ракети може бути енергетично виправданим варіант стискання не всього профілю сопла, а тільки його невтопленої частини. При цьому стискання може бути не афінним, а таким, що враховує енергомасові характеристики сопла разом з хвостовим відсіком ракети, тип і розміщення органів керування вектором тяги. Порівняння імпульсних характеристик

звичайних профілів (спрофільованих по лінії струму) свідчить на користь останніх. Однак у разі оцінювання їх у складі ракети із жорсткими габаритними обмеженнями за урахуванням застосування нових компоновальних рішень, матеріалів, тощо перевага може виявитися на боці вкорочених сопел із дзвоноподібними насадками [3,4].

Вирішення проблеми створення щільних компоновань літальних апаратів багато зарубіжних і вітчизняних дослідників бачать у застосуванні укорочених сопел з насадками адекватної форми (зокрема дзвоноподібних, близьких за формою до днища попереднього ступеня ракети, циліндричних, що замінюють хвостову обичайку ракети, та ін.), а також кільцевих сопел внутрішнього розширення з примусовим розвертанням потоку в горлі сопла (так званих тарілчастих сопел). Прикладом можуть бути розробки щільного компоновання твердопаливної двоступінчастої ракети США [5].

У звичайному компонованні (рис. 1, а) ступенів твердопаливної двоступінчастої ракети двигуни 1 і 3 стикаються через проміжний відсік 2, у якому розміщені поворотне сопло 5, розсувні насадки 6 і допоміжні агрегати. У щільному компонованні (рис. 1, б) двигуни 1 і 3 не мають проміжного відсіку і мають загальне днище 4, що виконує роль сопла для двигуна 3 після відокремлення попереднього ступеня ракети.

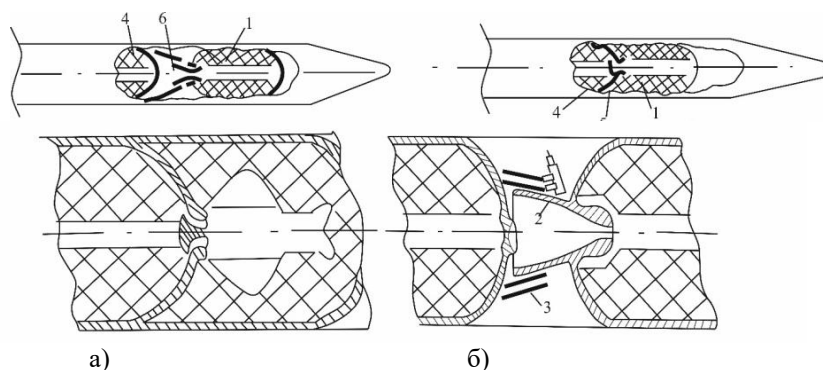


Рис. 1 Порівняння звичайного і щільного компоновання твердопаливної двоступінчастої ракети: а — щільне — двигун другого ступеня з тарілчастим соплом; б — звичайне — двигун другого ступеня з розсувним багатосекційним соплом

Зараз у відкритих публікаціях з багатьох причин відсутні відомості щодо досліджень подібних укорочених сопел з дзвоновими насадками. Тому результати досліджень особливостей газодинаміки та міцності такої незвичайної форми сопла становить безперечний інтерес для проєктантів, які займаються розробками щільних компоновок ЛА.

Мета роботи – розглянути особливості газодинамічних і міцностних характеристик укорочених сопел з дзвоноподібним насадком.

2. Імпульс сопла з насадком

Тяга двигуна з соплом, спрофільованим по лінії струму, на робочому режимі течії ($p_a = p_n$) визначається за співвідношенням:

$$P = \dot{m}W + F_a(p_a - p_n), \quad (1)$$

де $\dot{m} = \frac{\mu A(\gamma) F_* p_k}{\sqrt{RT_k}}$ – масова секундна витрата газу;

$$A(\gamma) = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} - \text{коефіцієнт наведення};$$

$$W_a = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} RT_k \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_k} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} - \text{швидкість газу на зрізі сопла; } F_a - \text{площа зрізу}$$

сопла; p_k – тиск у камері; p_a – тиск на зрізі сопла; R – газова постійна; T_k – абсолютна температура газу в камері згоряння; μ – коефіцієнт витрати газу через сопло; γ – показник процесу витікання газу із сопла, що залежить від фізико-хімічних властивостей палива та умов витікання; p_n – тиск навколишнього середовища.

При проектних розробках тяга зазвичай обчислюється з використанням газодинамічних функцій:

$$P = F_* p_k \left(\mu \varphi_c \gamma \lambda_a \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \xi_a^2 \left(p_a - \frac{p_n}{p_k} \right) \right), \quad (2)$$

$$\text{де } \xi_a = \frac{d_a}{d_*} = \sqrt{\frac{F_a}{F_*}} = \sqrt{\frac{1}{q(\lambda_a)}} - \text{відносний діаметр потоку газу на зрізі сопла; } q(\lambda_a) =$$

$$\frac{q_a W_a}{q_* W_*} = \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda_a^2 \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \lambda_a - \text{наведена щільність потоку маси на зрізі сопла;}$$

$$p_a = \frac{p_a}{p_k} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda_a^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}; \lambda_a = \frac{W_a}{a_*} = \frac{M_a \sqrt{\frac{\gamma+1}{2}}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2}} - \text{наведена швидкість газового потоку}$$

на зрізі сопла; $M_a = \frac{W_a}{a}$ – число Маха потоку газу на зрізі сопла; $a = \sqrt{\gamma RT}$ – швидкість звуку потоку в поточному перерізі сопла; T – статична температура потоку; a_* – швидкість звуку в критичному перерізі сопла; W_a – швидкість потоку на зрізі сопла; T_k – повна (у камері) температура потоку; q – щільність газу; μ – коефіцієнт витрати сопла; φ_c – коефіцієнт втрат швидкості в соплі.

Питомий імпульс двигуна:

$$I_y^\infty = \frac{P}{\dot{m}} = \frac{1}{\mu A(\gamma) \sqrt{RT_k}} \left(\mu \varphi_c \gamma \lambda_a \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} + \xi_a^2 \left(p_a - \frac{p_n}{p_k} \right) \right) \quad (3)$$

де φ_c – коефіцієнт теплових втрат у камері згоряння; R – газова постійна продуктів згоряння в камері; $\bar{F}_a = \frac{F_a}{F_*}$ – ступінь геометричного розширення сопла; F_a – площа зрізу сопла; F_* – площа критичного перерізу сопла.

Коефіцієнт тяги круглого сопла Лавалю

$$K_T = \frac{P}{p_k f_*} = \frac{2\gamma}{\sqrt{(\gamma^2-1)}} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \sqrt{1 - \left(\frac{p_a}{p_k} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left[1 + \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{1}{\left(\frac{p_a}{p_k} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \left(\frac{p_a}{p_k} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right)} \right] \quad (4)$$

де P – тяга; f_* – площа критичного перерізу сопла; p_k – тиск у камері; p_a – тиск на зрізі сопла; p_n – тиск довкілля; γ – показник адіабати

Формально коефіцієнт тяги показує наскільки надзвукова частина сопла, спрофільованого по лінії струму, збільшує тягу сопла з критичною площею на виході, і залежить тільки від ступеня розширення потоку в соплі. Для укороченого сопла з дзвоноподібним насадком K_T визначатиметься з урахуванням геометрії насадка і втрат імпульсу в ньому.

Під час проектних розробок укороченого сопла для щільних компоновань виникає низка специфічних завдань, не характерних для процесу створення круглого сопла класичної схеми (Лавалю), основним з яких буде визначення характеристик течії в соплі (особливо втрат імпульсу та розподілу напруги у стінці сопла) та вибір оптимальних параметрів «стиснення» профілю сопла.

При розробці математичної моделі розрахунку характеристик укороченого сопла з дзвоноподібним насадком, що враховує двофазність течії, застосування розрахункової схеми Годунова для розв'язування рівнянь газової динаміки стикається з труднощами через похибки, пов'язані з великим розворотом (тобто з великими градієнтами швидкості потоку) за кутовою точкою переходу укороченої частини сопла в насадок і на зрізі укороченого сопла (на вході в насадок). Для цього розрахункову схему вдосконалено: в процес розрахунку введено операцію автоматичної побудови розрахункової сітки за лініями течії.

Вибір профілю і довжини насадка визначається конкретними умовами поєднання ступенів. При цьому враховуються загальні підходи до вибору довжини укороченої частини та конфігурації насадка, що забезпечують максимальну ефективність укороченого сопла з насадком. Проектування сопла з насадком має охоплювати вибір профілю базового сопла, його вкорочення і виведення частини, що залишилася, на заданий ступінь розширення контуром з великим градієнтом (dy/dx).

3. Втрати імпульсу в укороченому соплі РДТП

Нижче представлені результати досліджень параметрів двофазного потоку газу в укорочених соплах з дзвоноподібними насадками для ракетного двигуна твердого палива з різним ступенем розширення $\xi_a^2 = F_a/F_* = 31,4; 57,6; 100$ за $\gamma = 1,166$. Розглядалась двофазна полідисперсна течія, що враховує процеси коагуляції та дроблення частинок, а також зворотний вплив частинок на газ. Як початковий розподіл частинок за розмірами було обрано нормальний логарифмічний закон у діапазоні 0,5-10 мкм; розглядався рух 10 фракцій. Параметри частинок у вхідному перерізі задавали такими, що дорівнюють параметрам газу (за умови відсутності швидкісного й температурного відставання).

На рис. 2 наведено геометрію деяких варіантів дзвоноподібних насадків

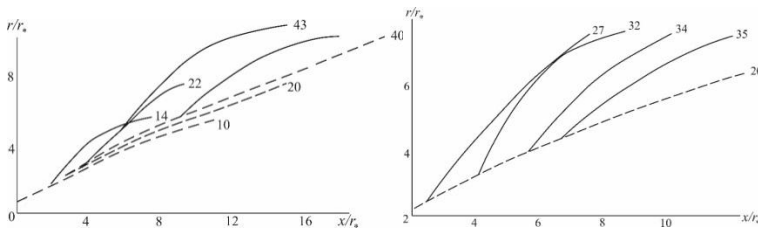


Рис. 2 Геометрія деяких варіантів дзвоноподібних насадків: номери контурів відповідають номерам в табл. 1.

На рисунках пунктиром позначені базові профільовані лінії струму контуру сопла Лавала (№№ 10, 20, 40). Втрати в соплах із насадком ставилися до втрат у базовому соплі.

Основні параметри досліджених варіантів укорочених сопел із дзвоноподібними насадками наведено в табл. 1.

Як показали розрахунки, втрати питомого імпульсу тяги визначаються переважно втратами на розсіювання (ξ_p) і відставання твердих частинок (ξ_{ϕ}). Оцінки інших втрат показали, що їхній вплив значно менший.

На рис. 3 наведено втрати питомого імпульсу потоку на розсіювання та двофазність потоку для цих варіантів.

Так, насадки сопел 35 і 36 за однакового $x_0 = 7,4$ ($x_n = 12,2$ для насадка 35 і 10,3 для насадка 36) мають різні втрати на розсіювання — відповідно 5,62 % та 7,29 %, а насадки 34 і 36 за $x_n = 10,3$ і $x_0 = 5,5$ і 7,4 мають однакові втрати на розсіювання (7,29 %).

Таблиця 1

Основні параметри досліджених варіантів укорочених сопел

Варіант сопла	Геометричні параметри		Втрати імпульсу	
	x_n/r_*	x_0/r_*	$\xi_p, \%$	$\xi_\Phi, \%$
10	10,85	—	2,0	2,7
11	10,85	6,8	2,8	2,73
12	9,58	5,2	3,0	2,85
13	8,63	4,0	4,20	3,06
14	7,60	1,8	5,50	3,46
20	15,19	—	2,6	5,87
21	9,50	5,8	9,1	6,82
22	2,50	4,0	9,3	7,0
23	9,50	2,80	9,4	7,87
24	11,0	3,069	—	2,74
25	11,0	3,069	—	2,695
26	11,0	4,182	—	2,677
27	7,65	4,182	—	2,560
28	11,0	8,322	—	2,740
29	9,15	4,182	—	2,600
31	11,0	6,888	—	2,730
32	8,8	2,7	10,33	7,5
33	9,6	2,7	8,93	6,95
34	10,3	5,5	7,290	5,8
35	12,2	7,4	5,62	5,5
36	10,3	7,4	7,29	5,61
40	20,88	—	2,9	4,18
41	18,00	9,20	3,6	4,55
42	15,04	5,90	5,1	4,81
43	15,04	5,40	5,7	5,0

x_0 – довжина укороченої частини сопла (від критики до входу в насадок);

x_n – довжина сопла з насадком;

x_a – довжина базового сопла спрофільованого по лінії струму (його характеристики на графіках позначені пунктирною лінією)

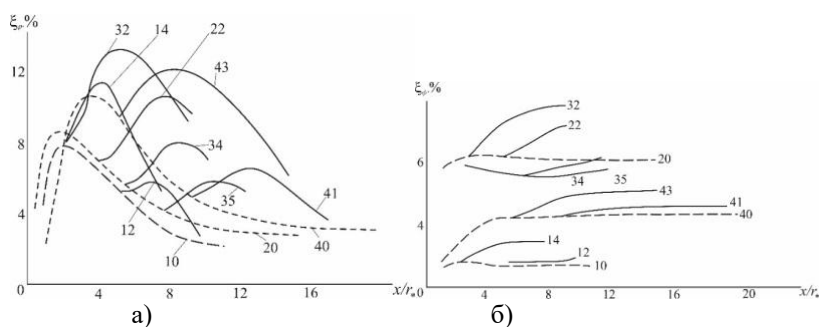


Рис. 3 Втрати питомого імпульсу потоку: на розсіювання (а) та двофазність потоку (б)

Двофазні втрати насадків 32 і 33, що мають однакові значення $x_0 = 2,7$ і різну довжину $x_n = 8,8$ і $9,6$, становлять відповідно 7,5 % і 6,95 %, а насадки 21, 22 і 23 за однакової довжини сопла $x_n = 9,5$ мають двофазні втрати відповідно 6,81 %, 7,0 % та 7,87 %. При цьому за певного ступеня заглиблення x_0 кутової точки у надзвуковому потоці відбувається помітне збільшення двофазних втрат. Так, насадки 34 і 35, 36 за $x_0 = 5,5$ і $7,4$ відповідно мають двофазні втрати, близькі до втрат базового невикороченого сопла, а для насадків 32 і 33, що мають $x_0 = 2,7$, втрати приблизно на 2 % більші.

Зменшення відносної довжини обрізаного базового сопла (лінійні розміри віднесено до r_0) збільшує максимальне значення втрат на розсіювання та двофазні витрати. Однак, якщо втрати розсіювання до зрізу насадка x_0 зменшуються, двофазні втрати залишаються практично незмінними після виходу на максимальне значення, тобто до зрізу насадків нерівномірність параметрів потоку для розглянутих варіантів мало залежить від ступеня заглиблення кутової точки (переходу) x_0 проти потоку, а нерівноважність процесів прискорення частинок помітно залежить від характеру розширення потоку в насадку (заглиблення x_0 кутової точки в потік і довжини насадка $x_n - x_0$, де x_0 — довжина укороченої частини базового сопла; x_n — довжина укороченого сопла з насадком).

Аналіз втрат імпульсу потоку в укорочених соплах з дзвоноподібними насадками показав, що відносні (щодо втрат у базовому соплі) втрати на розсіювання практично втричі перевищують двофазні втрати, причому питомий імпульс тяги добре корелює відповідно до параметра $(x_n - x_0)/x_n$.

4. Газодинамічні характеристики потоку газу в укороченому соплі з дзвоноподібним насадком

На рис. 4 наведено ескіз експериментальної моделі досліджуваного сопла. Таке сопло було виготовлено і випробувано на холодному повітрі в ІТМ НАНУ та ДКАУ.

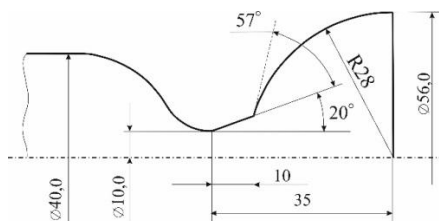


Рис. 4 Ескіз експериментальної моделі укороченого сопла з дзвоноподібним насадком

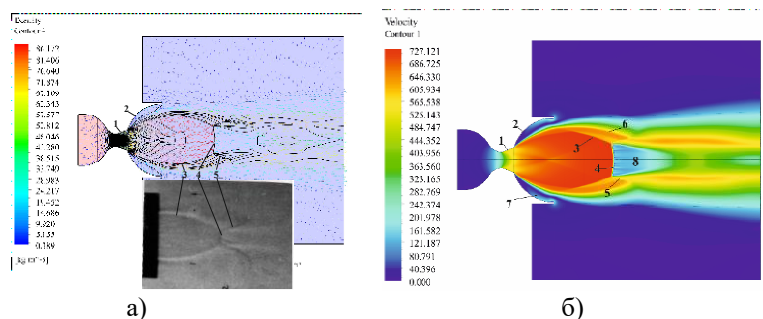


Рис. 5. Порівняння розрахунку з експериментом для укороченого сопла з дзвоноподібним насадком: а) розподіл щільності у газовому потоці, тіньова картина течії; б) розподіл числа Маха у потоці

За критичним перетином (діаметр 10 мм) іде конічна ділянка сопла Лавалю з кутом напіврозкриття 20° . Конічна ділянка переходить у дзвоноподібний насадок з кутом входу (щодо стінки сопла) в насадок 57° . Перехід від сопла в насадок здійснюється на кутовій точці. Кут виходу з насадка — 0° ; довжина конічної ділянки сопла — 10 мм; довжина укороченого сопла з насадком — 35 мм; радіус стінки насадка — 28 мм; геометричний ступінь розширення сопла з насадком становив $F_a/F_* = 31,4$.

Численні дослідження потоку газу в укороченому соплі з дзвоноподібними насадками, використаними в експериментальних дослідженнях, проводились з використанням програмного пакета «АНСІС».

У течії газу із сопла з насадком диск Маха 4 (див. рис. 5) віддалений від зрізу укороченого сопла на відстані $3,5 d_a$, ук (тут d_a , u_k — діаметр зрізу вкороченого сопла Лавалю). Тобто довжина першої «бочки» при витіканні потоку газу із сопла Лавалю в насадок зменшується приблизно на 20 % порівняно з величиною $4,57 d_{a,л}$ (див. вище) для сопла Лавалю без насадка. Максимальний діаметр першої «бочки» при цьому зменшується у 1,35 раза. Тобто поздовжній і поперечний розміри «бочки» зменшуються приблизно пропорційно (з урахуванням неточностей вимірювань за розрахунковою та експериментальною картинами течії). Диск Маха за течії з насадком збільшується в діаметрі (порівняно з течією за соплом без насадка), а стрибки 3 та 5 мають більшу інтенсивність. Це саме спостерігається на тіньовому фото течії за зрізом дзвоноподібного насадка (див. фото на рис. 5, а). Завислі стрибки 4 і 6 беруть початок практично від краю укороченого сопла Лавалю (див. рис. 5, б). Відривна зона 7 формується вільним проникненням навколишньої атмосфери в простір між вільною межею потоку газу із сопла та стінкою насадка. Число Маха потоку, що розширився, перед диском Маха 4 становить $M \approx 5,4$. Розраховане за одновимірною теорією значення швидкості перед диском Маха дорівнює $M \approx 5,32$. За диском Маха спостерігається розвинена зона 8 з низькою швидкістю потоку (див. рис 5, б).

Таким чином, слід зазначити добру відповідність характеристик течії газу, отриманих у розрахунку та за експериментальних продувань холодним повітрям. Вищесказане свідчить про якісну та кількісну верифікацію результатів розрахунків у вкороченому соплі Лавалю з дзвоноподібним насадком.

Аналіз течії в соплі с насадком № 1 (а) і № 2 показав, що біля стін обох насадків течія безвідривна. За кутовою точкою 1 входу в насадок утворюється висячий стрибок 2 і простягається до зрізу 3 насадка, практично повторюючи форму його стінки. У довгому насадку (рис. 6, а) за стрибком 2 біля стінки насадка формується розвинена зона низької швидкості 4 і підвищеного тиску, що спричинюється розвертанням потоку в стрибку. Такої ділянки практично немає у короткому насадку сопла № 2 (рис. 6, б).

Такої ділянки практично немає у короткому насадку сопла № 2 (рис. 6, б). Це пояснюється великим кутом притікання потоку до стінки насадка після розвертання на кутовій точці входу в насадок. Далі за зрізом насадка потік із зони 4 розширюється і утворює зону 5. Потік, що витікає із зони підвищеного тиску 4, деформує висячий стрибок 2 першої «бочки» надзвукового потоку відразу за зрізом насадка в зоні 6. Вільна межа 7 потоку за зрізом обох сопел відхиляється від осі на кут, який визначається течією Прандтля — Маєра на кутовій точці зрізу. В обох випадках утворюється зона 5 потоку, що розширюється. Ці зони відрізняються для порівнюваних сопел своєю формою та інтенсивністю (швидкістю і тиском). У соплі № 2 висячий стрибок 2 (відносно більшої інтенсивності) відтісняє зону 5 у вільний навколишній простір. При цьому сама лінія стрибка віддаляється від осі сопла, а швидкість потоку збільшується.

За розподілом статичного тиску на зрізі насадків № 1 і № 2 (рис. 7) за тиску перед соплом $p_0 = 20, 50, 100, \text{ і } 200$ бар і тиску зовнішнього середовища $p_n = 0,1$ бар видно, що характер течії в ядрі різний для сопел із різними насадками. Для сопла з довгим насадком статичний тиск монотонно зменшується в усіх випадках від осі сопла до точки мінімуму $\approx 0,9 \cdot R/R_a$, де R — поточне значення радіуса; $R_a = 28$ мм — радіус стінки насадка на виході.

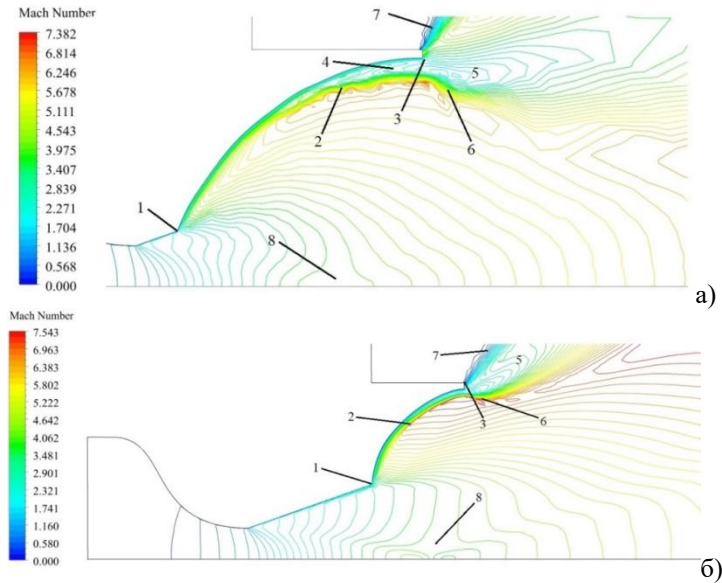


Рис. 6 Ізоліїнн чисел Маха течій у соплі с насадком № 1 (а) і № 2 (б) за вхідного тиску $p_0 = 50$ бар у разі роботи у верхніх шарах атмосфери ($p_n = 0,1$ бар)

Зі збільшенням R тиск лінійно зростає до максимального значення. У соплі з коротким насадком (сопло № 2) тиск від осі зменшується немонотонно (криві 5, 6 на рис. 7), спостерігаються ділянки сталого тиску, причому рівень тиску пропорційний значенню вхідного тиску. Далі за вказаною точкою мінімуму на зрізі тиск монотонно зростає, проте значно менше, ніж для сопла № 1.

Розподіл тиску на стінці насадка (рис. 8) відповідає розподілу швидкості та хвильовій структурі потоку насадка. Після різкого падіння тиску на кутовій точці (входу в насадок) тиск на стінці зростає до максимального значення в зоні зрізу насадка.

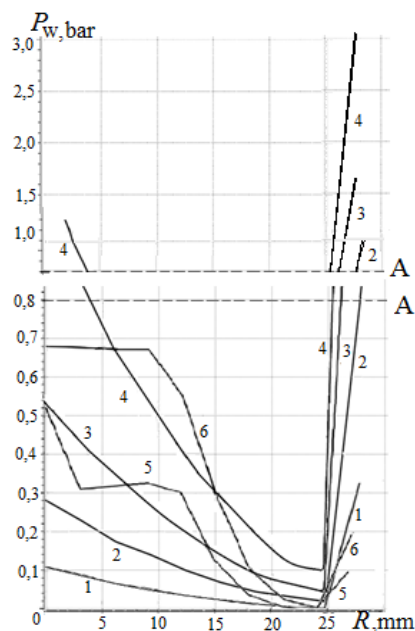


Рис. 7. Розподіл (по радіусу) статичного тиску на зрізі укороченого сопла з насадком № 1 (криві 1—4) та № 2 (криві 5, 6) за зовнішнього тиску $p_n = 0,1$ бар та вхідного тиску $p_0 = 20$ бар (крива 1), 50 бар (криві 2 і 5), 100 бар (криві 3 і 6), 200 бар (крива 4)

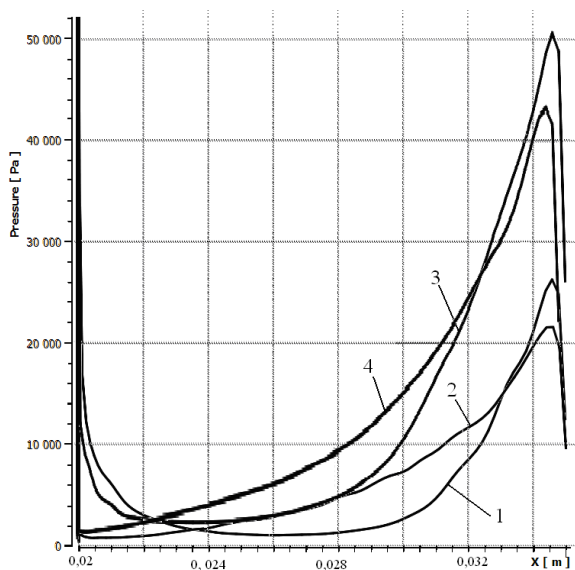


Рис. 8. Розподіл тиску на стінці насадка з кутами, утвореними на вході, 30° (криві 1, 3) та 70° (криві 2, 4), під час роботи у висотних умовах ($p_n = 0,1$ бар) та за початкового тиску 50 бар (криві 1, 2) і 100 бар (криві 3, 4)

При цьому відразу за кутовою точкою тиск (криві 2 і 4) у насадку з великим кутом (70°) більший від відповідного тиску (криві 1 і 3) в насадку з меншим (30°) кутом. Це пояснюється більшою інтенсивністю стрибка ущільнення, що примикає до стінки насадка, внаслідок більшого розвертання потоку на кутовій точці у хвилях Прандтля—Маєра і, відповідно, більшого кута примикання ліній течії до стінки.

У зрізі насадка спостерігається інша «поведінка» тиску. Тиск (у максимумі) біля насадка з кутом входу 30° більший, ніж у насадка з кутом входу 70° . Це пояснюється меншим радіусом кривизни стінки насадка біля зрізу за кута входу 30° внаслідок однакових кутів нахилу стінки на виході насадків. Менша кривизна стінки зумовлює інтенсивніший стрибок ущільнення і, відповідно, більший тиск на стінці.

Отже, під час роботи в земних умовах ($p_n = 1$ бар) за кутовою точкою насадка (досліджених конфігурацій) до його зрізу між межею надзвукової течії, що виходить з конуса, і стінкою насадка спостерігається розвинена відривна зона з великомасштабним вихором. Зміна кута нахилу твірної дзвоноподібного насадка не вносить істотної зміни до величини статичного тиску за кутовою точкою (що дорівнює $\approx 0,9p_n$).

У разі роботи у висотних умовах ($p_n < 0,1$ бар) потік за кутовою точкою насадка за $p_0 > 50$ бар розгортається в напрямку до стінки насадка і гальмується на ній у завислій хвилі стискання з утворенням біля стінки розвиненої відривної зони з дрібномасштабною вихровою структурою. Тиск на стінці насадка після різкого падіння на кутовій точці (входу в насадок) зростає до максимального значення в зоні зрізу насадка. При цьому відразу за кутовою точкою зміна тиску по довжині насадка має подібний характер за різних кутів входу в насадок. Рівень тиску в насадку з великим кутом входу (70°) більший, ніж у насадку з меншим (30°) кутом. Тиск біля зрізу насадка з меншим кутом входу (30°) більший, ніж у насадка з кутом входу 70° . Це пояснюється меншим радіусом кривизни (внаслідок однакових кутів нахилу стінки на виході насадків) стінки насадка біля зрізу за кута входу 30° .

Коефіцієнт імпульсу сопла з насадком залежить від тиску зовнішнього середовища. В земних умовах за $p_n = 1$ бар (рис. 4.59, а, поз. 1) зі збільшенням тиску на вході в сопло з 50 до 100 бар коефіцієнт імпульсу сопла зменшується на $\sim 14\%$.

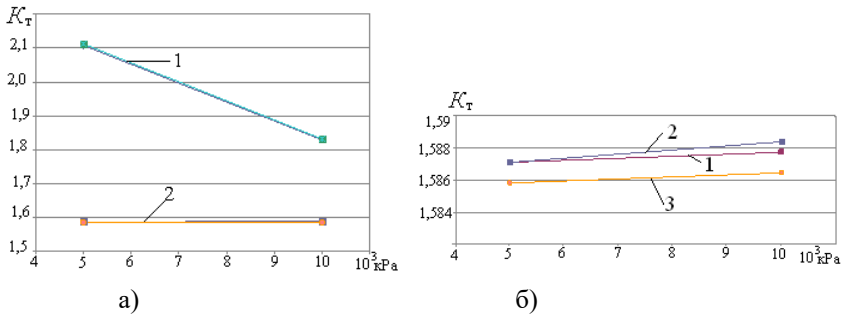


Рис. 9. Залежність коефіцієнта імпульсу вкороченого сопла з насадком від тиску на вході в сопло та кута входу в насадок (1 — 30° , 2 — 50° , 3 — 70°):

а) — порівняння коефіцієнтів у різних умовах роботи: 1 — за $p_n = 1$ бар; 2 — $p_n = 0,1$ бар; б) — масштабування залежності 2

Це пояснюється великим розвертанням потоку на кутовій точці входу в насадок і, відповідно, меншим тиском потоку, що розвернувся. На рис. 10, а) крива 2 (залежність K_T від тиску на вході в сопло) практично не залежить від зміни тиску на вході в сопло. Аналіз цієї залежності у збільшеному масштабі (рис. 10, б) показує незначну залежність величини K_T від кута входу в насадок. За більшого кута (70°) значення K_T менше на $\sim 0,1\%$ порівняно зі значенням за кута 30° . Це може пояснюватися як вищезгаданою причиною (більший розворот потоку), так і похибками розрахунку, оскільки при цьому не спостерігається подібна залежність для кута 50° . Отже, коефіцієнт імпульсу вкороченого сопла з насадком у земних умовах практично не залежить від конфігурації насадка і знижується зі збільшенням тиску на вході в сопло. На висоті коефіцієнт практично залежить від тиску на вході в сопло. При цьому

спостерігається незначна тенденція до впливу зміни кута входу в насадок на коефіцієнт і зменшення коефіцієнта зі збільшенням кута входу в насадок.

Висновки

1. Під час проектних розробок укороченого сопла для щільних компоновань виникає низка специфічних завдань, не характерних для процесу створення круглого сопла класичної схеми (Лавалє), основним з яких є визначення характеристик течії в соплі (особливо втрат імпульсу та розподілу напруги у стінці сопла) та вибір оптимальних параметрів «стиснення» профілю сопла.
 2. Проектування сопла з насадком має охоплювати вибір профілю базового сопла, його вкорочення і виведення частини, що залишилася, на заданий ступінь розширення контуром з великим градієнтом (dy/dx).
 3. Втрати питомого імпульсу тяги укороченого сопла РДТП визначаються переважно втратами на розсіювання і відставання твердих частинок двофазного потоку в соплі, вплив інших втрат значно менший.
 4. Зменшення довжини обрізаного базового контуру сопла збільшує втрати на розсіювання та двофазні втрати.
 5. Втрати на розсіювання в насадку практично втричі перевищують двофазні втрати, при цьому питомий імпульс тяги сопла з насадком добре корелює за параметром $(x_a - x_n)/x_n$ (де x_a — довжина базового сопла; x_n — довжина укороченого сопла з насадком того ж ступеня розширення).
 6. При проектних розрахунках міцності сопла слід звертати увагу на можливі осередки концентрації напруги в стінці насадка в області великих градієнтів тиску в області кутової точки входу в насадок і на зрізі насадка.
-
1. Mohan Kumar G1, Dominic Xavier Fernando and R. Muthu Kuma. *Design and Optimization of De Laval Nozzle to Prevent Shock Induced Flow Separation*. Advances in Aerospace Science and Applications. ISSN 2277-3223 Volume 3, Number 2 (2013), pp. 119-124. <http://www.ripublication.com/aasa.htm>
 2. Anuj Kumar, Sudhanshu G. Ogalapur *Design of Minimum length nozzle by Method of Characteristics*. Anuj kumar, 2020, 8:6. ISSN (Online): 2348-4098. ISSN (Print): 2395-4752. International Journal of Science, Engineering and Technology, 2020, 8:6 <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>,
 3. Стрельников Г.О., Прядко Н.С., Тернова К.В. Надзвукові круглі укорочені сопла, Київ: Академперіодика, 2025. – 233с. <http://doi.org/10.15407/akademperiodyka.569.233>
 4. Коваленко Н.Д., Стрельников Г.А., Гора Ю.В., Гребенюк Л.З. Газодинамика сверхзвуковых укороченных сопел. Киев: Наук. думка, 1993. 223 с.
 5. НИОКР США по интегрированной ступени ISC. ЭИ «Ракетная и космическая техника»: ГОНТИ-1, ЦНТИ «Поиск», экз. № 002139. № 19-20 (1436-1437). 1987.

Моделювання детонації заряду з мідним пористим сердечником

Ю.М. Сидоренко^{а1}, Ю.І. Войтенко^б

^а Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського", Київ, Україна

^б Інститут гідромеханіки НАН України, вул. Марії Капніст, 8/4, Київ, Україна

¹ yura_michael@ukr.net

Ми представляємо результати математичного моделювання детонації заряду з пористим сердечником всередині із інертного матеріалу (монолітна і пориста мідь). Досліджувалось вплив пористості (0, 10%, 20%, 30%, 50%) на процес деформації матеріалу сердечника, кінематичні параметри руху корпусу заряду на початковій стадії польоту.

Ключові слова: заряд, вибухова речовина, детонація, реакційно здатний матеріал, пористість, енергія

Вступ. В зарядах з регульованою потужністю використовують дві схеми збільшення енергії: шляхом змішування реакційно здатного матеріалу (РМ) з вибуховим матеріалом[1]; шляхом введення блоку пористого РМ, наприклад із порошкових компонентів в конструкцію заряду [2-3]. В деяких роботах визначено критичні параметри (тиск, температура, тривалість навантаження), при яких починається реакція в РМ з додатковим виділенням енергії [2]. Тому метод математичного моделювання детонації таких зарядів і результати розрахунків представляють науковий і практичний інтерес в частині проектування таких зарядів. Крім того, в деяких роботах показано, що з ростом пористості при динамічному деформуванні таких матеріалів з'являються нові фізичні ефекти в зв'язку з аномальним збільшенням температури і тиску [4]. В якості РМ хімічними джерелами енергії можуть бути комбінації термітів, інтерметалідів, метал-полімерних сумішей, метастабільні міжмолекулярні композити, матричні матеріали, а також гідриди [5]. При цьому кожна група енергетичних матеріалів характеризується своїми рівнем енергії, яка виділяється при взаємодії за умови стехіометрії суміші.

Мета даної роботи – аналіз хвильових процесів при детонації заряду з пористим сердечником, оцінка параметрів ударно-хвильового стиснення матеріалу сердечника в залежності від величини пористості.

1. Метод моделювання функціонування заряду Для визначення картини хвильових процесів в пористому матеріалі і оцінки параметрів його динамічного деформування проводилося моделювання детонації заряду з мідним пористим сердечником. Розрахунок функціонування зарядів проводився з використанням чисельної процедури і моделей поведінки матеріалів корпусу заряду, сердечника і вибухового матеріалу, отриманими раніше [6].

В основу методу покладено систему рівнянь, що описує адіабатичний рух пружно-пластичного середовища. Дослідження процесу великих пластичних деформацій корпусу осколково-фугасного заряду (ОФЗ), а також мідного циліндричного сердечника в алюмінієвій оболонці проводилося з використанням кінцевих деформацій та теорії пластичної течії і відповідних співвідношень у формі

Прандтля-Рейсса. Для розв'язання зазначеної вище системи диференціальних рівнянь використовувався ейлеровий підхід щодо опису процесу руху суцільного середовища, що деформується. Наявність у конструкції осколково-фугасних зарядів, що розглядаються у роботі, осової симетрії дозволяє використовувати циліндричну (r, z) систему координат та відповідну двомірну вісесиметричну континуальну постановку, тобто без урахування процесів руйнування, або розпушування матеріалів сталевго корпусу заряду та мідного циліндричного сердечника в алюмінієвій оболонці, з використанням наскрізного розрахунку через контактні границі за алгоритмом методу концентрацій.

У зв'язку з тим, що разом з матеріалом корпусу осколково-фугасного заряду та мідного циліндричного сердечника в алюмінієвій оболонці через нерухому ейлерову сітку переноситься ряд історичних змінних, які характеризують стан і історію деформування матеріальних часток, то для відслідковування швидкості руху різних частин конструкції під час вибуху використовувався метод "вморожених" маркерів – спеціальних рухомих разом зі середовищем реперних точок.

Для розв'язання поставленої задачі математичної оцінки параметрів функціонування осколково-фугасного заряду використовувалось рівняння динамічної стисливості матеріалу корпусу заряду, а також розміщеного по його вісі симетрії циліндричного сердечника з міді, що має оболонку з алюмінію – ударна адіабата у вигляді $p = p(\rho)$ (в формі Тета) та у вигляді $D = a + \lambda \cdot u$.

Математичний опис стану продуктів детонації заряду вибухової речовини (ВР) проводилося за допомогою рівняння стану ПД у формі Джонса-Уілкінса-Лі (JWL). У зв'язку з тим, що під час проведення математичних розрахунків приймається припущення, що процес розширення ПД є ізоентропічним, то замість рівняння стану в формі (JWL) використовувалося рівняння ізоентропи ПД в формі ступеневого двочлена Л.П. Орленко та в формі JWL.

Для опису поведінки повітря, що оточує конструкцію осколково-фугасного заряду, використовувалося рівняння у формі ступеневого поліному. Ініціація детонації заряду ВР здійснювалася в точці на вісі симетрії заряду на внутрішній торцевій поверхні корпусу заряду.

Зображена на рис. 1 конструкція має сталевий циліндричний корпус (1) довжиною 128 мм з товщиною стінки 2 мм із закритою донною частиною. Діаметр зовнішньої поверхні корпусу становить 34 мм, а внутрішньої – 30 мм. Усередині корпусу розміщується заряд вибухової речовини (ВР) (2) – вибухова суміш щільністю $\rho_0 = 1760 \text{ кг/м}^3$, швидкістю детонації $D = 7470 \text{ м/с}$, $p_{C-J} = 24 \text{ ГПа}$, $\rho_{C-J} = 2335 \text{ кг/м}^3$ (RDX – 64 % (гексоген), TNT (тротил) – 36 %). За своїми енергетичними характеристиками він є близьким аналогом флегматизованого гексогену ($\rho_0 = 1,67 \text{ г/м}^3$, $D = 8000 \text{ м/с}$). Також, в середині корпусу заряду по осі симетрії на відстані 20 мм від внутрішньої доної поверхні розміщено циліндричний мідний сердечник (3) довжиною 70 мм та діаметром 10 мм. Навколо мідного сердечника знаходиться оболонка з алюмінію (4) з товщиною стінки 0,5 мм. Ініціація детонації заряду вибухової речовини здійснювалася в точці на осі симетрії заряду (5) у внутрішній поверхні донної частини корпусу заряду (1).

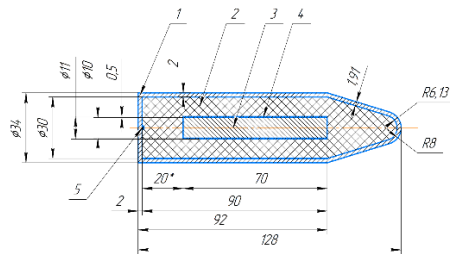


Рис. 1. Схема конструкції заряду з сердечником:

1 – корпус, 2 – заряд вибухової речовини, 3 – пористий сердечник, 4 – алюмінієва оболонка сердечника.

Таблиця 1

Механічні характеристики матеріалу корпусу заряду, встановленого в його середину сердечника в оболонці

№ з/п	Елемент конструкції	Матеріал	Густина, кг/м ³	Модуль зсуву, ГПа	Границя міцності, МПа
1.	Корпус (1)	Сталь 20	7850	81	600
2.	Сердечник (3)	Мідь (M1)	8940	49	200
3.	Оболонка сердечника (4)	Алюміній (AL 2024)	2785	28	470

В розрахунках пористість бралася рівною 10%, 20%, 30% і 50%. Тестовий розрахунок проводився для монолітної міді.

2. Результати моделювання функціонування заряду з сердечниками різної пористості На рис. 2 показана хвильова картина в елементах заряду на початковій стадії розвитку вибуху.

На рис. 4-7 показано картини поведінки сердечників різної пористості під дією хвилі детонації, яка розповсюджується в ВР.

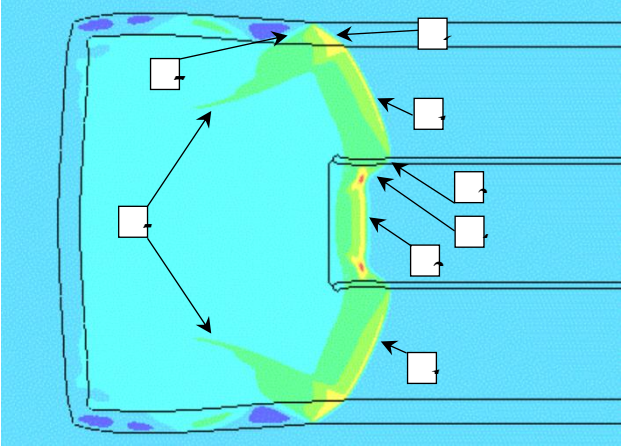


Рис. 2 Хвильова картина в елементах конструкції ОФ заряду ($t=3,5 \text{ мкс}$).

На представлених кадрах комп'ютерного моделювання можна спостерігати процес взаємодії детонаційного фронту заряду ВР як з внутрішньої поверхнею корпусу ОФЗ, так і з мідним сердечником, встановленим на осі симетрії заряду.

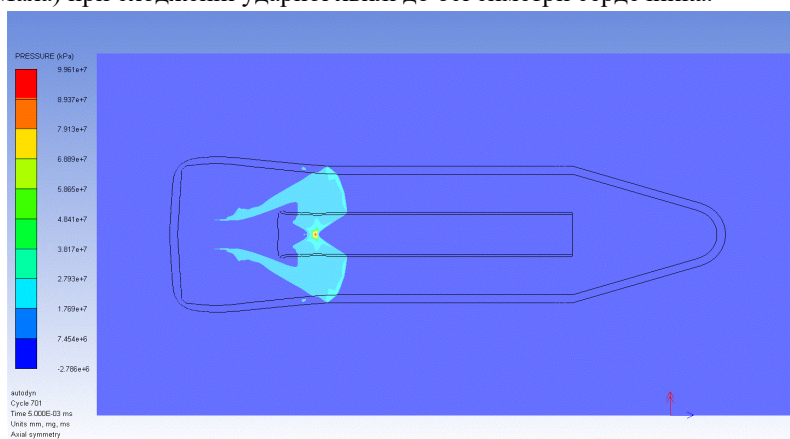
На момент часу $t=2,5 \text{ мкс}$ ДФ (1) підходить до його торцевої поверхні і відбивається від нього (рис. 2, рис. 3). В результаті такої взаємодії в мідному сердечнику формується ударна хвиля стискання (2), що рухається зі швидкістю звуку в міді – приблизно 4000 м/с.

По мірі розповсюдження ДФ по заряду ВР вона обтікає сердечник та починає рухатися вздовж його твірної. При цьому, ДФ відбивається від зовнішньої поверхні алюмінієвої оболонки в результаті чого в оболонці також формується ударна хвиля стиску (3), яка в результаті малості товщини оболонки переходить в мідний сердечник (4) та рухається в напрямку вісі симетрії.

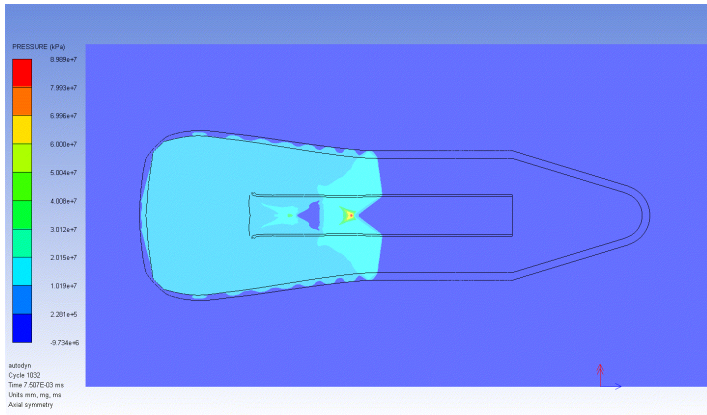
Також можна спостерігати процес відбиття ДФ від внутрішньої поверхні сталевго корпусу ОФЗ з формуванням в ньому косої ударної хвилі стиску (6) та ударної хвилі в продуктах детонації, що рухається в напрямку вісі симетрії. Після проходження цієї хвилі товщини стінки корпусу вона відбивається від зовнішньої поверхні корпусу, що призводить до формування в корпусі ударної хвилі іншого знаку – хвилі розтягу (7) проходження якої товщини стінки корпусу у напрямку вісі симетрії ОФЗ завершує тривалість першої хвильової пульсації в корпусі ОФЗ.

Враховуючі різні значення швидкості звуку в різних середовищах (Al, Cu, Fe), а відповідно швидкості розповсюдження ударних хвиль по середовищу, на рис. можна спостерігати картину, що ударна хвиля (УХ), що рухається по мідному сердечнику (2) відстає від УХ, що рухається по алюмінієвій оболонці (3), і обидві ці хвилі відстають від ДФ.

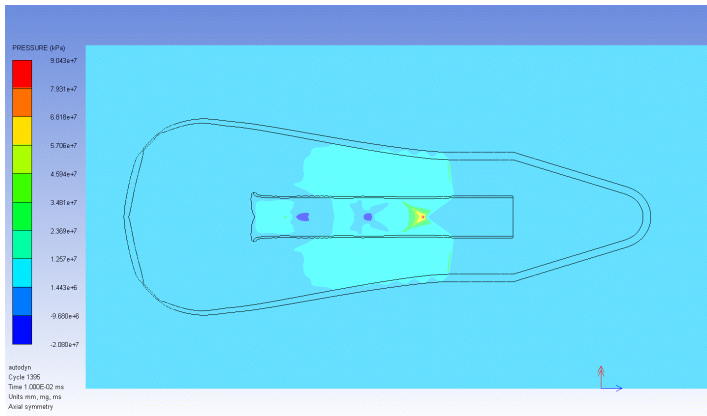
На момент часу $t=4,5 \text{ мкс}$ фронт ударної хвилі (4) підходить до осі симетрії і відбивається від неї одночасно взаємодія з фронтом хвилі (2) та починає свій зворотний рух від вісі. В цей момент в мідному сердечнику на осі симетрії формується зона підвищеного тиску, яка розпочинає свій рух праворуч в напрямку руху ДФ (5 мкс, рис. 3). Формування зони підвищеного тиску пов'язано з утворенням хвилі Маха (диску Маха) при сходженні ударної хвилі до осі симетрії сердечника.



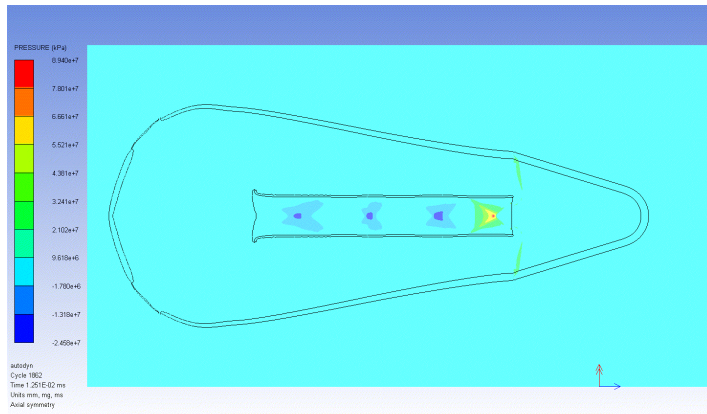
5 мкс



7,5 мкс



10 мкс



12,5 мкс

Рис. 3. Кадри математичного моделювання процесу функціонування ОФ заряду з сердечником із суцільної міді

Практичний інтерес представляє поведінка матеріалу сердечника поблизу торців після закінчення детонації ВР. Динамічна поведінка високопористих матеріалів біля правого торця сердечників показує наявність кумулятивного ефекту, який посилюється з ростом пористості (рис 4). Даний ефект може бути посилений шляхом оптимізації форми правого торця.

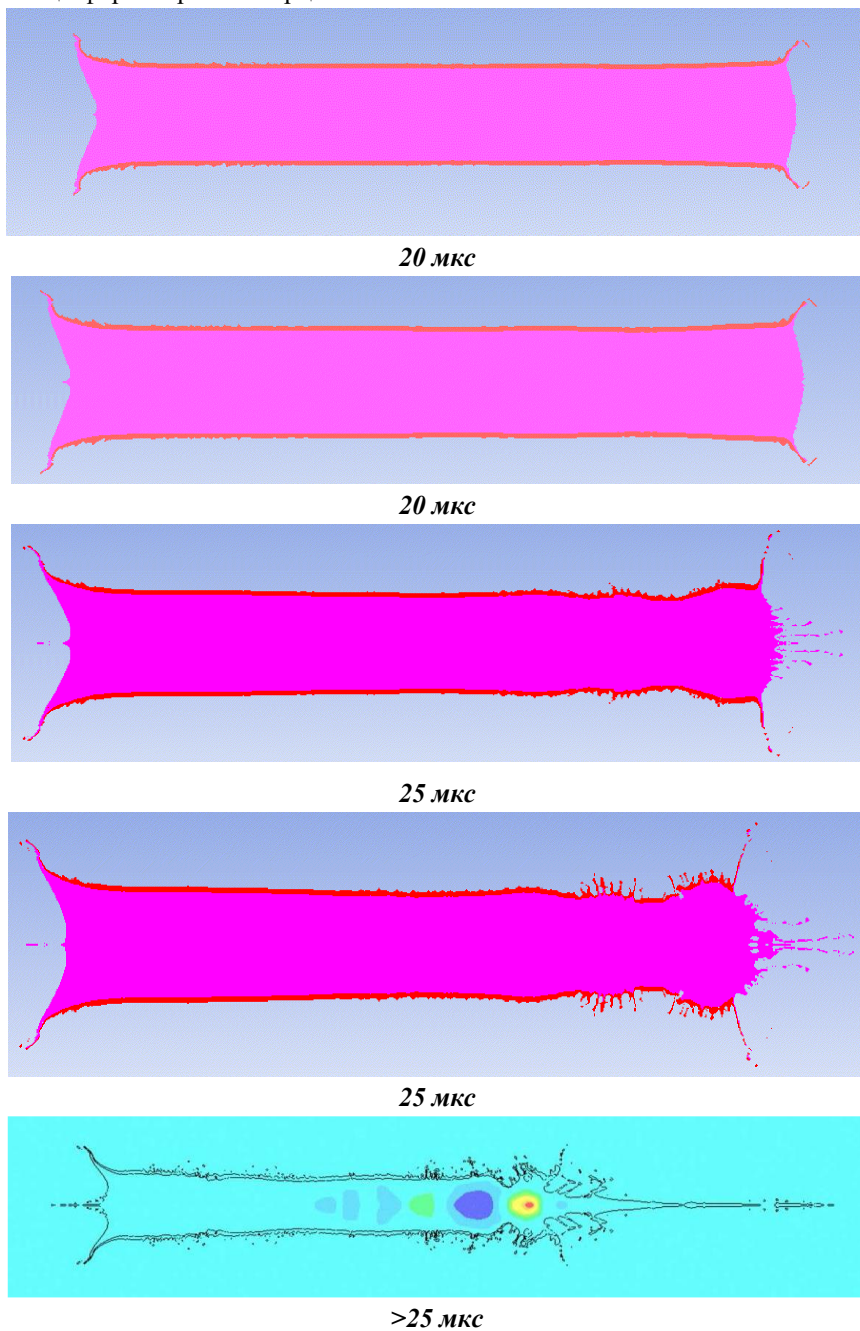


Рис. 4 Стан сердечників різної пористості на момент повної детонації заряду (пористість від зверху вниз: 0, 10%, 20%, 30% 50%)

3. Обговорення результатів досліджень

Основні результати досліджень наступні:

1. Розроблено метод розрахунку функціонування осколково-фугасних зарядів з циліндричним подовженим сердечником із міді пористістю в 10%, 20% та 30%, 50%, що знаходиться в алюмінієвій оболонці.

2. За результатами проведеного моделювання процесу функціонування ОФЗ встановлено та описано картини хвильових процесів в продуктах детонації, корпусі заряду та в сердечнику, виготовленому з пористої міді, та просторово-масовий розподіл матеріалу корпусу заряду, що формується за результатами його вибуху.

3. Величина динамічного стиснення матеріалу сердечника ϵ в зонах підвищеного тиску незалежно від величини пористості коливається в середньому в межах 0,3 – 0,6.

4. Визначено, що зміна пористості мідного сердечника до 30%, встановленого по вісі симетрії ОФС, практично не впливає на значення як осової V_z , так і радіальної V_r компоненти швидкості руху окремих частин корпусу ОФЗ, а також меридіонального кута розльоту осколкової маси корпусу ОФЗ.

5. Досліджено поведінку зовнішньої поверхні сердечника (Δu – величини розширення/звуження, мм) в залежності від величини пористості матеріалу сердечника. Встановлено, що незалежно від величини пористості міді, що використовується для виготовлення сердечника (від 10 до 50%), до 9...10 мкс процесу вибуху ОФС ця поведінка практично ідентична. У подальшому, коливальний процес розширення-звуження поверхні сердечника продовжується, але:

- в донній частині сердечника різниця між значеннями Δu для різних варіантів пористості міді поступово зменшується і поверхня сердечника на момент завершення процесу вибуху ОФЗ переходить у стан розширення;
- в центральній та головній частинах сердечник залишається у стані звуження, але в центральній частині значення Δu коливаються навколо середніх значень, що відповідають своєму рівню пористості, а в головній – рівень звуження стрімко збільшується. Зростання величини пористості на кожні 10% в цих частинах сердечника призводить практично до подвоєння величини Δu ;
- існують відмінності в поведінці головної частини сердечника залежно від пористості міді; для пористості 30% і 50% спостерігається викид матеріалу сердечника в осьовому напрямку по аналогії з кумулятивним ефектом; для пористості 10% цей ефект відсутній.

Наявність кумулятивного ефекту була використана в експерименті для отримання кумулятивного струменя з циліндричного облицювання, оточеного циліндричним шаром ВР [3]. Справа в тому, що згідно з критерієм струменеутворення кумулятивний струмінь утворюється при дозвуковій швидкості точки контакту. У телескопічному заряді швидкість точки контакту дорівнює швидкості детонації заряду ВР. Тому для заряду з насипного гексогену ($D = 6,2$ км/с) з монолітною циліндричною оболонкою з нікелю ($c_0 = 4,6$ км/с) струменя не має бути. Якщо ж взяти пористу нікелеву, або мідну оболонку ($m = 2,2$), то струмінь утворюється, так як швидкість звуку в хвилі розрідження c_s зростає зі зростанням пористості, що було зафіксовано в експерименті [3]. В заряді із амоніту 6ЖВ ($D = 4,2$ км/с) з монолітною оболонкою із алюмінію ($c_0 = 6,32 - 6,4$ км/с), заліза і сталі ($c_0 = 5,0 - 5,9$ км/с) кумулятивний струмінь буде утворюватися, а з монолітною оболонкою із свинцю ($c_0 = 1,96 - 2,2$ км/с) кумулятивний струмінь не буде утворюватися. Описаний ефект може бути використаний при конструюванні зарядів з підвищеними ударними властивостями.

Висновки. Проаналізовано хвильові процеси при детонації осколково фугасного заряду з пористим сердечником. Незалежно від пористості матеріалу сердечника в ньому утворюється область підвищеного тиску (хвиля Маху), яка рухається в напрямку розповсюдження детонації. За нею рухаються декілька зон зниженого тиску. Динаміка зміни областей підвищеного і зниженого тиску, а також пористість матеріалу визначають картину деформування сердечника. При збільшенні пористості матеріалу сердечника змінюється картина його деформації. Головна частина сердечника при пористості 30% і більше на момент повної детонації заряду деформується з викидом частини матеріалу в радіальному і осьовому напрямках.

1. Я. Ф. Чен, Х. Х. Ма, Чж.-У Чень Детонационные характеристики эмульсионных взрывчатых веществ, сенсibilизированных гидридом магния, *Физика горения и взрыва*, 49, №5, 120 -125 (2013).
2. Яшин В.Б., Алексеев В.В., Ходырев С.П. и др. Параметры взрыва зарядов из тротила, содержащих блоки из высокоплотных металлофторопластовых композиций, *Инженерный журнал. Наука и инновации*, №1, 83-95 (2013).
3. М. Х. Чжан, В. Цз. Жуань, К. Дун, Ю. Г. Юй Экспериментальное исследование ударного инициирования смеси алюминий/ политетрафторэтилен, *Физика горения и взрыва*, 53, №3, 110-114 (2017).
4. Тришин Ю.А., Кинеловский С.А. О влиянии пористости на кумулятивное течение, *Физика горения и взрыва*, 32, №2, 122-132 (2000).
5. Eakins D.E. Thadhani N.N. The Shock-compression of Reactive Powder Mixtures // *Int. Mater. Rev.*, 54, №4, 181-213 (2009).
6. Sydorenko Yu.M. Methodology of two-dimensional computer modeling of the processes of functioning of highexplosive amunitions, *Artillery and gunnery*, No. 1, 18-21 (2005).

Про механізми збільшення енергії під час вибуху складеного заряду, що містить реакційно здатні матеріали

Ю.І. Войтенко^{а1}, Ю.М. Сидоренко^б

^а Інститут гідромеханіки НАН України, вул. Марії Капніст, 8/4, Київ, Україна

^б Національний технічний університет України "Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського", Київ, Україна

¹ voytenkou@gmail.com

Представлено результати розрахункової оцінки енергії деформування пористої міді в умовах динамічного стиснення вибухом. Досліджувалось вплив пористості на параметри деформації матеріалу сердечника і величину енергії, яка при цьому виділяється. Проведено порівняння цієї величини з величиною енергії хімічної взаємодії компонентів композитів Cu-Al, Ni-Al та інших відомих високоенергетичних матеріалів. Показано наявність діапазону пористості міді, в якому величина теплової енергії при ударному стисненні максимальна.

Ключові слова: заряд, вибухова речовина, реакційно здатний матеріал, детонація, температура, енергія

Вступ Однією із конструкційних схем зарядів з регульованою потужністю є наявність в конструкції капсульованих, або відкритих включень із реакційно активних матеріалів (РМ), теплота вибуху, або горіння яких на стадії розширення продуктів детонації значно перевищує теплоту вибуху вибухової речовини [1-2].

Зауважимо, що ефекти хімічної взаємодії компонентів РМ і додаткового виділення енергії проявляються також при високошвидкісному ударі і прониканні кумулятивних струменів і компактних ударників із пористих і композитних матеріалів в щільні перепони. При цьому кінетична енергія удару збільшується на величину теплової енергії, яка виділяється в результаті хімічних реакцій і деформування пористого матеріалу. Про це свідчить збільшення об'єму кратера в перепоні і величина пластичної деформації матеріалу навколо нього [3-5]. При дослідженні

Мета роботи – порівняльний аналіз теплових ефектів деформації пористого матеріалу на прикладі пористої міді з тепловими ефектами хімічних реакцій, які супроводжують вибух і горіння відомих композитів.

1. Методика та результати досліджень Якщо порівнювати теплоту вибуху основних індивідуальних і сумішевих ВР і теплоти горіння і вибуху деяких РМ (табл. 1), то очевидно, що основний вклад в сумарну енергію вибухового перетворення заряду з добавками РМ вносять теплові ефекти хімічної взаємодії компонентів РМ і продуктів їхньої взаємодії з киснем повітря і продуктами детонації на стадії розширення вогняної кулі. Тим не менше представляє практичний інтерес порівняння теплового ефекту, який супроводжує динамічну деформацію пористого матеріалу з величиною теплового ефекту хімічних реакцій РМ. Таку оцінку проведемо на відомих матеріалах: пориста мідь і порівняємо з пористими композитами Cu-Al, Ni-Al.

Аналіз даних, наведених в таблиці 1, показує, що масова теплота горіння, або хімічних реакцій кількох речовин типу «пальне – окислювач» переважної більшості взаємодіючих компонентів кратно, або на порядок перевищує теплоту вибуху

найбільш розповсюдженої ВР – тротилу (найнижча строчка). Тому використання в складі зарядів ВР включень із цих та інших матеріалів є реальний шлях підвищення загальної енергії вибуху.

В деяких роботах показано, що використання домішок РМ (TiH_2) до основної речовини (ВР - гексоген) дозволяє збільшити амплітуду повітряної ударної хвилі і площу під кривою $p(t)$. При цьому перевагу мають ультрадисперсні порошки з розміром фракцій не більше 4-5 мкм [2]. Очевидно, що використання таких порошоків, а також нанопорошкових матеріалів сприятиме більш повному та швидшому протіканню реакцій, наведених в табл. 1. Проте їх застосування вимагає спеціальних заходів і технологій з точки зору техніки безпеки, тому що нанопорошки металів надзвичайно активні і легко самозапалюються в повітрі, а деякі в воді.

Оцінити вплив дисперсності (розміру фракцій) вихідного порошкового матеріалу можна із наступних простих міркувань. Відомо, що при розгляді певного об'ємного об'єкту (куба, паралелепіпеда, кулі тощо) його можна заповнити зменшеними копіями, якщо їх довжини змінювати в $r(N)=(1/N)^{1/3}$ [9]. Для лінійних прямих і плоских об'єктів відповідне співвідношення має вигляд $r(N)=(1/N)^{1/d}$, де $d=1$ для лінійних і $d=2$ для плоских об'єктів. Для нестандартних форм $r(N)=(1/N)^{1/d}$, d - розмірність подібності $1 \leq d \leq 3$. Тобто кількість контактів між сусідніми зменшеними копіями буде пропорційна $a_i N$ ($a_i > 1$; a_i – коефіцієнт для відповідної осі координат у разі зразка нестандартної форми; $i=1 \dots 3$). Наприклад, в одному кубічному міліметрі контактів між зменшеними копіями куба, або кулі буде $\sim a_i 10^3$ в мікронному масштабі і $\sim a_i 10^6$ в нано масштабі. Очевидно, що чим менша величина r , тим більша кількість контактів між сусідніми зернами зокрема взаємодіючих матеріалів. При контактних взаємодіях реагуючих речовин в умовах динамічного навантаження ударними хвилями і продуктами детонації кожен контакт за умови якісного перемішування суміші грає роль джерела хімічної реакції. В фізиці детонації відома модель «горячих» точок, в фізиці горіння аналогічна модель може означати кількість осередків хімічних реакцій і запалювання. Це сприяє зменшенню часу активації реакції в усьому зразку (блоці) РМ, зменшенню індукційного періоду початку реакції горіння, або вибуху і збільшенню швидкості і повноти виділення енергії.

Для визначення теплових ефектів при деформації пористої міді скористаємося результатами робіт [10-11].

Таблиця 1

Теплота згорання і вибуху деяких простих речовин, органічних і неорганічних сполук

Реакція	Щільність, кг/м ³	Масова теплота горіння, МДж/кг	Теплота вибуху МДж/кг	Температура горіння, К	Джерело
$2\text{B} + (3/2)\text{O}_2 = \text{B}_2\text{O}_3$	2350	58,9	-	3745	[6]
$2\text{Al} + (3/2)\text{O}_2 = \text{Al}_2\text{O}_3$	2700	30,9	-	3970	[6]

$\text{Mg} + (1/2)\text{O}_2 = \text{MgO}$	1740	24,7	-	3390	[6]
$2\text{AlB}_2 + (9/2)\text{O}_2 = \text{Al}_2\text{O}_3 + 2\text{B}_2\text{O}_3$	3190	38,1	-	3753	[6]
$\text{MgB}_2 + (3/2)\text{O}_2 = \text{MgO} + \text{B}_2\text{O}_3$	2690	38,4	-	3297	[6]
$\text{Al} + \text{Ni} = \text{AlNi}$	5200	12,6	1,7	1500	[1, 7]
$3\text{Cu} + \text{Al} = \text{Cu}_3\text{Al}$	7614	-	1,5	1200	[7]
$\text{Ti} + 2\text{B} = \text{TiB}_2$	3500	31,7	4,8		[1]
$\text{Al} + \text{KClO}_4$	2600	10,6	10,6		[1]
$\text{Al} + \text{MoO}_3$	3900	8,4	4,7		[1]
$\text{Al} + \text{C}_2\text{F}_4$	2340	14,6	8,9		[1]
$\text{Si} + \text{NaClO}_4$		32	8,5		[8]
TNT	1640	14,5	4,2		[1]

В роботі [10] досліджено процеси деформації пористих металів при вибуху кумулятивного заряду з облицюванням із пористої міді, нікелю та заліза. Зокрема показано, що температура нагрівання пористої міді за фронтом ударної хвилі визначається співвідношенням

$$\Delta T_n = (E_n - E_x) / c \quad (1)$$

$$E_n = \frac{c_0^2}{2-(m-1)\Gamma} (m - 1 + \varepsilon) \varepsilon \quad (2)$$

$$E_x = \frac{c_0^2 \varepsilon^2}{2}, \quad (3)$$

де E_n – енергія за фронтом ударної хвилі (УХ); E_x – енергія холодного стиснення суцільної міді; c – теплоємність; c_0 – початкова швидкість звуку в суцільній речовині; ε – ступінь стиснення речовини.

$$V_0/V = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{\rho}{m\rho_{00}} = 1 + \varepsilon; \quad m = \frac{\rho_0}{\rho_{00}},$$

де ρ_0 , ρ_{00} – початкові щільності суцільної і пористої речовини; m – пористість; V_0 – питомий об'єм суцільної речовини; V – поточний питомий об'єм; Γ – коефіцієнт Грюнайзена. В цій же роботі отримані значення залишкової температури ΔT_s після розвантаження в хвилі розрідження по ізоентропі до нульового тиску. Залишкові температури для $m=1,4$ і $m=1,9$ зменшуються на 30 – 40%, для $m=2,1$ $m=2,5$ – відповідно на 13% і 5%.

Для тисків на фронті УХ 90...100 ГПа ступінь стиснення суцільної міді досягає 0,34 [11]. Для пористості $m=1,4$ – 0,43 [10]. Для більших значень пористості ($m=1,9$) цей параметр буде ще більшим і складає в середньому 0,3-0,6. Тому скористаємось даними роботи [10], в якій отримано температури за фронтом УХ для пористої міді: $\Delta T_n=4820$ К ($m=1,5$; $\varepsilon=0,2$); $\Delta T_n=43350$ К ($m=1,9$; $\varepsilon=0,2$) і доповнимо їх власними розрахунками для деяких значень m (табл. 2). Розрахунок енергії на фронті ударної хвилі за формулою (1) для $c=0,389$ кДж/кг·К без врахування енергії холодного стиснення E_x дає 1875,0 кДж/кг і 16863,2 кДж/кг. Для залишкової температури ΔT_s величина енергії складає відповідно 10274,4 Дж/кг ($m=1,9$) і 12564,9 Дж/кг ($m=2,1$).

Якщо порівняти ці величини з даними таблиці 1, то можна зробити висновок, що пористість може активно впливати на сумарний тепловий ефект вибуху заряду з РМ. Оптимальна пористість сприяє не лише більшому виділенню енергії за рахунок стиснення, але й більш ранньому початку хімічних реакцій РМ і більшій кількості компонентів РМ, які прореагують. Зауважимо, що для досягнення максимального ефекту необхідно виконання стандартних вимог: стехіометрія суміші, рівномірність розподілу компонентів і оптимальна дисперсність порошкових матеріалів.

Таблиця 2

Температура на фронті ударної хвилі і залишкова температура при ударному стисненні мідних сердечників різної пористості

m	$\rho_{00}, \text{кг/м}^3$	$\Delta T_{\text{н}}, \text{К}$	$\Delta T_{\text{с}}, \text{К}$
1,1	8091	535	
1,2	7417	1200	860
1,4	6357	4555	
1,5	5933	4820	3280
1,7	5235	11231	
1,9	4684	43350	25815
2,1	4238	36130	31570
2,3	3870	13936	
2,5	3560	10440	9850
2,7	3296	7811	
3,0	2967	7225	7025

Зауважимо, що було отримано оцінки переважно для нормального ходу ударних адіабат ($m < 2/\Gamma + 1$; $\Gamma=2$ для міді). Достатньо висока температура розвивається при аномальному ході ударних адіабат ($m=2,1-3,0$, табл. 2). Ці температури значно перевищують температуру кипіння (2840 К), випаровування (2840 – 2868 К) і фазового вибуху пористої міді (5450 К). Згідно [10] фазовий вибух пористої міді можна очікувати при детонації на поверхні заряду ТГ 50/50, починаючи з пористості $m=2,5$. **Висновки.** Наведено величини енергій, які виділяються при горінні, або детонації деяких перспективних реакційно активних матеріалів для зарядів з регульованою потужністю.

У разі оптимальної пористості теплова енергія, яка виділяється при деформації РМ може бути співмірна з енергією хімічної взаємодії компонентів пористого композиту, а для деяких композитів перевищує її. Величина цієї енергії збільшується з ростом пористості матеріалу сердечника і величини ступеня стиснення.

Для мідного пористого сердечника існує діапазон пористості $m=1,9 - 2,1$, в якому величина температури і енергії на фронті ударної хвилі і після розвантаження до нульового тиску аномально високі.

1. Яшин В.Б., Алексеев В.В., Ходырев С.П. и др. Параметры взрыва зарядов из тротила, содержащих блоки из высокоплотных металлофторопластовых композиций, *Инженерный журнал. Наука и инновации*, №1, 83-95 (2013).

2. Li J.B., Li W.B., Wang X.M. *et al.* Experimental Investigation on the Enhancing Effect of Reactive Materials on Explosion Fireballs and Shock Waves of Composite Charges, *Combust. Explos. Shock Waves*, 60, № , 222–232 (2024). <https://doi.org/10.1134/S0010508224020084/>
3. Chang B.H., Yin J.P., Cui Z.Q., Liu T.X. Improved Dynamic Mechanical Properties of Modified PTFE Jet Penetrating Charge with Shell// *Strength Mater.*, 1, 82-89, (2016).
4. Xu, Y.J., Wang Z. J., Wu, G.D., Yin J.P., Dong, F.D., Jin, Y.X. Density Effect of PTFE-Copper Powder Metallurgy Liner Material on the Perforation Performance of Shaped Charge Jets. *Strength Mater.*, 4, 132-140. (2019).
5. Voitenko Yu., Zakusylo R., Zaychenko S. Influence of the Striker Material on the Results of High-Speed Impact at a Barrier, *Cent. Eur. J. Energ. Mater.*, 18, №3, 405-423 (2021).
6. Rosenband V., Gany A. Thermal Explosion Synthesis of a Magnesium Diboride Powder, *Combust. Explos. Shock Waves*, 50, №6, 653-657 (2014).
7. Письменская Е.Б. *Высокотемпературный синтез интерметаллических соединений в режиме динамического теплового взрыва: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.04.17*, Институт структурной макрокинетики и проблем материаловедения РАН, Черноголовка, (2000).
8. Roey sagi, Carmen Tamburu, Micha Assher, *Porous silicon as a matrix for energy-related applications*, Akademia. Nano: Science, materials, technology (2025).
9. В.С. Иванова, А.С. Баланкин, И.Ж. Бунин, А.А. Оксогоев *Синергетика и фракталы в материаловедении* Наука, Москва (1994).
10. Trishin Y.A., Kinelovskii S.A. Effect of porosity on shaped-charge flow, *Combust. Explos. Shock Waves*, 36, №2, 272–281 (2000). <https://doi.org/10.1007/BF02699373>
11. Войтенко Ю.І., Сидоренко Ю.М. *Моделювання детонації заряду з мідним пористим сердечником*, *Збірник матеріалів конференції по актуальним проблемам механіки і машинознавства*. Інститут проблем міцності ім. Г.С. Писаренка НАН України, Київ (2026).

Експрес-оцінка міцності гірських порід неруйнівними методами

О. П. Круковський, С. І. Скіпочка, В. М. Сергієнко¹, Л. В. Прохорець

Інститут геотехнічної механіки ім. М. С. Полякова НАН України, Дніпро, Україна

¹ viictorms@ukr.net

Розглянуто можливість оцінки міцності гірських порід неруйнівними методами контролю без попереднього, індивідуального для кожного типу породи, тарування шляхом порівняльних стандартних руйнівних випробувань на пресі. Експериментально встановлено придатність двох методів: ультразвукового та ударного імпульсу. Для ультразвукового методу обґрунтовано оптимальну робочу частоту і доцільний діапазон бази прозвучування. Встановлено близьку до лінійної залежність між швидкістю позовжньої хвилі в породі та її міцністю на одновісний стиск. Для проведення досліджень в польових умовах рекомендовано серійну ультразвукову апаратуру вітчизняного виробництва. Інформативним параметром в запропонованому варіанті методу ударного імпульсу є тривалість пружної взаємодії сферичного ударника з породою. Встановлено, що залежність між величиною вказаного параметра та міцністю породи на одновісний стиск теж задовільно описується лінійною функцією. Обидва методи можуть бути застосовані як для експрес-оцінки міцності породних зразків довільної форми в польових умовах, так і для оцінки міцності безпосередньо в масиві.

Ключові слова: міцність гірських порід, неруйнівний контроль, метод ударного імпульсу, ультразвуковий метод, лінійна залежність між параметрами.

Вступ.

Міцність на одновісний стиск є однією з найважливіших характеристик гірських порід. Дана характеристика є базовою для проєктування будівництва і експлуатації всіх видів підземних споруд. Найбільш точними є руйнівні методи визначення міцності [1, 2]. Їх основними недоліками є довготривалий процес, що полягає у відборі проб, виготовленні зразків та лабораторних випробуваннях на дорогому стаціонарному обладнанні. Крім того, результати таких випробувань можуть суттєво залежати від геометричних розмірів зразків, що обумовлює необхідність урахування масштабного ефекту міцності та підвищує актуальність оцінки властивостей порід безпосередньо в масиві [3]. Для зниження вартості та підвищення оперативності контролю широке застосування отримали непрямі методи визначення міцності. Вони передбачають вимірювання в польових умовах певних параметрів, що пов'язані з міцністю кореляційними залежностями. Для широкої категорії порід ефективним є ультразвуковий метод. Він базується на кореляції між швидкістю позовжньої хвилі та міцністю на одновісний стиск [4 – 6]. Відомо також використання молотка Шмідта [7 – 8]. Для підвищення достовірності визначення міцності застосовується комплекс двох або декількох неруйнівних методів [9, 10]. Застосовують також непрямі руйнівні методи, які легко реалізувати при обстеженні породного масиву. Найбільш вживаним є визначення характеристик буріння з використанням спеціального інструменту [11 – 14]. Специфічним непрямим руйнівним методом є контроль параметрів подрібнення породи в кульовому млині [15]. Розгляд ефективності різних видів непрямого визначення міцності гірських порід представлено в роботах [1, 16, 17].

Основна проблема при використанні непрямих методів визначення міцності полягає в необхідності попереднього встановлення кореляційних залежностей між параметром, що визначається даним методом, та міцністю, що встановлена прямими випробуваннями. Різноманітність гірських порід або складна геологічна будова родовища потребують значної тривалості часу і суттєвих матеріальних витрат для створення відповідної бази даних. Однак для попередньої оцінки перспектив розробки родовища або поточних виробничих рішень, що пов'язані з технікою і технологією проходки та видобутку копалин, достатніми є орієнтовні дані про міцність порід.

Метою даної роботи є розробка методики експрес-оцінки міцності гірських порід методами неруйнівного контролю, що могла б бути застосована для широкого кола порід родовища без виконання тарування для кожного окремого типу порід.

1. Методика досліджень

Проведені авторами дослідження включали комплекс наступних експериментів: визначення швидкостей пружних хвиль в породі з використанням ультразвукового методу, визначення тривалості пружної взаємодії сферичного ударника зі зразком як варіант методу ударного імпульсу [18] та руйнівне визначення міцності на одновісний стиск.

Для оперативного визначення швидкості ультразвукових хвиль на зразках неправильної форми та безпосередньо в масиві доцільно використовувати датчики з сухим точковим контактом. При цьому виникає необхідність визначення оптимальної частоти ультразвуку та бази прозвучування. Підвищення частоти дає змогу більш точно фіксувати момент першого вступу різних типів ультразвукових хвиль, але викликає зростання затухання в породі. Це призводить до зменшення можливої бази і, відповідно, до зниження точності вимірювань. В процесі досліджень було встановлено, що компромісним варіантом для точкових датчиків з конічним концентратором є частотний діапазон в межах 50 – 70 кГц. З метою вибору оптимальної бази прозвучування для вказаного частотного діапазону було проведено серію експериментів з гірськими породами різних типів при використанні фіксатора датчиків зі змінною базою (рис. 1).



Рис. 1. До вибору оптимальної бази прозвучування при використанні датчиків з конічними концентраторами.

При визначенні швидкості пружних хвиль безпосередньо в породному масиві необхідно зважати на те, що величина структурних неоднорідностей в середовищі може бути близька до бази прозвучування. Для коректного експерименту в цьому разі необхідним є суттєве збільшення бази, особливо при варіанті поверхневого прозвучування. Це можливо лише при застосуванні датчиків з плоскою контактною поверхнею і розміщенням буферного шару між датчиком та гірською породою, що характеризується акустичним імпедансом, близьким до імпедансу породи. Дешевим і ефективним методом суттєвого покращення контакту датчиків з середовищем є застосування швидкотвердіючого матеріалу, наприклад, у вигляді водно-гіпсової суміші. Це дає змогу значно підвищити базу прозвучування в порівнянні з використанням перетворювачів, що мають сухий точковий контакт. Даний варіант прозвучування ілюструється рис. 2.



Рис. 2. Варіант поверхневого прозвучування датчиками з плоскою контактною поверхнею і затверділим контактним шаром.

На основі експериментальних результатів визначено доцільну базу прозвучування для різних типів порід. Результати представлені в табл. 1.

Таблиця 1.

Рекомендований діапазон вибору бази ультразвукового контролю для різних гірських порід при частоті 60 кГц

Гірська порода	Діапазон бази контролю, м	
	для точкового контакту	для плоского контакту
Граніт	0,10 – 0,15	0,20 – 0,50
Кварцит	0,10 – 0,20	0,20 – 0,40
Амфіболіт	0,05–0,15	0,15–0,40
Сланець	0,10–0,15	0,10–0,40
Пісковик	0,05–0,20	0,20–0,50
Алевроліт	0,05–0,15	0,10–0,40
Аргіліт	0,05–0,12	0,10–0,30
Вугілля	0,04–0,06	0,10–0,25

Наведені в табл. 1 результати вказують на можливість використання для прозвучування переважної більшості гірських порід портативної апаратури, де передбачена фіксована база прозвучування загальноприйнятого розміру 120 мм при

використанні датчиків з конічними концентраторами. В наших подальших експериментах була використана апаратура українського виробника Новотест ІПСМ (рис. 3).



Рис. 3. Використання портативної апаратури Новотест ІПСМ для поверхневого прозвучування породних зразків.

Для неруйнівної оцінки міцності породи методом ударного імпульсу була використана портативна апаратура ДИКОН, яка розроблена в ІГТМ НАНУ. Разова партія апаратури виготовлена НВП «Борисфен». Інформативним параметром є тривалість пружної взаємодії при нанесенні удару сферичним бойком по досліджуваній поверхні. На відміну від відомих засобів, що реалізують метод ударного імпульсу, дана розробка характеризується прийнятною стабільністю показів при значній варіації сили удару і не залежить від його напрямку. Доцільність використання часових параметрів ударно-хвильового відгуку як інформативних ознак при неруйнівному контролі геотехнічних об'єктів підтверджена також у роботах, присвячених моніторингу стану анкерного кріплення [19]. Для коректного визначення інформативного параметра контактна поверхня породного зразка має бути вирівняна, а сам зразок жорстко закріплений на масивній основі. Найкращим варіантом підготовки поверхні у виробничих умовах є відрізання фрагменту зразка ручним інструментом з алмазним диском.

Процес неруйнівної оцінки міцності підготовленого породного зразка з використанням апаратури ДИКОН ілюструється рис. 4.

Для проведення руйнівних випробувань з метою визначення міцності гірських порід на одновісний стиск прямим методом був використаний прес П500 з максимальним зусиллям стиску 5 МН. При стандартному розмірі кубічних зразків з ребром 42 мм руйнуюче зусилля для всіх типів досліджуваних порід практично на порядок менше можливостей пресу. Це дало змогу забезпечити рівномірне навантаження зразка зі швидкістю близько 2 МПа за секунду. При вказаних умовах експерименту випробувальну машину можна вважати жорсткою, а результати визначення міцності для порід з крихким характером руйнування - коректними.



Рис. 4. Неруйнівна оцінка міцності порід з використанням авторського варіанту методу ударного імпульсу.

2. Результати досліджень та їх аналіз

Для проведення експерименту були використані проби гірських порід вугільних шахт Західного Донбасу «Дніпровська» та «Самарська», а також залізорудного кар'єру Полтавського гірничо-збагачувального комбінату. Кожна проба містила по три куски неправильної форми, з яких потім були підготовлені зразки кубічної форми з ребром 42 мм для руйнівних випробувань. Порівняльні результати неруйнівного контролю ультразвуковим методом та руйнівного визначення міцності на одновісний стиск з усередненням по типах порід наведено в табл. 2.

Таблиця 2.

Усереднені результати прямого визначення міцності порід шляхом роздавлювання зразків на пресі та інформативних параметрів неруйнівного контролю для різних типів порід

Тип породи	Умовний номер	Кількість проб	Міцність на стиск, МПа	Швидкість поздовжньої хвилі, км/с		Тривалість ударного імпульсу, мс
				вздовж шарів	поперек шарів	
Кварцит	1	8	113	4,41	3,89	0,13
Пісковик	2	1	92	4,19	3,90	0,14
Сланець	3	4	86	3,81	3,52	0,15
Амфіболіт	4	5	81	3,70	3,39	0,17
Граніт	5	2	51	3,51	3,24	0,19
Алевроліт	6	3	25	3,08	2,58	0,21
Аргіліт	7	13	19	3,00	2,45	0,22
Вугілля	8	7	29	2,15	1,91	0,27

При опрацюванні статистичних даних, наведених в табл. 2, було встановлено досить високе значення коефіцієнта кореляції між міцністю гірської породи незалежно від її типу та інформативними параметрами неруйнівного ультразвукового контролю. Встановлено також, що для широкого діапазону значень міцності зв'язок між міцністю та швидкістю поздовжньої хвилі з достатньою точністю може бути описаний лінійною залежністю для всіх типів гірської породи, окрім вугілля. Очевидно має значення органічне походження даного виду корисної копалини.

Вигляд вказаної залежності для двох варіантів прозвучування породних зразків неправильної форми представлено на рис. 5 та 6.

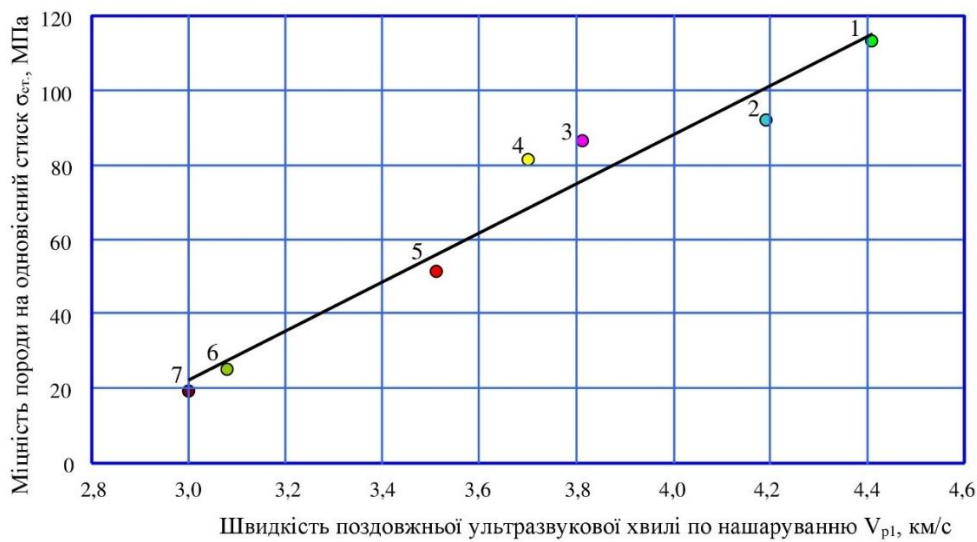


Рис. 5. Лінійна інтерполяція зв'язку між швидкістю поздовжньої ультразвукової хвилі по нашаруванню та міцністю на одновісний стиск для породи: 1 – кварциту, 2 – пісковіку, 3 – сланцю, 4 – амфіболіту, 5 – граніту, 6 – алевроліту, 7 – аргіліту.

Аналітичні вирази лінійної залежності для обох варіантів прозвучування наведено в табл. 3. Значення V_p беруть в км/с, а значення $\sigma_{ст}$ отримують в МПа.

Таблиця 3.

Лінійна апроксимація залежностей між швидкістю поздовжньої хвилі та міцністю порід на одновісний стиск при навантаженні перпендикулярно до нашарування

Функціональна залежність	Лінійна апроксимація	Достовірність апроксимації
$\sigma_{ст.} = f(V_p)$ паралельно шарам	$\sigma_{ст.} = 66V_p - 176$	0,95
$\sigma_{ст.} = f(V_p)$ перпендикулярно шарам	$\sigma_{ст.} = 60V_p - 129$	0,94

Рис. 6. Лінійна інтерполяція зв'язку між швидкістю поздовжньої ультразвукової хвилі впоперек шарів та міцністю породи на одновісний стиск

Тривалість пружної взаємодії ударника з породою добре корелює з величиною міцності породи на одновісний стиск. Зв'язок між тривалістю пружної взаємодії

ударника з поверхнею породи та її міцністю без врахування вугілля з достовірністю 0,97 може бути описаний лінійною залежністю виду

$$\sigma_{\text{ст.}} = -1000\tau + 240 \quad (1)$$

де: $\sigma_{\text{ст.}}$ - межа міцності породи на одновісний стиск, МПа;

τ – тривалість пружної взаємодії ударника з породою, мс.

Графічно залежність (1) ілюструється рис. 7.

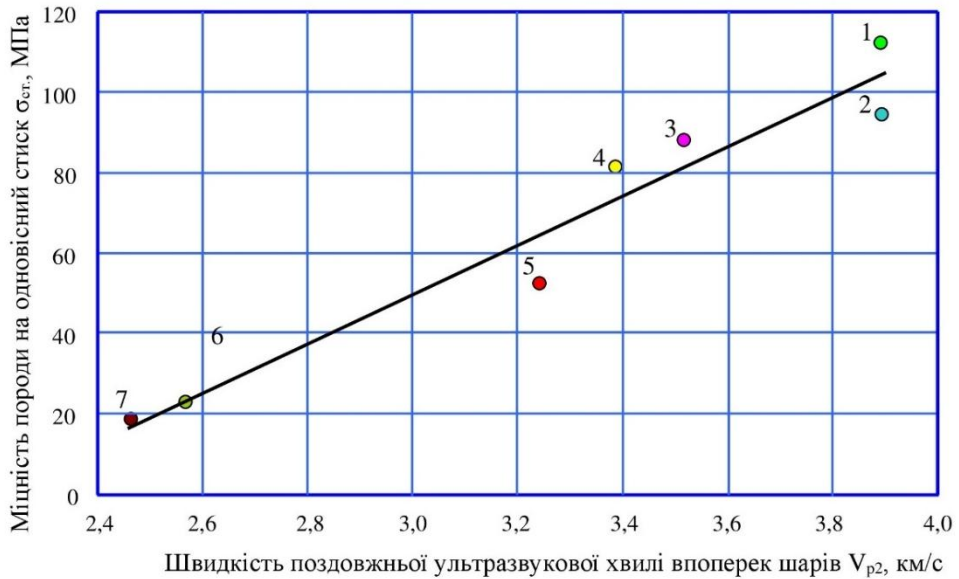


Рис. 6. Лінійна інтерполяція зв'язку між швидкістю поздовжньої ультразвукової хвилі впоперек шарів та міцністю на одновісний стиск для породи: 1 – кварциту, 2 – пісковика, 3 – сланцю, 4 – амфіболіту, 5 – граніту, 6 – алевроліту, 7 – аргіліту.

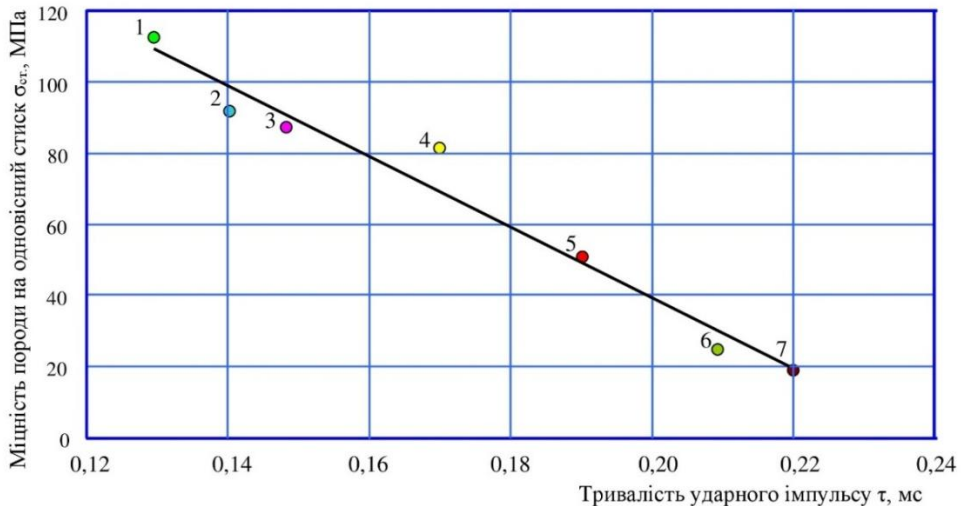


Рис. 7. Лінійна інтерполяція зв'язку між тривалістю ударного імпульсу та міцністю на одновісний стиск для породи: 1 – кварциту, 2 – пісковика, 3 – сланцю, 4 – амфіболіту, 5 – граніту, 6 – алевроліту, 7 – аргіліту.

Орієнтовна оцінка похибок при застосуванні визначення міцності порід на одновісний стиск неруйнівними методами в порівнянні з прямими руйнівними випробуваннями наведена в табл. 4.

Таблиця 4.

Оцінка похибок визначення міцності при використанні неруйнівних методів для різних типів порід

Гірська порода	Відносна похибка для залежностей, %		
	Метод ударного імпульсу	Ультразвуковий метод	
		Паралельно шарам	Перпендикулярно шарам
Кварцит	-2,7	+1,8	-6,2
Пісковик	+8,0	+9,2	+13,5
Сланець	+4,4	-12,2	-4,4
Амфіболіт	-13,5	-15,8	-8,1
Граніт	-2,0	+9,3	+28,2
Алевроліт	+20,0	+9,2	+3,2
Аргіліт	+5,2	+15,7	-5,3
Середнє по модулю	7,9	10,5	9,8

Аналіз табл. 4 показує, що для експрес-оцінки міцності широкого кола гірських порід без попереднього тарування в лабораторних умовах можуть бути використані обидва з вказаних методів: ультразвуковий та ударного імпульсу. При цьому ультразвуковий метод є більш оперативним, оскільки він не потребує підготовки поверхні зразка. В той же час метод ударного імпульсу придатний для більш широкого кола порід, в тому числі і при високому затуханні ультразвуку, де неможливим є достовірний аналіз хвильової картини.

Висновки

Проведені дослідження вказали на перспективу більш широкого впровадження неруйнівних методів визначення міцності гірських порід, представлених зразками неправильної форми, в умовах виробничих підприємств, а також в масиві, безпосередньо на місці залягання. Особливістю даного підходу є використання універсальної для широкого кола порід лінійної залежності між інформативним параметром та міцністю на одновісний стиск.

Підтверджено високу інформативність ультразвукового методу у варіанті поверхневого прозвучування з використанням вітчизняної апаратури та ультразвукових перетворювачів з конічними концентраторами, розміщених на фіксованій базі. Встановлено, що для даного варіанту оптимальний частотний діапазон лежить в межах 50-70 кГц, а база контролю повинна складати від 100 до 150 мм. Найбільш інформативним параметром є швидкість поздовжньої хвилі при прозвучуванні паралельно шаруватості. В цьому випадку максимальна зафіксована різниця між прямим визначенням міцності руйнівним методом та результатом оцінки міцності ультразвуковим методом склала 15,8 %.

Метод ударного імпульсу може виступити як альтернатива ультразвуковому у випадку, коли породний штуф має розміри менші, ніж фіксована база прозвучування, а також при високому затуханні ультразвуку в конкретній породі. Інформативним параметром є тривалість пружної взаємодії сферичного ударника з породою. При цьому поверхня штуфу в точках нанесення ударів має бути заздалегідь вирівняна. Для оцінки міцності використовувалась авторська розробка ДИКОН. Максимальна різниця між результатами руйнівного та неруйнівного визначення міцності склала 20,0 %, а середня – 7,9 %.

Обидва методи можуть бути рекомендовані для швидкого проведення оцінки міцності сукупності порід родовища, коли необхідно дослідити великий об'єм геологічного матеріалу. В цьому випадку знижена точність оцінки міцності конкретного зразка породи компенсується можливістю аналізу великої кількості зразків.

1. I.W.-Q. Xie, X.-L. Liu, X.-P. Zhang, Q.-S. Liu and E.-Z. Wang, A review of test methods for uniaxial compressive strength of rocks: Theory, apparatus and data processing, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 17, no 3, 1889-1905 (2025). <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2024.05.003>.
2. S. Kahraman, Evaluation of simple methods for assessing the uniaxial compressive strength of rock, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 38, no 7, 981-994 (2001). [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(01\)00039-9](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(01)00039-9).
3. S. Skipochka, O. Krukovskiy, T. Palamarchuk and L. Prokhorets, On the methodology for considering scale effect of rock strength, *Mining of Mineral Deposits*, 14, no 4, 24-30 (2020). <https://doi.org/10.33271/mining14.04.024>.
4. V. Ambati, S. Sharma, M. N. Babu and R. R. Nair, Laboratory measurements of ultrasonic wave velocities of rock samples and their relation to log data: A case study from Mumbai offshore, *Journal of Earth System Science*, 130, 176 (2021). <https://doi.org/10.1007/s12040-021-01696-x>.
5. P. H. Liu, J. H. Wu and D. H. Lee, New rock strength-based UCS- V_p correlation equation for different rock types by statistical regression methods, *Geomechanics for Energy and the Environment*, 32, 100403 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.gete.2022.100403>.
6. T. Rahman and K. Sarkar, Correlations between uniaxial compressive strength and dynamic elastic properties for six rock types, *International Journal of Geomechanics*, 23, no 6, 04023064-1 (2023). <https://doi.org/10.1061/IJGNALGMENG-7854>.
7. K. Karaman, A. Kesimal and H. Ersoy, A comparative assessment of indirect methods for estimating the uniaxial compressive and tensile strength of rocks, *Arabian Journal of Geosciences*, *Arabian Journal of Geosciences*, no 4, 2393-2403. <https://doi.org/10.1007/s12517-014-1384-0>.
8. L. Selçuk and E. Yabalak, Evaluation of the ratio between uniaxial compressive strength and Schmidt hammer rebound number and its effectiveness in predicting rock strength, *Nondestructive Testing and Evaluation*, 30, 1-12 (2015). <https://doi.org/10.1080/10589759.2014.977789>.
9. M. Gomez-Heras, D. Benavente, C. Pla, J. Martinez-Martinez, R. Fort and V. Brotons, Ultrasonic pulse velocity as a way of improving uniaxial compressive strength estimations from Leeb hardness measurements, *Construction and Building Materials*, 261, 119996 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.119996>.

10. L. Selçuk and A. Nar, Prediction of uniaxial compressive strength of intact rocks using ultrasonic pulse velocity and rebound-hammer number, *Quarterly Journal of Engineering Geology and Hydrogeology*, 49, no 1, 67-75 (2016). <https://doi.org/10.1144/qjegh2014-094>.
11. S. Kalantari, H. Hashemolhosseini and A. Baghbanan, Estimating rock strength parameters using drilling data, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 104, 45-52 (2018). <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2018.02.013>.
12. B. Jiang, F. L. Ma, Q. Wang, Y. Liu, S. C. Li, M. C. He and H. Y. Wei, Research of relationship between digital drilling parameters and rock uniaxial compressive strength based on cutting theory, *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 52, 1601-1609 (2021). <https://doi.org/10.1007/s40789-020-00383-4>.
13. K. Gao, X. Xu and S. Jiao, Measurement and perception of the rock strength by energy parameters during the drilling operation, *Measurement*, 227, 114268 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2024.114268>.
14. M. He, N. Li, J. Zhu and Y. Chen, Advanced prediction for field strength parameters of rock using drilling operational data from impregnated diamond bit, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 187, 106847 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.petrol.2019.106847>.
15. S. V. Swamy, B. M. Kunar, K. R. Chandar, M. Alwetaishi, S. Krishnan and S. Reddy, Prediction of uniaxial compressive strength of limestone from ball mill grinding characteristics using supervised machine learning techniques, *Scientific Reports*, 15, 28395 (2025). <https://doi.org/10.1038/s41598-025-09063-2>.
16. M. S. Sabri, A. K. Verma and T. N. Singh, Direct and indirect methods for uniaxial compressive strength estimation in various geo-environments: A review, *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 17, 8241-8275 (2025). <https://doi.org/10.1016/j.jrmge.2025.01.050>.
17. A. E. Aladejare, E. D. Alofe, M. Onifade, A. I. Lawal, T. M. Ozoji and Z.-X. Zhang, Empirical estimation of uniaxial compressive strength of rock: Database of simple, multiple, and artificial intelligence-based regressions, *Geotechnical and Geological Engineering*, 39, 4427-4445 (2021). <https://doi.org/10.1007/s10706-021-01772-5>.
18. С. И. Скипочка, Т. А. Паламарчук, В. Н. Сергиенко и Л. В. Прохорец, Экспресс-оценка прочности горных пород в массиве методом ударного импульса, *Металлургическая и горнорудная промышленность*, № 2, 74-77 (2013).
19. S. Skipochka, O. Krukovskyi, V. Serhienko and I. Krasovskyi, Non-destructive testing of rock bolt fastening as an element of monitoring the state of mine workings, *Mining of Mineral Deposits*, 13, no 1, 16-23 (2019). <https://doi.org/10.33271/mining13.01.016>.

Глибоке навчання для виявлення вибухонебезпечних об'єктів на зображеннях: порівняльний аналіз

К. С. Берхмільлер¹, С. В. Хорошилов²

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України, Дніпро, Україна

¹ xhatter7@gmail.com; ² khoroshylov.s.v@nas.gov.ua

У роботі виконано порівняльний аналіз двох сучасних архітектур глибокого навчання — YOLOv8 та RT-DETR — у контексті задачі автоматичного виявлення вибухонебезпечних об'єктів автономними робототехнічними системами. Досліджено вплив роздільної здатності вхідного зображення (384×384, 512×512, 640×640 пікселів) на ключові метрики детекції: середню точність (mAP), precision та recall, а також на час обробки одного кадру. Встановлено, що трансформерна модель RT-DETR забезпечує вищу точність розпізнавання (mAP до 78,3 %) порівняно з YOLOv8x (mAP до 72,5 %), тоді як YOLOv8 демонструє суттєво кращі показники швидкодії — час обробки до 32 мс проти 53 мс для RT-DETR при максимальній роздільній здатності. Отримані результати дозволяють сформулювати практичні рекомендації щодо вибору архітектури залежно від системних вимог.

Ключові слова: глибоке навчання, детекція об'єктів, автономні робототехнічні системи, YOLOv8, RT-DETR, mAP, precision, recall.

Вступ

Розвиток автономних робототехнічних систем (АРС) для гуманітарного розмінування та розвідки вибухонебезпечних об'єктів (ВНО) є одним із пріоритетних напрямів сучасної прикладної механіки та робототехніки [1]. Масштабне застосування протипіхотних та протитанкових мін, а також нерозірваних боєприпасів у сучасних збройних конфліктах зумовлює критичну потребу в надійних системах автоматизованого пошуку та нейтралізації небезпечних об'єктів.

Ефективна робота таких систем неможлива без точних і швидких алгоритмів комп'ютерного зору. У цьому контексті методи глибокого навчання довели свою конкурентоздатність порівняно з класичними підходами до обробки зображень [2]. Проте задача вибору оптимальної архітектури нейронної мережі для конкретного класу АРС залишається відкритою.

Метою даної роботи є кількісне порівняння архітектур YOLOv8 та RT-DETR за основними метриками детекції та часовими показниками при різних роздільних здатностях, а також формулювання науково обґрунтованих рекомендацій для проектування систем комп'ютерного зору АРС.

1. Архітектурні особливості моделей детекції

Модель YOLOv8 є еволюцією лінійки одноетапних детекторів на основі глибоких згорткових нейронних мереж (CNN). Архітектура включає три основних компоненти: backbone на основі CSPNet для вилучення ознак, neck типу PAN-FPN для агрегації мультимасштабних ознак і безанкорну голову детекції (anchor-free head) [3]. Нанорозмірна версія YOLOv8n має ~3,2 млн параметрів, максимальна YOLOv8x — ~68,2 млн.

Архітектура RT-DETR базується на механізмі самоуваги трансформера [4]. На відміну від YOLO, RT-DETR обробляє зображення як набір токенів, що дозволяє враховувати глобальні залежності між просторово розподіленими ділянками

зображення. Обчислювальна складність трансформерного блоку визначається виразом:

$$T(n, d) = O(n^2 \cdot d) \quad (1)$$

де n — кількість патч-токенів зображення, d — розмірність простору ознак. Ця квадратична залежність від числа токенів пояснює більший час отримання результату для RT-DETR порівняно з YOLOv8 при однакових роздільних здатностях, але також зумовлює кращу точність завдяки повнозв'язній просторовій агрегації ознак.

2. Методологія оцінювання та набір даних

Порівняльне оцінювання виконувалося на основі експериментальних даних [2]. Датасет налічує 4 832 анотованих зображення вибухонебезпечних об'єктів (протипіхотні та протитанкові міни, снаряди, суббоєприпаси): 3 456 тренувальних та 1 376 тестових. Тренування виконувалося з використанням оптимізатора Adam, batch size = 16 протягом 100 епох..

Для оцінювання використовуються такі стандартні метрики комп'ютерного зору. Середня точність (mAP) — площа під кривою precision–recall, усереднена по класах і порогах IoU від 0,50 до 0,95:

$$mAP = (1/C) \cdot \sum^c APC(c) \quad (2)$$

де C — кількість класів; $APC(c)$ — середня точність для класу c . Precision (P) — частка істинно-позитивних визначень:

$$P = TP / (TP + FP) \quad (3)$$

Recall (R) — частка знайдених об'єктів серед усіх реальних:

$$R = TP / (TP + FN) \quad (4)$$

де TP — true positive, FP — false positive, FN — false negative. Часова продуктивність оцінювалась як час інференсу одного зображення (мс) на апаратній платформі NVIDIA Jetson Orin NX з 8 ГБ RAM.

3. Результати порівняльного аналізу

Результати оцінювання моделей при трьох значеннях роздільної здатності наведено у табл. 1.

Таблиця 1.

Порівняльний аналіз моделей детекції вибухонебезпечних об'єктів

Модель	Роздільна здатність	Розмір об'єктів	mAP (%)	Precision (%)	Recall (%)	Час (мс)
YOLOv8n	384×384	малі	63,4	72,1	68,5	18
YOLOv8n	512×512	середні	68,7	75,4	72,6	23
YOLOv8x	640×640	великі	72,5	78,2	75,9	32
RT-DETR	384×384	малі	70,1	74,8	73,2	41
RT-DETR	512×512	середні	75,6	79,5	77,4	46
RT-DETR	640×640	великі	78,3	82,1	80,7	53

На рис. 1 наведено гістограму значень mAP обох архітектур. Різниця між RT-DETR та YOLOv8x при роздільній здатності 640×640 становить:

$$\Delta mAP = 78,3 \% - 72,5 \% = 5,8 \% \quad (5)$$

Відносне покращення точності RT-DETR:

$$\delta mAP = \Delta mAP / mAP_{YOLO} \cdot 100\% = 5,8 / 72,5 \cdot 100\% \approx 8,0 \% \quad (6)$$

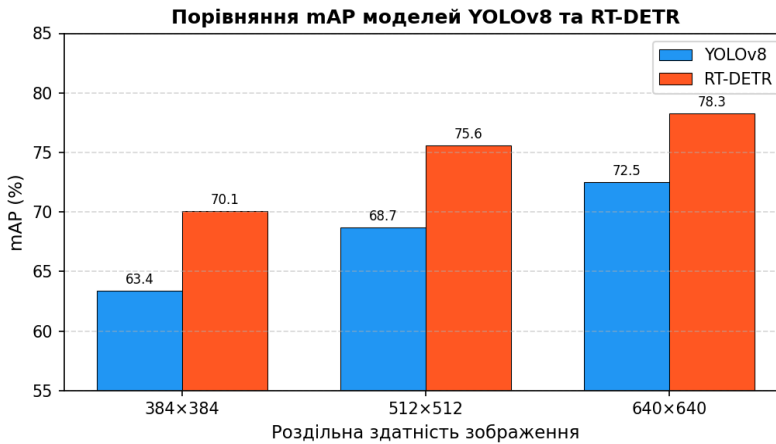


Рис. 1. Порівняння mAP моделей YOLOv8 та RT-DETR при різних роздільних здатностях.

Крива precision–recall (рис. 2) демонструє, що RT-DETR досягає кращого балансу між точністю та повнотою виявлення у всіх конфігураціях. Особливо помітна перевага при детекції малих об'єктів (384×384): recall RT-DETR = 73,2 % проти 68,5 % для YOLOv8n — різниця 4,7 відсоткових пункти.

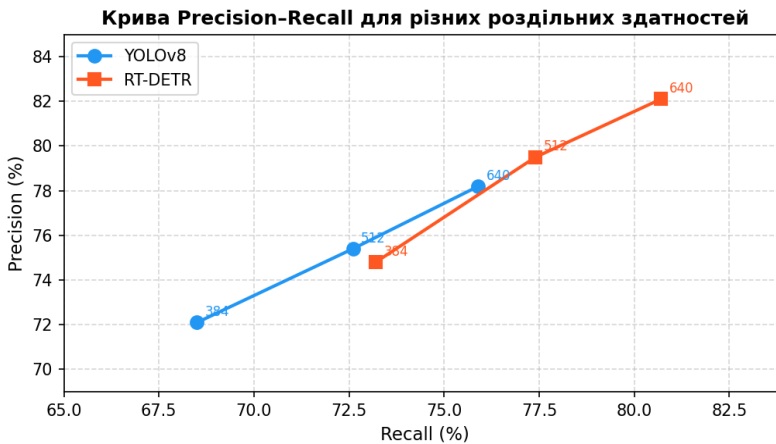


Рис. 2. Крива Precision–Recall для моделей YOLOv8 та RT-DETR при різних роздільних здатностях.

Аналіз часових характеристик (рис. 3) показує суттєву перевагу YOLOv8 у швидкодії. Кратність перевищення часу інференсу RT-DETR над YOLOv8:

$$k_{384} = 41/18 \approx 2,28; \quad k_{512} = 46/23 = 2,0; \quad k_{640} = 53/32 \approx 1,66 \quad (7)$$

Зі збільшенням роздільної здатності кратність часового відставання RT-DETR зменшується від 2,28 до 1,66, що пояснюється зменшенням відносної частки обчислень трансформера у загальному часі обробки. YOLOv8x при 640×640 забезпечує ~31 FPS, RT-DETR — ~19 FPS.

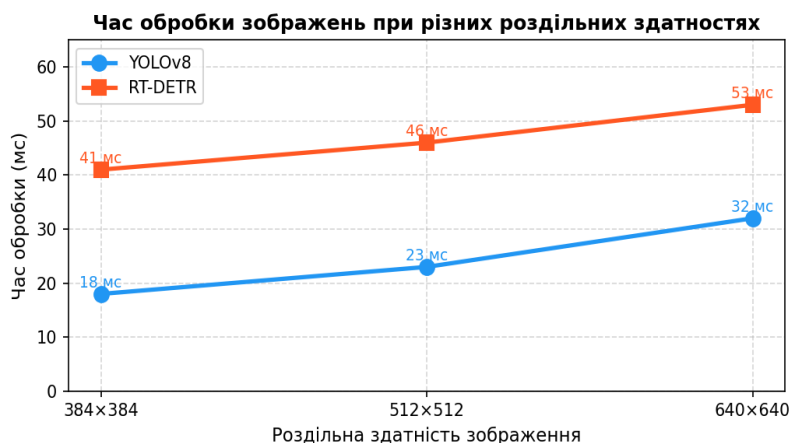


Рис. 3. Час обробки одного зображення (мс) для YOLOv8 та RT-DETR при різних роздільних здатностях.

4. Аналіз та обговорення результатів

Отримані результати відповідають теоретичним очікуванням, що ґрунтуються на архітектурних відмінностях моделей. Механізм самоуваги трансформера в RT-DETR дозволяє формувати глобальні ознаки зображення, що є ключовим для виявлення об'єктів з нечіткими локальними ознаками або при частковому перекритті [4].

Для критично важливих задач безпеки ціна хибно-негативного результату (пропущений ВНО) значно перевищує ціну хибно-позитивного (несправжня тривога). F1-score — гармонічне середнє між precision та recall — дозволяє комплексно оцінити цей баланс:

$$F1 = 2 \cdot P \cdot R / (P + R) \quad (8)$$

Розраховані значення F1-score для роздільної здатності 640×640: YOLOv8x → $F1 = 2 \cdot 78,2 \cdot 75,9 / (78,2 + 75,9) = 77,0 \%$; RT-DETR → $F1 = 2 \cdot 82,1 \cdot 80,7 / (82,1 + 80,7) = 81,4 \%$. Перевага RT-DETR за інтегральною метрикою F1 становить 4,4 відсоткових пункти.

Для оцінювання обчислювальної ефективності визначено коефіцієнт ефективності (mAP на одиницю часу обробки, умов. од. mAP/ms):

$$\eta = mAP / t_{inf} \quad (9)$$

YOLOv8x: $\eta = 72,5/32 \approx 2,27 mAP/ms$; RT-DETR: $\eta = 78,3/53 \approx 1,48 mAP/ms$. Тобто YOLOv8 є в 1,53 рази більш обчислювально ефективним вибором для ресурсообмежених платформ.

5. Практичні рекомендації для проектування систем APC

На основі проведеного аналізу сформульовано наступні рекомендації:

1. Для мобільних платформ з обмеженими ресурсами (БПЛА, легкі наземні роботи) рекомендується YOLOv8n/YOLOv8s із роздільною здатністю 512×512, що забезпечує $mAP \approx 68,7 \%$ при $\sim 43 FPS$.

2. Для стаціонарних або колісних платформ з потужнішим обчислювачем рекомендується RT-DETR із роздільною здатністю 640×640: $mAP = 78,3 \%$, $F1 = 81,4 \%$, $\sim 19 FPS$.

3. Для гібридних сценаріїв (первинне сканування + верифікація) — двоетапна стратегія: YOLOv8 для швидкого виявлення кандидатів і RT-DETR для уточнюючої класифікації.

4. Поріг виявлення (confidence threshold) доцільно знижувати до 0,35–0,40 для мінімізації ймовірності пропуску ВНО за рахунок допустимого зростання кількості хибних тривог.

Висновки

1. Проведено систематичне порівняння архітектур YOLOv8 та RT-DETR для задачі детекції ВНО за метриками mAP, precision, recall та часом інференсу при трьох роздільних здатностях.

2. RT-DETR перевершує YOLOv8x за mAP на 5,8 п.п. (78,3 % vs 72,5 %) та за F1-score на 4,4 п.п. (81,4 % vs 77,0 %) при 640×640. Перевага пояснюється глобальною просторовою агрегацією ознак трансформерним механізмом уваги.

3. YOLOv8x має в 1,66 рази нижчий час інференсу (~31 FPS vs ~19 FPS при 640×640) та в 1,53 рази вищий коефіцієнт обчислювальної ефективності η .

4. Сформульовано практичні рекомендації щодо вибору архітектури залежно від типу платформи та вимог до безпеки. Запропоновано двоетапну стратегію детекції для гібридних систем.

5. Перспективи подальших досліджень: методи дистиляції знань і квантизації (INT8/FP16) для прискорення RT-DETR на вбудованих платформах; інтеграція з алгоритмами підкріплювального навчання для гібридних систем керування АРС.

1. Goodfellow I., Bengio Y., Courville A. Deep Learning. — MIT Press, Cambridge, 2016. — 800 p.
2. Mishchuk V., Fesenko H., Kharchenko V. Deep Learning Models for Detection of Explosive Ordnance Using Autonomous Robotic Systems: Trade-off Between Accuracy and Real-Time Processing Speed // Radioelectronic and Computer Systems. — 2024. — №2. — P. 45–58.
3. Redmon J., Farhadi A. YOLOv3: An Incremental Improvement // arXiv:1804.02767. — 2018. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.02767>
4. Carion N., Massa F., Synnaeve G. et al. End-to-End Object Detection with Transformers // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. — 2022. — Vol. 44, №8. — P. 4128–4140.
5. Jocher G. et al. Ultralytics YOLOv8. — 2023. <https://github.com/ultralytics/ultralytics>
6. Zhang H., Li F., Liu S. et al. DINO: DETR with Improved DeNoising Anchor Boxes for End-to-End Object Detection // ICLR 2023. arXiv:2203.03605.
7. Lin T.-Y., Maire M., Belongie S. et al. Microsoft COCO: Common Objects in Context // ECCV 2014. — P. 740–755.

The solution of fatigue problems under combined loading by static torsion and symmetrical cyclic bending

V. M. Pelikh

S.P. Tymoshenko Institute of Mechanics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine

ut4ura@ukr.net

A problem of analysis of fatigue lifetime and ultimate state is solved for prismatic specimens under the united action of static torsion and symmetric cyclic bending. The solution is built on the basis of model of failure that sets dependence between the maximum values of amplitudes of asymmetric cycle of loading in the form of exponential transcendent function, and the conception of equivalent stresses. The stress of symmetric cycle is chosen as equivalent stress, which reduces the asymmetric cycle of loading to the symmetric cycle at the fixed number of cycles to failure. The results of calculations are experimentally approved for the specimens from alloyed steels and aluminum alloy.

Keywords: multi-cycle fatigue, prismatic specimen, fatigue lifetime, ultimate state, asymmetric loading, combined loading, cyclic bending, static torsion, equivalent stress.

Introduction.

The problem of fatigue failure of materials and structural elements, despite the huge amount of work done in this area, still remains relevant from both theoretical and applied points of view [1, 2, 3, 4]. Particularly relevant are the problems of fatigue failure during the interaction of various types of combined loading with static and cyclic loads, typical, for example, for most rotating shafts, gas turbine blades, crankshafts of internal combustion engines, fuselage and wing fragments of aircraft, and connecting elements of structures.

One of the types of combined loading is combined loading by static torsion and symmetrical cyclic bending [5, 6, 7]. Various shafts and axles of transport equipment are subject to this type of loading, in particular, shafts and axles of piston and jet engines, elements of aircraft wings. Evaluation of fatigue resistance under conditions of this type of loading is usually carried out using limit stress diagrams, establishing the dependence of the cyclic component of stress on the static one. Fatigue life, in this case, is described by fatigue curves, which display the dependence of the number of cycles before failure on the magnitude of the stress cycle amplitude by the parameter of tangential static stress.

Traditionally, limit stress diagrams and fatigue curves for combined static torsion and symmetric cyclic bending are constructed based on the results of labor intensive fatigue tests of material samples for each fixed value of tangential static stress [5]. In some cases, the problem is solved by establishing and using empirical dependencies of the fatigue curve parameters on the value of tangential static stress. This makes it possible to calculate the limit state and fatigue durability for intermediate values of tangential static stress and reduce the volume of very labor-intensive and time-consuming tests of material samples. This approach, however, provides satisfactory results for assessing the limit state only for a specific material or for several ratios of the static component to the cyclic one.

In [8], a model of the limit state for conditions of uniaxial asymmetric tension compression in the form of a exponential transcendent function is constructed, and in

[9, 10, 11], such a model is generalized to the case of asymmetric bending and torsion. The model allows us to cover almost all forms of limit stress diagrams characteristic of most structural materials and including convex, concave and near linear limit stress diagrams. The concept of equivalent stresses [12] is used to calculate fatigue lifetime. Equivalent stresses reduce an asymmetric cycle to a symmetric one and allow us to calculate fatigue lifetime using the fatigue characteristics of a symmetric cycle.

In this paper, the exponential transcendental function and the equivalent stress concept are used to construct a limit state model and solve fatigue problems under combined loading of static torsion and symmetric cyclic bending.

1. Statement of the problem.

The fatigue failure of solid cylindrical specimens subjected to combined loading of static torque and symmetric cyclic bending moment is considered.

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_a^b g(n), & \sigma_y = \sigma_z = 0; \\ \tau = \tau_m \end{cases} \quad (1.1)$$

where σ_a^b – amplitude of the cyclic component during bending; τ_m – static tangential component of the stress cycle; $g(n)$ – periodic function defining the law of change of stress σ_a^b to failure time; $n = ft$ – number of cycles of change of stress σ_a^b .

It is assumed that the amplitude values of the stresses σ_a^b frequency not depend from time (stationary mode) and fast enough (frequency $f = n/t > 10 \text{ Hz}$) change vary from cycle to cycle, and the maximum principal stress in a cycle σ_1 according to the criterion of maximum normal stresses does not exceed the yield strength of the material σ_y under tension - compression, so that

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_a^b}{2} + \sqrt{\frac{(\sigma_a^b)^2}{4}} + \tau_m \leq \sigma_y. \quad (1.2)$$

In this case, fatigue failure of the sample occurs in the multi-cycle region, where the number of cycles before failure $n_R \geq 10^5$.

The model of the limit state for asymmetric bending is given by the relation [10]

$$\frac{\sigma_a^b}{\sigma_n^b} = \left[\cos \left(\frac{\pi \sigma_m^b}{2 \sigma_B^b} \right) \right]^{\lambda_1} \quad (1.3)$$

and in the case of asymmetric torsion – by the ratio [10]

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} = \left[\cos \left(\frac{\pi \tau_m}{2 \tau_B} \right) \right]^{\lambda_2} \quad (1.4)$$

where σ_a^b, τ_a – amplitudes of cyclic stress during bending and torsion; σ_n^b, τ_n – limits of limited fatigue in symmetrical bending and torsion; σ_m^b, τ_m – static normal and shear stresses of the cycle; σ_B^b, τ_B – short-term strength of the material under bending and torsion; λ_1, λ_2 – sensitivity coefficient of material's to the asymmetry of the cycle during bending and torsion,

The equation of the fatigue curve according is establishing the dependence of the number of cycles before failure n_R from the destructive stress under a symmetrical loading cycle is written as [12]

$$n_R = [(1 + q)D(\sigma_a)^q]^{-1} \quad (1.5)$$

where σ_a – amplitude value of stress; q and D – fatigue curve parameters.

The problem is to generalize the power transcendental function in (1.3) and (1.4) on the conditions of combined loading with static torsion and symmetric cyclic bending and the solution on its basis of problems of calculating the fatigue lifetime and limit state of solid prismatic specimens of structural materials.

2. Models of fatigue failure under combined loading

As models of fatigue failure under the combined effect of static torsion and symmetric bending, a model of the limit state is considered that establishes the relationship between the destructive stresses by the parameter of the number of cycles before failure, and a model that establishes the relationship between the number of cycles before failure and the amplitude of the bending stress by the parameter of the static torsion stress.

2.1. Limit state model. Limit state model for convergence local impact of static torsion and symmetric cyclic bending in a normalized coordinate system is constructed by analogy with (1.3) and (1.4) in the form

$$\frac{\sigma_a^b}{\sigma_n^b} = \left[\cos\left(\frac{\pi\tau_m}{2\tau_B}\right) \right]^\chi \quad (2.1)$$

where χ – coefficient of sensitivity of the material to the combined effect of normal and shear stresses. The remaining designations correspond to those given in (1.3) and (1.4). In the limit state model (2.1), as in models (1.3) and (1.4), the boundary conditions are satisfied exactly for each of the stress cycle components.

The limit state model (2.1) specifies the relationship between the ultimate stresses of combined loading – static torsion and symmetric cyclic bending in a normalized (generalized) coordinate system that is invariant with respect to the number of cycles before failure n_R .

Model (2.1) covers almost all known forms of limit stress diagrams with variation of the material sensitivity coefficient χ to the combined effect of normal and shear stresses, including convex ones, linear and concave (Fig. 1), characteristic of most structural materials.

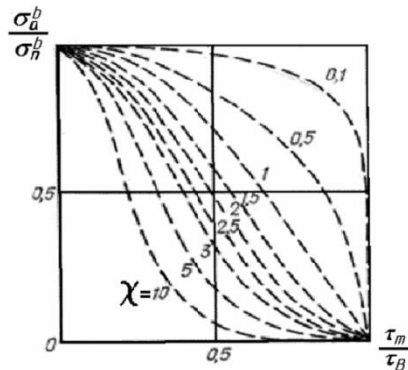


Fig. 1. Limit stress diagrams with variation of the material sensitivity coefficient χ .

2.2. Fatigue failure model. A fatigue failure model is constructed, establishing the relationship between the number of cycles before failure n_R in function cyclic stress amplitudes σ_a^b by the mean tangent stress parameter τ_m , defined according to (1.1). The model is built on the basis of the concept equivalent stresses that allow the asymmetric loading cycle to be reduced to a symmetric one cycle

$$(\sigma_a^b)_{eqv} = f(\tau_m, c_i) \sigma_a^b, \quad (2.2)$$

which define combinations of average shear stress τ_m and amplitudes cyclic stress σ_a^b afor the same number of cycles before failure n_R , and which corresponds to the fatigue limit die σ_n^b with symmetrical bending. Here c_i – experimentally determined coefficients.

Dependence of the number of cycles before failure n_R from equivalent stress $(\sigma_a^b)_{eqv}$ for a given type of loading is determined by the equation

$$n_R = \left[(1 + q) D ((\sigma_a^b)_{eqv})^q \right]^{-1} \quad (2.3)$$

which is obtained from the fatigue curve equation (1.5) at symmetrical cycle of change value σ_a on $(\sigma_a^b)_{eqv}$, where q and D – parameters of the fatigue curve at symmetric loading cycle.

Function $f(\tau_m, c_i)$ on (2.2) is identified based on the analytical expression (2.1), which defines the diagram of limit stresses in a normalized coordinate system.

Equivalent stresses $(\sigma_a^b)_{eqv}$ under combined static loading symmetric torsion and symmetric cyclic bending, are based on (2.1) taking into equation (2.2), are written in the form

$$(\sigma_a^b)_{eqv} = \left[\cos\left(\frac{\pi\tau_m}{2\tau_B}\right) \right]^{-\chi} \sigma_a^b \quad (2.4)$$

2.3. Methodology for determining coefficients. To solve fatigue. It is problems failure are based on the limit state model (2.1) and the fatigue failure model (2.3). It is necessary to have the value of the short-term static torsional strength τ_B and the values of material constants q , D and χ .

Tensile strength τ_B is determined based on the results of testing samples of the materials in pure torsion. Coefficients q and D are determined based on the results of experimental approximation mental data on fatigue with symmetrical ($\tau_m = 0$) cycle of loading by pure bending. As in [12], the problem is reduced to minimization of the functional

$$\Phi(q, D) = \sum_{j=1}^S \{n_{Rj}(\sigma_{nj}) - [(1+q)D(\sigma_n^b)^q]^{-1}\}^2 \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

where σ_{nj} and n_{Rj} – a set of discrete values of fatigue limits and the corresponding numbers of cycles until failure.

Constant χ , characterizing the sensitivity of the material to biaxiry loading, is determined anolazid to [13] from the condition of best agreement of the experimental values σ_{aj}^b , σ_{nj}^b , τ_{mj} from linearized limit diagram

$$\frac{\sigma_{aj}^b}{\sigma_{nj}^b} = \left[\cos\left(\frac{\pi\tau_{mj}}{2\tau_B}\right) \right]^\chi, \quad (2.6)$$

which follows from (2.1) provided that the values σ_{aj}^b , σ_{nj}^b , τ_{mj} (2.6) corresponds to one and the same number of cycles before failure n_R .

The problem of determining a constant χ is reduced, based on (2.6), to minimization functionality

$$\Phi(\chi) = \sum_{j=1}^k \left\{ \frac{\sigma_{aj}^b}{\sigma_{nj}^b} - \left[\cos\left(\frac{\pi\tau_{mj}}{2\tau_B}\right) \right]^\chi \right\}^2 \rightarrow 0 \quad (2.7)$$

where the combinations of normal and shear stresses in the base experiment are chosen so that the relations are satisfied

$$\nu = \sigma_a^b / \tau_m = 0,5; 1,0; 1,5,$$

which allows us to cover the most typical types of biaxial cyclic loading.

3. Calculation of fatigue lifetime and limit state.

The problem of calculating the fatigue lifetime and limit state of solid cylindrical specimens under combined loading by static torsion and symmetric cyclic bending is solved.

3.1. Research objects and material constants. Fatigue is considered failure of solid cylindrical specimens using the example of failure of solid cylindrical specimens made of 40X and 45 steels and Д16Т aluminum alloy under combined loading with static torsion and symmetrical cyclic bending.

Torsional strength values τ_B for the materials under study and also the values of the material constants q , D and χ used in the calculations, found using the methodology described in Section 2.3 are given in the Table 1. The experimental data used to determine the coefficients were borrowed from [14, 5].

Table 1.

Strength values τ_B for the materials, values of the material constants q , D and χ .

Material	τ_B , MPa	q	D , MPa ^q ·cycle ⁻¹	χ
Steel 40X	1172.2	19,786	$6,812 \cdot 10^{-65}$	0.64
Steel 45	751,0	20,218	$3,201 \cdot 10^{-62}$	0.38
Alloy Д16Т	310,0	6,446	$1,927 \cdot 10^{-22}$	1.41

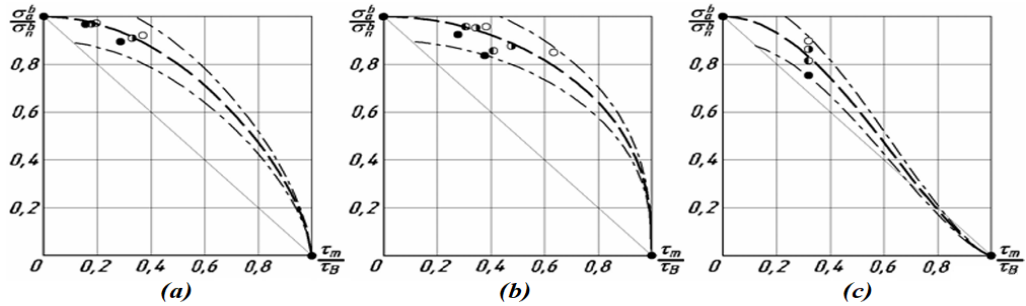


Fig. 2. Relative value σ_a^b / σ_n^b from τ_m / τ_B .

Dependence of relative value σ_a^b / σ_n^b from τ_m / τ_B , calculated by the equation (2.1) using the value of the exponent χ , given in the table and calculated for three values of the quantity ν , is in satisfactory agreement with the experimental data (Fig. 2) obtained for a wider range of values of the quantity ν . The dependence is calculated for samples made of 40X steel (Fig. 2a) for values $\nu = 2,0; 2,25; n_R = 10^4$ (○) cycle; $\nu = 1,78; 2,0; n_R = 10^5$ (●) cycle; $\nu = 1,58; 1,78; n_R = 10^6$ (●) cycle, for samples made of steel 45 (Fig. 2b) for values $\nu = 1,48; 2,5; n_R = 10^4$ (○) cycle; $\nu = 1,3; 2,24; n_R = 10^5$ (●) cycle; $\nu = 1,2; 2; n_R = 10^6$ (●) cycle; $\nu = 1,07; 1,79; n_R = 10^7$ (●) cycle. and for samples made of aluminum alloy Д16Т (Fig. 2c) for values $\nu = 2,4; n_R = 10^5$ (○) cycle; $\nu = 1,8; n_R = 4 \cdot 10^5$ (●) cycle; $\nu = 1,6; n_R = 10^6$ (●) cycle; $\nu = 1,4; n_R = 10^7$ (●) cycle. From here on the calculation results are shown in dashed lines, and the experimental data are dots. The dash-dotted lines indicate the $\pm 10\%$ interval, which specifies the deviation from the calculated values σ_a^b / σ_n^b . Experimental data are taken from [14, 5].

3.2. Calculation of fatigue lifetime. The number of cycles to failure n_R is calculated depending on the amplitude σ_a^b and the static component τ_m . The value of n_R is determined from the equation

$$n_R = \left[(1 + q)D \left\{ \cos \left(\frac{\pi \tau_m}{2 \tau_B} \right) \right\}^{-q\chi} (\sigma_a^b)^q \right]^{-1} \quad (3.1)$$

obtained from (2.3) taking into account (2.4).

Results of calculation of the number of cycles before failure n_R solid samples at under binary loading with static torsion and symmetric cyclic bending, performed according to equation (3.1) using the values of the coefficients given in the table, are compared in Fig. 3 with experimental data when varying the parameter τ_m . Fatigue curves are calculated for steel specimens 40X (Fig. 2a) for values $\tau_m = 433.67$ (○) and 384.14 (●) MPa; for samples made of steel 45 (Fig. 2b) – for values $\tau_m = 356.08$ (○) and 228.08 (●) MPa and for samples made of aluminum alloy Д16Т (Fig. 2c) – with the value $\tau_m = 98.1$ (○) MPa. Solid lines

show the curves fatigue under symmetric loading cycle. Experimental data are taken from [14, 5]

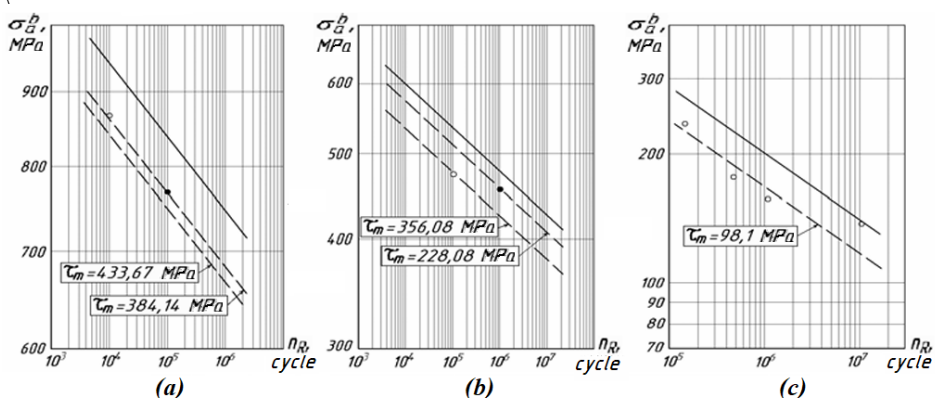


Fig. 3. Number of cycles before failure n_R solid samples at under binary loading with static torsion and symmetric cyclic bending.

3.3. Calculation of the limit state. The amplitude value is calculated at depending bending σ_a^b on the static component τ_m by the parameter of the number of cycles before failure n_R . The value of the quantity σ_a^b is determined from the equation

$$\sigma_a^b = [(1 + q)Dn_R]^{-\frac{1}{q}} \left[\cos\left(\frac{\pi\tau_m}{2\tau_B}\right) \right]^\chi \quad (3.2)$$

obtained from (2.1) taking into account (1.5), where it is accepted $\sigma_n^b = \sigma_a^b$.

Results of calculations of the value σ_a^b a solid samples in combined under static torsion and symmetric cyclic bending loading, performed according to equation (3.2) using the values of the coefficients given in the table, are compared in Fig. 4 with the experimental data for samples made of 40X steel (a) for values $n_R = 10^4$ (○), 10^5 (●), 10^6 (●) cycle; for steel 45 samples (b) for values $n_R = 10^4$ (○), 10^5 (●), 10^6 (●), 10^7 (●) cyclic and for samples made of aluminum alloy D16T (c) for values $n_R = 10^5$ (○), $4 \cdot 10^5$ (●), 10^6 (●), 10^7 (●) cycle with varying number of cycles before failure n_R . Experimental data are taken from [14, 5].

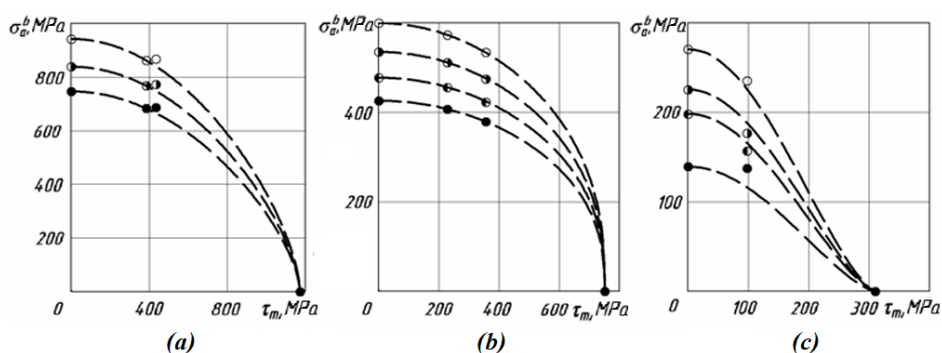


Fig. 4. Depending bending σ_a^b on the static component τ_m , shown as calculated and experimental data.

4. Results.

The problem of calculating fatigue lifetime and the ultimate limit state under combined loading with static torsion and symmetrical cyclic bending is solved in the paper based on a ultimate limit state model that links the ultimate stresses of a loading cycle using a transcendental function and the concept of equivalent stresses, which makes it possible to reduce combined loading with cyclic bending and static torsion to symmetrical cyclic bending.

The results of calculations of fatigue life and ultimate state of solid samples of steel 40X, steel 45 and aluminum alloy Д16Т, performed according to the proposed models, are in satisfactory agreement with experimental data. The maximum error in durability n_R obtained for steel 40X (see Fig. 3a) at $\tau_m = 384.14$ MPa, $\sigma_a^b = 880$ MPa and amounted to 50%. For other materials and levels of average shear stress τ_m durability error fluctuates between 5 and 30%, which, given the large spread of experimental data during fatigue tests, can be considered quite acceptable. The largest error in calculating the limit state was 12% for the Д16Т aluminum alloy (see Fig. 4c) at $\tau_m = 98.1$ MPa and $n_R = 10^7$.

Conclusion.

The approach to solving fatigue failure problems based on the use of a exponential transcendental function for formulating limit state models under uniaxial asymmetric loading also can be used for biaxial combined loading with static torsion and symmetric cyclic bending. Within the framework of this approach, the problems of calculating the fatigue lifetime by the static torsion stress parameter and the dependence of the amplitude of cyclic bending stresses on the static torsion stress by the parameter of the number of cycles to failure are solved. The calculation results are in satisfactory agreement with the experimental data for steel 40X, steel 45 and aluminum alloy Д16Т. This approach to such calculations under this type of loading is an alternative to those that currently exist.

References

1. Serensen S.V., Kogaev V.P., Shneiderovich R.M. Load-bearing capacity and strength calculations of machine parts. Guide and reference manual / Ed. S.V. Serensen. – Moscow: Mashinostroenie, 1975. – 488 p.
2. Collins J.A. Failure of materials in mechanical design. Analysis. Prediction. Prevention. – New York: John Wiley & Sons, 1981. – 624 p.
3. Golub V.P., Plashchinskaya A.V. On the Theory of Growth of Fatigue Mode I Cracks in Thin Isotropic Plates of Finite Size under Uniaxial Tension-Compression // Int. Appl. Mech. – 2018. – 54, N 2. – P. 188 – 206. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0871-5>.
4. Heywood R.B. Designing against fatigue. – London: Chapman and Hall Ltd., 1962. – 504p.
5. Pochteniy E.K., Staychenko E.S. Study of cyclic strength of steels 45 and 40X under conditions of combined action of cyclic bending and static torsion // Problems of strength. – 1973. – No. 8. – P. 114 – 116. <https://doi.org/10.1007/bf00770682>.
6. Forrest P.G. Fatigue of Metals. – London-New York-Paris: Pergamon Press, 1962. – 425p.
7. Kobzar Yu. M. Models of Long-Term Brittle Fracture of Rods in Tension and Compression under Creep Conditions // Int. Appl. Mech. – 2017. – 53, N 4. – P. 444 – 453. <https://doi.org/10.1007/s10778-017-0828-0>.
8. Golub V.P., Krizhanovsky V.I. On the assessment of the limit state of materials under asymmetric multi-cycle loading // Problems of Strength. – 1994. – No. 4. – P. 3 – 15.

9. Golub VP, Pogrebnyak AD, Kochetkova E.S. Fatigue Strength of Metallic and Composite Materials under Repeated High-Cycle Bending // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – 44, – N 5. – P. 516 – 524. <https://doi.org/10.1007/s10778-006-0114-z>.
10. Golub V.P., Pogrebnyak A.D., Kochetkova E.S. Fatigue Strength of Metals and Composites under Repeated High-Cycle Torsion // *Int. Appl. Mech.* – 2008. – 44, – N 2. – P. 134 – 141. <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0039-9>.
11. Pogrebnyak A.D, Pelykh V.N, Kasperskaya V.V. On Selection of the Model of Limiting State of Heat Resistant Materials under Uniaxial Asymmetric Loading // *Int. Appl. Mech.* – 2018. – 54, N 1.– P. 56 – 63. <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0859-1>.
12. Golub V.P., Pelykh V.N., Pogrebnyak A.D. Forecasting fatigue life of prismatic metal rods under asymmetric tension-compression using the equivalent stress method // *Spring. National Technical University of Ukraine "KPI". Mechanical Engineering.* - 2010. - No. 58.– P. 177 – 182.
13. Golub V.P. Method for calculating fatigue life of structural elements under biaxial combined loading // *Aviation and space engineering and technology.* – 2013. – 106. – No. 9.– P. 159 – 165.
14. Zemskov G.V. On the fatigue limit of some materials under variable bending and constant torsion // *Fatigue strength and durability of aircraft structures.* – Kuibyshev: Publishing house of the Aviation Institute, 1974. – P. 61 – 64.

Синтез, 3D-друк та експериментальні дослідження міцності анізотропних мультифракталів

І.Г.Грабар, О.В.Ксюковський, Д.А.Дубовик

Поліський національний університет, Житомир, Україна

ivan-grabar@ukr.net

Наведені результати дослідження характеристик граничної міцності та жорсткості зразків мультифракталів анізотропних кососиметричних (МАКС-4), синтезованих методом броунівської динаміки точки (БДТ) в полі чотирьох сил притягіння. Тверdotільні мультифрактальні зразки виготовлених методом 3D-друку із матеріалу PETG, розміри всіх зразків 90х90х3 мм. Зразки випробувались на стискування до руйнування. В роботі отримано результати досліджень шести типів мультифрактальних зразків з широким діапазоном параметра анізотропії: $\epsilon = 1,5; 1,667; 1,817; 2; 2,225; 2,5$. Побудовані узагальнені кореляційні залежності параметрів усередненої жорсткості та граничної міцності від параметра анізотропії ϵ . Показано, що руйнування мультифракталів відбувалося в результаті локальної втрати стійкості перемичок 4-го покоління підмножин мультифракталів.

Ключові слова: анізотропні мультифрактали; міцність та жорсткість; руйнування мультифракталів; синтез мультифракталів; броунівська динаміка точки

Вступ. В першій чверті 21 століття продовжує зростати інтересу до нових матеріалів з особливими, наперед заданими, властивостями. Для матеріалознавства та механіки матеріалів – це перш за все - композити, сотові та пористі матеріали. Розвиток теорії синтезу, технологій виготовлення та методів розрахунку мультифракталів дозволяє отримати більш глибокі узагальнення про всі названі матеріали з дробовою метрикою.

Нами на основі узагальнення методу броунівської динаміки точки (БДТ) в полі N сил притягіння побудована загальна теорія синтезу мультифракталів та продемонстровано надзвичайні можливості синтезу нових моно- та мультифрактальних структур з наперед заданими властивостями [1-4]. Це дозволило побудувати тензорну механіку мультифракталів, отримати інженерні залежності розрахунку їх фізико-механічних, аеро- та гідродинамічних характеристик, а також геометричних параметрів, причому одночасно на всіх структурних рівнях мультифракталів [1-3].

Огляд останніх публікацій

Наукові публікації останніх років демонструють стійку тенденцію до інтеграції фрактального та мультифрактального підходів у матеріалознавстві, механіці деформівного твердого тіла та інженерній конструювання.

Окремий напрям сучасних досліджень пов'язаний із синтезом мультифрактальних структур із наперед заданими властивостями. Запропоновано узагальнену теорію синтезу мультифракталів на основі броунівської динаміки точки в анізотропному полі N сил притягіння [1-4]. Цей підхід є принципово новим, дозволяє синтезувати практично будь-які фрактальні структури і дозволяє звести багатовимірний простір геометричних і фізико-механічних властивостей до обмеженої кількості керувальних параметрів, а у випадку МАКС-4 — до одного скалярного параметра анізотропії ϵ . Це істотно спрощує інженерний аналіз і відкриває можливості цілеспрямованого проектування мультифрактальних матеріалів із прогнозованими характеристиками жорсткості, міцності, пористості та питомої ваги.

Дослідження механічного відгуку таких синтезованих структур показує, що ключовим чинником формування їхньої жорсткості є не стільки об'ємна частка матеріалу, скільки топологічна архітектура зв'язків, що виникають в процесі ієрархічної самоорганізації підмножин мультифракталу. Зокрема, використання параметра анізотропії дозволяє програмувати формування внутрішніх силових ланцюгів, які в науковій літературі часто описуються як «пружні магістралі». У мультифрактальних середовищах ці магістралі утворюють складну розгалужену мережу, яка концентрує в собі основну частину пружної енергії, залишаючи значну частину об'єму структури механічно пасивною. Такий нерівномірний розподіл внутрішніх зусиль призводить до виникнення специфічних масштабних ефектів, де ефективний модуль пружності системи змінюється нелінійно, залежно від структурного рівня.

Важливо підкреслити, що застосування композитів з особливими властивостями знайшли широке застосування в авіаційній, космічній та спеціальній техніці [5-7]. Особливості дослідження властивостей та застосування фрактальних матеріалів демонструє тенденцію до зростання їх ролі в сучасному матеріалознавстві [8-13].

Таким чином, аналіз наведених публікацій свідчить, що фрактальні та мультифрактальні структури є перспективними матеріалами із керованими властивостями. Поєднання узагальненої теорії синтезу, мультифрактального аналізу та можливостей адитивного виробництва формує нову парадигму проектування конструкцій, орієнтованих на конкретні службові задачі. На цьому тлі дослідження міцності та жорсткості мультифракталів МАКС-4 є логічним продовженням сучасних наукових тенденцій і робить вагомий внесок у розвиток інженерної механіки ієрархічних структур.

Методика 3D-друку зразків та їх випробувань

Суттєвий прогрес у дослідженнях мультифрактальних структур пов'язаний із розвитком адитивних технологій. Сучасні публікації показують, що 3D-друк є практично єдиним технологічним інструментом, який дозволяє фізично відтворювати складні ієрархічні геометрії без втрати топологічної цілісності. Роботи, присвячені 3D-друку фрактальних та перколяційно-фрактальних структур, підтверджують високу відтворюваність геометрії, а також можливість експериментальної валідації теоретичних моделей. Особливу увагу приділяють впливу параметрів друку на механічні властивості, однак у більшості сучасних досліджень наголошується, що саме геометрична організація структури відіграє домінуючу роль порівняно з матеріальними факторами. Виготовлення наведених на рис.2 експериментальних зразків мультифрактальних решіток здійснювали методом адитивного виробництва з використанням технології FDM-друку (рис.1). Алгоритмічно згенеровані структури (рис.2) експортували у формат PNG/SVG з подальшим перетворенням у STL-моделі, які готували до друку в середовищі слайсера з однаковими параметрами для всіх зразків. Усі зразки мали габаритні розміри $90 \times 90 \times 3$ мм. Друк зразків виконували з матеріалу PETG, який характеризується стабільними механічними властивостями та достатньою термостійкістю для отримання тонких перемичок без деформацій. Параметри 3D-друку фіксували та не змінювали між серіями зразків, щоб мінімізувати вплив технологічних факторів на масу та геометрію решіток.

Дослідження механічних характеристик проводилися на розривній машині АСМА-Прилад Р-5М2. Для забезпечення стійкості зразків під час випробувань на тиск їх встановлювали в спеціальну оправку.

Зразки досліджувались на тиск до максимальної деформації $\varepsilon_{max} \leq 10\%$ зі швидкістю деформації $d\varepsilon/dt = 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Реєстрація даних відбувалася в реальному часі

на інтегрований комп'ютер із спеціалізованим програмним забезпеченням. У ході експерименту фіксувалося зусилля $P(t;\varepsilon)$ та деформація зразка $\Delta l(t)$.

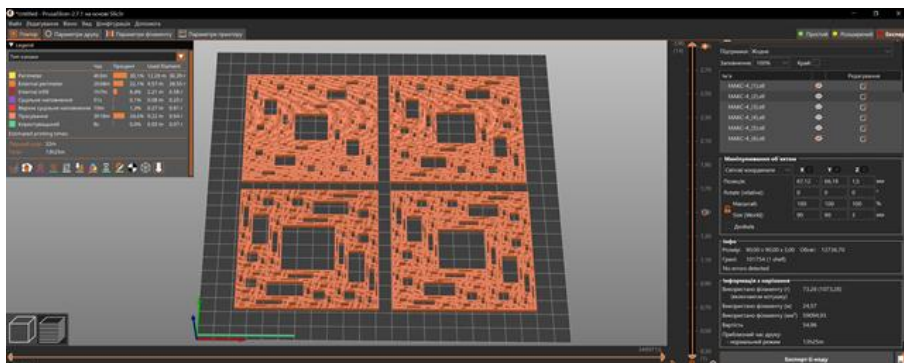


Рис.1.Фрагмент 3Д-друку анізотропних мультифракталів МАКС-4

Результати досліджень

В таблиці 1 наведено результати пружно-пластичного деформування 6-ти типів (рис.2) зразків мультифракталів:

Таблиця 1 . Результати експериментальних досліджень мультифракталів

	A	B	C	D	E	F
Параметр анізотропії ε	2,5	2,225	2	1,817	1,667	1,5
$P_{\max}$, Н	550	700	1500	2900	5100	5800
Δl , мм	4,5	2,0	2,7	3,5	5,0	4,5
Усереднена жорсткість зразків $\langle C \rangle$, Н/мм	122	350	555	827	1020	1289
Усереднена щільність ρ , Г/см ³	0,526	0,616	0,742	0,814	0,909	0,972
Границя міцності σ_B , Н/мм ²	2,1	2,6	5,6	10,7	18,9	21,5

При варіації щільності зразків від 0,526 да 0,972 Г/см³ границя міцності та усереднена жорсткість даних зразків змінюався в 10 разів, що дає великі перспективи управління службово-корисними властивостями мультифрактальних матеріалів.

Отримані результати дозволяють синтезувати мультифрактали з наперед заданими властивостями: набором фрактальних розмірностей, пористістю, питомою вагою, жорсткістю та міцністю - під конкретні задачі технологічної чи транспортної машини, що надзвичайно розширює можливості адаптивного конструювання деталей та елементів машин.

Синтезовані мультифрактальні структури МАКС-4 мають ту особливість, що їх багатовимірний простір параметрів вдалося звести до одновірної скалярної міри – параметра анізотропії ε

$$\varepsilon = X_2/X_1 \quad (1)$$

де X_2, X_1 - довжина і ширина підмножин першого покоління мультифрактала (рис.1, рис.2).

Раніше було показано [1], що геометричні параметри підмножин будь-якого K -го покоління мультифракталу описуються тензорами K -го рангу. Розглянемо детальніше процес утворення фракталів K -го покоління для $N=4$. Сили притягання розмістимо в вершинах квадрата $axax$. Для мультифракталів МАКС-4 (рис.2) розміри підмножин мультифракталів у відносних координатах виражаються лише через один параметр анізотропії ε . Тоді відносні розміри підмножин 1-го покоління є:

$$T_1^X = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \right) \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$T_1^Y = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \right) \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

2-го покоління:

$$T_2^X = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$T_2^Y = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \right)^2 \begin{bmatrix} \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \end{bmatrix}$$

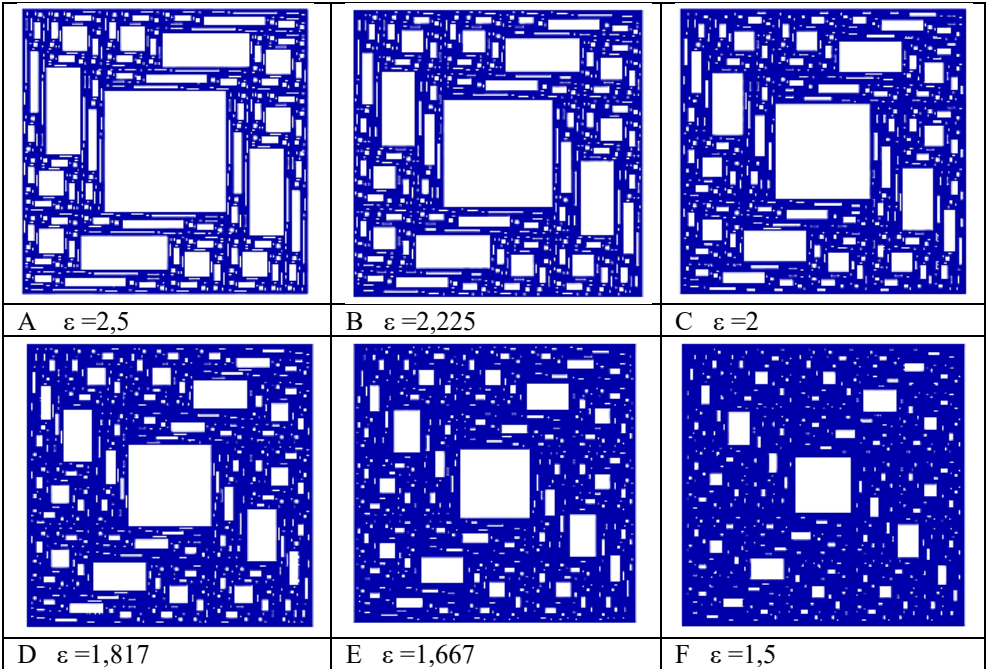
3-го покоління:

$$T_3^X = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \right)^3 \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

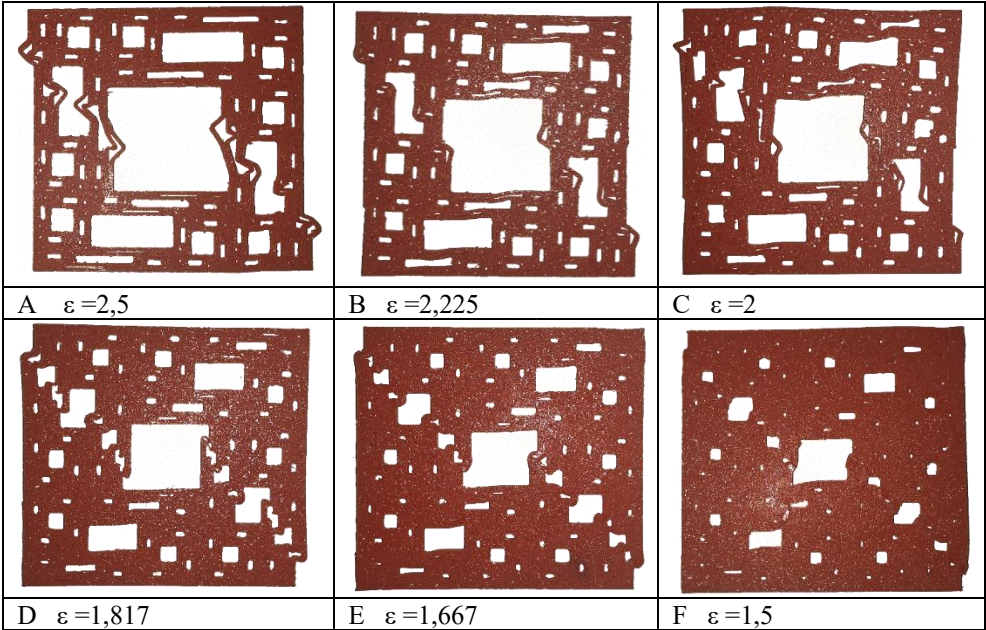
$$T_3^Y = \left(\frac{1}{1+\varepsilon} \right)^3 \begin{bmatrix} \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^3 & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

Аналогічно легко утворити тензори для 4-го, 5-го і наступних поколінь мультифракталів. Як слідує з даних тензорних перетворень, розміри всіх підмножин мультифракталів МАКС-4 дійсно задаються лише одним параметром анізотропії ε . При випробуваннях мультифрактали МАКС-4 стискувались вздовж осі ОУ. На рис.3 наведено залежність граничного навантаження $P_{\max}(\varepsilon)$. Із двох типів апроксимації вище значення коефіцієнта кореляції дає параболічне наближення. Це ж наближення дає найкраще значення $P_{\max(\varepsilon=1)} = 13776$ Н до експериментальних та розрахункових даних для $\varepsilon = 1$. При цьому значенні параметра анізотропії мультифрактал вироджується в континуум. Для матеріалу PETG $\sigma_B = 53$ Н/мм², що для суцільного

зразка поперечним перерізом 90х3 мм це дає значення $P_{\max(\varepsilon=1)} = 90 \times 3 \times 53 = 14310 \text{ Н}$, тобто похибка не перевищує 4,2%.



I



II

Рис.2. Шість типів (А, В, С, D, E, F) синтезованих мультифракталів анізотропних МАКС-4 з широким діапазоном параметра анізотропії ε : до (I) та після (II) руйнування

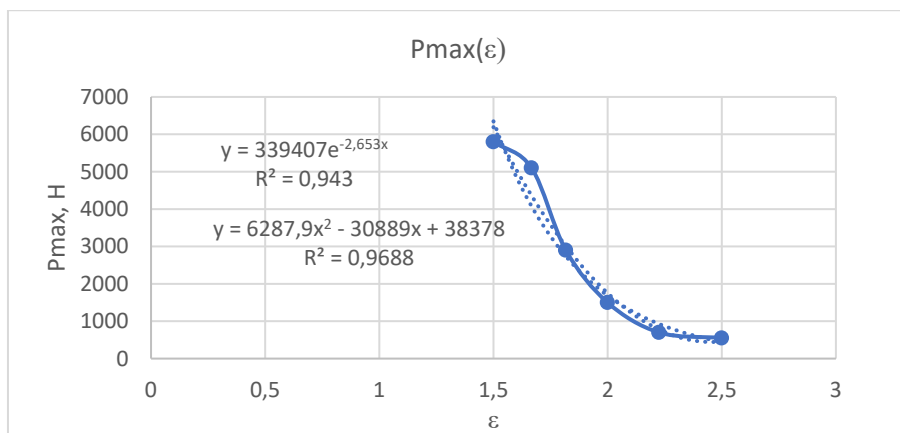


Рис.3. Залежність граничної несучої здатності мультифракталів МАКС-4 від параметра анізотропії ε

Висновки

1. Синтезовані, виготовлені та випробувані твердотільні зразки мультифракталів анізотропних кососиметричних МАКС-4, що задаються лише однією змінною величиною - параметром анізотропії ε . Показано, що змінюючи даний параметр в широкому діапазоні значень, є можливість змінювати характеристики міцності та жорсткості в межах 1-2 порядків, що відкриває широкі перспективи в виготовленні елементів конструкцій, максимально адаптованих під їх цільове призначення.

2. Запропоновано та апробовано інтегровану технологію синтезу, 3D-друку та випробувань на міцність і жорсткість мультифрактальних зразків в широкому діапазоні значень параметра анізотропії. Це дозволяє запропонувати виробництву матеріали з максимальною адаптацією під службові задачі. Отримані результати можуть бути корисними для проектування енергоефективних конструкцій в авіації, енергетиці, біомеханіці, спецтехніці тощо.

1. G. Grabar. Synthesis of multifractals, Zhytomyr/Scientific monograph. - Polissia National University, 2023, 200 pages. (in Ukrainian).
2. Grabar, I.G., Kubrak, Y.O. (2024). Synthesis of Multifractals by Brownian Dynamics of a Point in a Field of N Central Forces. In: Skiadas, C.H., Dimotikalis, Y. (eds) 16th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. CHAOS 2023. Springer Proceedings in Complexity. Springer, Cham., pp. 157–174. https://doi.org/10.1007/978-3-031-60907-7_13
3. Грабар І. Г., Грабар О. І. Фрактальні орнаменти. — Житомир: Поліський національний університет, 2021. — 298 с.
4. І. Г. Грабар, С. М. Кульман, О. В. Ксюковський, Д. А. Дубовик. Конструювання, 3D-друк та експериментальне дослідження перколяційно-фрактальних композитних конструкційних елементів. // Podilian Bulletin: Agriculture, Engineering, Economics, May 2025. DOI: 10.37406/2706-9052-2025-2.27.
5. К. П. Буйських, "Методологічні засади дослідження роботоздатності елементів конструкцій аерокосмічної техніки з композиційних матеріалів за високих температур. Повідомлення 2. Дослідження теплового захисту", Проблеми міцності, № 1, 65-73, (2025)
6. .Ю. К. Ге, Ю. Йін, Ж. К. Чанг, Х. Ж. Ксю, В. Х. Бі, "Мікроструктура та механічні властивості об'ємних металевих склокомпозитів, армованих Nb шляхом лазерного плавлення порошку", Проблеми міцності, № 1, 132-132, (2025)

7. О. В. Саввова, О. В. Бабіч, Н. В. Сметанкіна, Ю. О. Смирнова, М. І. Тимошук, "Дослідження високоміцних наноструктурних склокристалічних матеріалів для спеціальної техніки й обладнання", Проблеми міцності, № 5, 131-141, (2025)
8. Halsey T. C., Jensen M. H., Kadanoff L. P., Procaccia I., Shraiman B. I. Fractal Measures and Their Singularities: The Characterization of Strange Sets. // Phys. Rev. A, 1986. Vol. 33. P. 1141–1151. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.33.1141>
9. Balankin A. S. Physics of Fracture and Mechanics of Self-Affine Cracks. // Engineering Fracture Mechanics, 1997. Vol. 57(2–3). P. 135–203. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(97\)00007-6](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(97)00007-6)
10. Mesón A. M., Vericat F. On Multifractal Rigidity. // Math. Phys. Anal. Geom., 2011. Vol. 14. P. 295–320. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11040-011-9098-y>
11. Carpinteri A., Chiaia B. Multifractal Scaling Law for the Fracture Energy Variation of Concrete Structures. // Fracture Mechanics of Concrete Structures. Freiburg: AEDIFICATIO Publishers, 1995. P. 581–596.
12. Mandelbrot B. The Fractal Geometry of Nature. — San Francisco: W. H. Freeman and Co., 1982. — 468 p. <https://archive.org/details/fractalgeometryo00beno>
13. Harte D. Multifractals: Theory and Applications. — Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2001. — 264 p. <https://www.routledge.com/Multifractals-Theory-and-Applications-1st-Edition/Harte/p/book/9781584881544>

Моделювання методом скінченних елементів процесу втрати стійкості термопружних неоднорідних оболонок

О. П. Кривенко^{а1}, П. П. Лізунов^а, О. Б. Калашніков^б

^аКиївський національний університет будівництва і архітектури, Київ, Україна

^бДержавний науково-технічний центр ядерної та радіаційної безпеки, Київ, Україна

¹olakov@ukr.net

Розглядається метод аналізу нелінійного деформування, втрати стійкості, закритичної поведінки та власних коливань пружних оболонок під дією статичних термомеханічних навантажень. Вивчення поведінки тонких гнучких неоднорідних оболонок базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності, принципах моментної схеми скінченних елементів та використанні універсального тривимірного скінченного елемента з додатковими змінними параметрами, що модифікується. Комплексне дослідження стійкості та власних коливань оболонок виконується за кроковим алгоритмом і охоплює як докритичний, так і закритичний стани деформування оболонок змінної товщини. Можливості методу демонструються на серії спеціально підібраних контрольних задач.

Ключові слова: геометрично нелінійне деформування, стійкість, універсальний тривимірний скінченний елемент, термомеханічне навантаження, моментна схема скінченних елементів

Вступ.

Робота присвячена комплексному методу дослідження геометрично нелінійного деформування, стійкості та власних коливань тонких неоднорідних оболонок під дією статичних термомеханічних навантажень [1 – 6]. Дослідження стійкості тонких оболонок є однією з головних задач механіки деформівного твердого тіла, оскільки процес втрати стійкості часто визначає граничну несучу здатність конструкцій. Аналіз поведінки оболонок, передусім з геометричними неоднорідностями та термомеханічними впливами, потребує залучення універсальних розрахункових моделей та уточнених методів розрахунку.

Мета повідомлення фокусується на особливостях універсального (звичайно в певних межах) методу скінченноелементного моделювання оболонок неоднорідної структури та аналізу їх деформування та втрати стійкості при термомеханічних навантаженнях. Роботи [1 – 6], в яких приведено метод і чималу кількість результатів з дослідження поведінки оболонкових конструкцій при дії термомеханічних навантажень, відображають багаторічні наукові здобутки кафедри та НДІ будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури. Подано основні положення методу та приклади його застосування.

1 Постановка задачі та метод дослідження

Оболонки, що розглядаються, можуть поєднувати у собі різні конструктивні неоднорідності (ребра, накладки, отвори, канали, змінну товщину, злами серединної поверхні, багатошарову структуру матеріалу). Вони також можуть мати неоднорідні умови закріплення ділянок контуру та перебувати під дією статичного неоднорідного

термомеханічного навантаження. Наявність різних типів неоднорідностей впливає на жорсткість, несучу спроможність, стійкість та власні коливання конструкції.

Тонка оболонка складної форми розглядається як тривимірний об'єкт. Для її моделювання використовується універсальний тривимірний скінченний елемент (СЕ) [1 – 6], побудований на основі ізопараметричного восьмивузлового елемента з полілінійними функціями форми. Введення додаткових змінних параметрів перетворило СЕ на універсальний, що модифікується. У разі потреби, він може змінювати свої розміри за товщиною й ексцентрично зміщуватися щодо серединної поверхні обшивки (під обшивкою розуміється тіло оболонки без особливостей), що забезпечує моделювання ступінчасто-змінної товщини та інших геометричних особливостей оболонки. Це дає змогу за використання одного універсального тривимірного СЕ, що модифікується, формувати єдину скінченноелементну модель оболонки (СЕМО), яка враховує різні конструктивні елементи.

Напружено-деформований стан (НДС) тонкої оболонки описується з використанням двох неklasичних гіпотез: сталості нормальних напружень за товщиною та гіпотези деформівної прямої (не обов'язково нормалі до серединної поверхні), яка зберігає прямолінійність після деформування. Це забезпечує сумісність тривимірних елементів у зонах зламів і змінної товщини.

Метод ґрунтується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності [7]. Матеріали шарів оболонки розглядаються як лінійно-пружні, властивості яких відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана. Шари оболонки жорстко поєднані між собою в монолітний пакет і деформуються спільно без проковзування. В алгоритмі враховуються ізотропні, трансверсально-ізотропні, ортотропні та композитні односпрямовані волокнисті матеріали [1, 4].

Температурне поле вважається відомою та незалежною від НДС оболонки функцією координат, а його розподіл за товщиною – лінійним. Механічні Q та теплові T навантаження описуються як єдиний процес $P = P(Q, T)$, який в алгоритмі задається через функцію, яка може змінюватися в процесі навантаження. Такий підхід дозволяє моделювати складні режими навантаження.

Деформування оболонки описується у загальній лагранжевій постановці як послідовність рівноважних станів при достатньо малих кроках навантаження. Розв'язувальні рівняння отримані за моментною схемою скінченних елементів (МССЕ) [8], узагальненої на термопружні задачі багатошарових оболонок змінної товщини [1]. Аналіз стійкості та власних коливань реалізується за двоетапним алгоритмом. На першому етапі інкрементальним методом розв'язується задача геометрично нелінійного деформування з побудовою залежностей навантаження–прогин ($P-U$). Алгоритм розв'язування задачі поєднує кроковий метод продовження розв'язку за параметром, ітераційну процедуру Ньютон–Канторовича та адаптивне корегування параметрів [1]. Параметром продовження може бути навантаження P або визначальне переміщення U деякого вузла СЕМО з найбільшим модулем приросту. У загальному випадку крива $P-U$ має низку особливих точок, включаючи точки розгалуження. Для обходу особливих точок параметри P і U взаємно замінюються. На другому етапі виконується модальний аналіз із урахуванням переднапруженого стану [2 – 6], що дозволяє визначати криву навантаження–нижча частота ($P-\omega_1$) та

спектр власних коливань і встановлювати момент втрати стійкості як за статичним, так і за динамічним критеріями ($\omega_1 = 0$).

Виявлення точок розгалуження здійснюється за трьома підходами [4 – 5]: (1) аналізом власних значень лінеаризованої матриці жорсткості, (2) введенням малих геометричних збурень серединної поверхні та (3) модальним аналізом.

Достовірність і ефективність методу підтверджено дослідженнями збіжності й точності, а також порівнянням із результатами інших авторів і розрахунками із залученням сертифікованих програмних комплексів ЛІРА-САПР і SCAD.

2 Чисельні розрахунки та аналіз результатів

2.1 Вивчається вплив кривизни $K = 2a^2/(Rh)$ на стійкість і закритичну поведінку гладкої квадратної в плані шарнірно опертої панелі сталої товщини.

В першому дослідженні розглядається *дія нерівномірного за товщиною нагріву* [1], при якому зовнішня поверхня оболонки охолоджується, а внутрішня нагрівається на $T^\circ\text{C}$ (рис. 3). Серединна поверхня оболонки при цьому залишається ненагрітою.

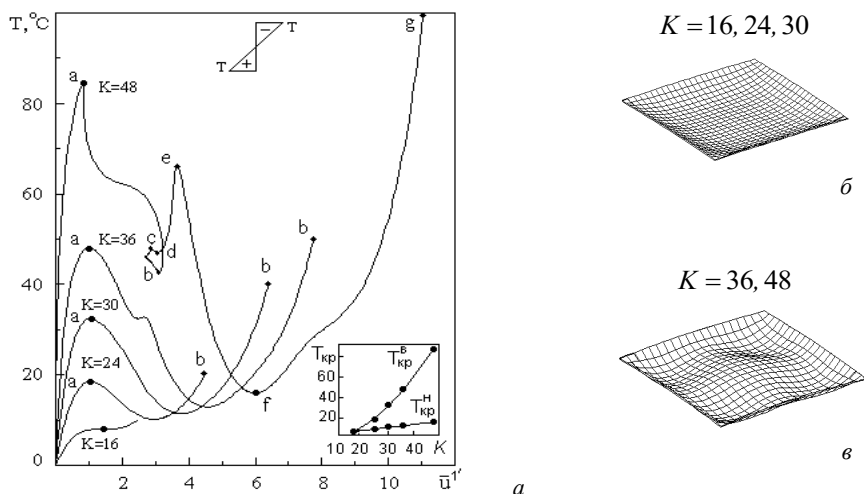


Рис. 3. Нерівномірний за товщиною нагрів сферичних панелей різної кривизни

Зростання параметра кривизни в межах 16 – 48 майже не збільшує об'єм (тіло) оболонки (0,11%). При цьому його значення справляє значний вплив на величину верхньої $T_{кр}^в$ та нижньої $T_{кр}^н$ критичних температур, які зросли у 10 та 2 рази, відповідно, та на еволюцію графіків $T - \bar{u}'$ (рис. 3, а), де $\bar{u}' = u'/h$ – переміщення вздовж декартової осі x' . Втрата стійкості пологих панелей ($K < 36$) характеризується загальною втратою стійкості з проклацуванням центральної частини (рис. 3, б). Для оболонок з кривизною $K \geq 36$ місцева втрата стійкості починається у точці а. Відбувається значне деформування середин чвертей панелі (рис. 3, в). Після низки перебудов форм у закритичній області деформування втрата стійкості відбувається як і для пологих панелей через проклацування центру.

Розглядається дія механічного навантаження (рівномірно розподілений тиск інтенсивністю q) на панелі з параметрами кривизни $K = 32$ ($a = 60h$, $R = 225h$), $K = 48$ ($a = 60h$, $R = 150h$), $K = 64$ ($a = 120h$, $R = 450h$) [1, 2, 3, 5]. Результати досліджень подані через безрозмірний параметр для навантаження $\bar{q} = a^4 q / (Eh^4)$.

Графік $\bar{q} - \bar{u}$ для пологої панелі $K = 32$ на всіх етапах навантаження має простий вигляд (крива $oabc$, $\eta = 0$, рис. 4). У зоні верхнього критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^6 = 193.7$ за підходом 1 (за якісною теорією) при $\bar{q}^{*(1)} = 191,6$ виявлено можливу точку розгалуження. Внесення до серединної поверхні ідеальної оболонки несиметричного збурення відповідно до підходу 2 ($\eta = 0.01$) дозволило уточнити величину $\bar{q}^{*(2)} = 182,1$ і вийти в цій точці на нову гілку розв'язку $oa'bc$ (пунктирна лінія $a'b$). В околі цієї точки осесиметрична форма деформування оболонки переходить у суміжну неосесиметричну. Модальний аналіз панелі (підхід 3, рис. 5) показав, що починаючи з навантаження $\bar{q} = 142$, графіки $\bar{q} - \omega_1$, які відповідають оболонкам ідеальної форми ($\eta = 0$) та зі збуренням ($\eta = 0.01$, пунктирна крива), починають розходитись. Кружечками відмічені навантаження, при яких виконувався модальний аналіз. Для панелей ідеальної ($\eta = 0$) і неідеальної форми ($\eta = 0.01$) отримано $\bar{q}^{*(3)} = 191.8$ і $\bar{q}^{*(3)} = 183.0$, відповідно.

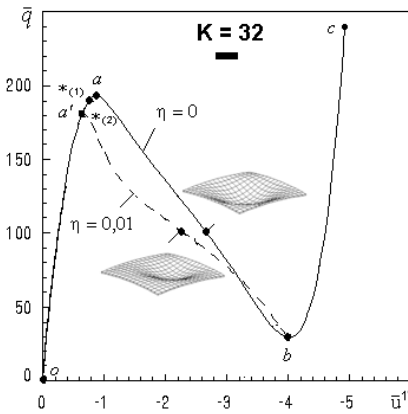


Рис. 4

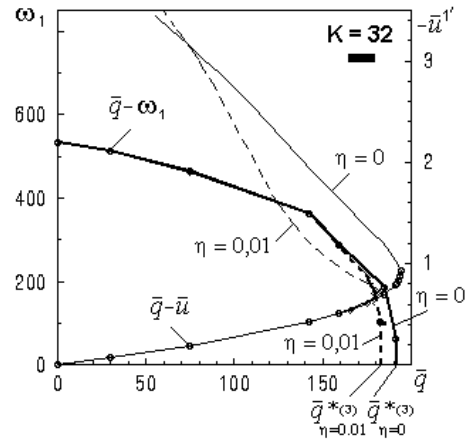


Рис. 5

Деформування оболонок з параметрами кривизни $K = 48$ (рис. 6) та $K = 64$ (рис. 7) відбувається за однаковим сценарієм. Він характеризується складним виглядом кривих $\bar{q} - \bar{u}$ з перебудовою закритичних форм, що типово для непологих панелей. Втрата стійкості в обох випадках реалізується за кілька етапів. Спершу в точці «1» реалізується місцева втрата стійкості оболонок при $\bar{q} = 485.7$ і $\bar{q} = 777.7$, відповідно. Прогини у середині чвертей панелей різко зростають. Разом з тим у центрі оболонки практично не деформуються. Потім, після низки перебудов форм деформування настає загальна втрата стійкості панелі з проклацуванням центра.

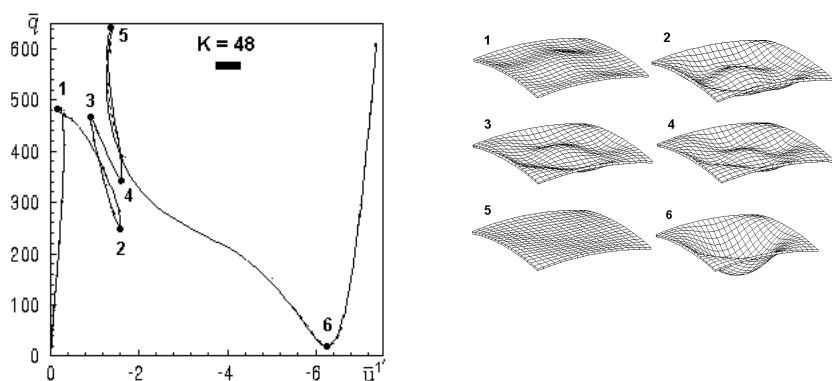
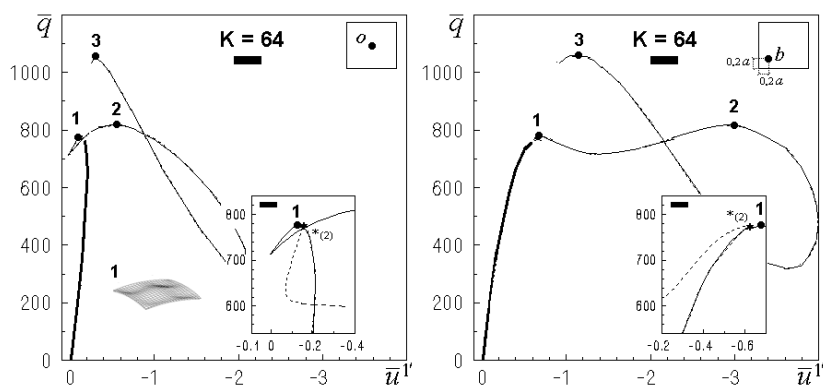


Рис. 6

Рис. 7. Криві $\bar{q}-\bar{u}$ в характерних точках o і b

Внесення до ідеальної серединної поверхні оболонки ($K = 64$) несиметричного збурення форми відповідно до підходу 2 ($\eta = 0.01$) дозволило на підході до точки «1» при $\bar{q}^{*(2)} = 175.6$ вийти на нову гілку розв'язку, пунктирна лінія на рис. 7.

2.2 Дослідження впливу розмірів ребер виконано на прикладі панелей, що підкріплені з боку угнутості перехресними ребрами однакових розмірів: висотою h_p (без товщини обшивки панелі h) і шириною b_p . На рисунках для зіставлення дані для гладкої оболонки наведено штрих-пунктирною лінією з позначкою $h_p = 0$.

Досліджується вплив на стійкість пологих панелей з кривизною $K = 32$ висоти ребра при сталій площі перерізу $S_p = h_p \times b_p = 6h^2$ (рис. 8). Збільшення висоти h_p приводить до підвищення загальної жорсткості панелі та зменшення прогинів. При слабких ребрах ($h_p < 3h$) відбувається загальна втрата стійкості через проклацування центральної частини оболонки. Встановлення більш жорстких ребер ($h_p \geq 3h$) приводить до зникнення явища втрати стійкості.

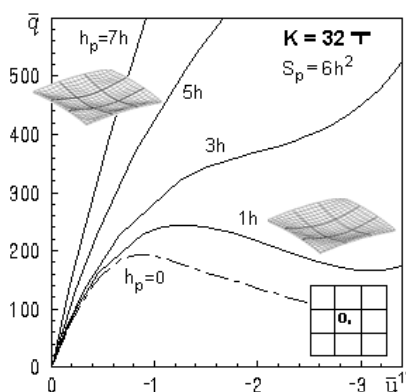


Рис. 8

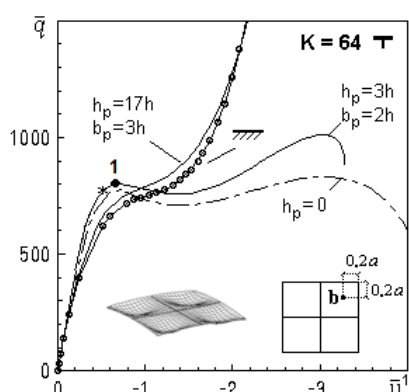


Рис. 9

Розглядається вплив на поведінку непологої панелі ($K = 64$) жорсткості двох центральних ребер, які працюють як пружні опори (рис. 9). Для гладких панелей ($K \geq 48$) докритичне деформування відбувається з утворенням двох перехресних гребенів жорсткості, які при деформуванні оболонки мають ефект підкріплюючої дії на зразок ребер. Постановка на цих місцях двох перехресних ребер ($h_p = 3h$, $b_p = 2h$) практично не впливає на деформування панелі та підвищує величину $\bar{q}_{кр}^6$ всього на 3.3% [6]. Як і для гладкої панелі в околі точки «1» виявлено наявність точки розгалуження. Подальше збільшення параметрів ребер майже не впливає на рівень $\bar{q}_{кр}^6$ при поступовому зменшенні величини прогину панелі в точках b . При жорстких ребрах ($h_p = 17h$, $b_p = 3h$) деформування оболонки фактично збігається з поведінкою гладкої панелі, що має защемлення вздовж двох середніх ліній [1].

2.3 Вплив складного термомеханічного навантаження на поведінку оболонки ступінчасто-змінної товщини досліджується на прикладі панелі з каналами ($K = 32$). Обшивка оболонки, завтовшки h , послаблюється з внутрішньої сторони чотирма перехресними каналами: завширшки $b_k = 2h$ та завглибшки $h_k = 0.3h$ [6].

Комбінований режим дії термомеханічного навантаження на оболонку складається з двох етапів. Спочатку панель нагрівається на $T = 40^\circ\text{C}$ рівномірно за товщиною і нерівномірно за планом (обшивка оболонки на T^o , а ділянки з каналами на T^k градусів, відповідно). Потім оболонка дозавантажується рівномірно розподіленим тиском. Розглядаються чотири варіанти нагріву: без нагріву, лише ділянки з каналами, тільки обшивка, уся оболонка (рис. 10). Перший варіант навантаження (дія лише тиску, позначення 1. q) використовується як порівняльна база для аналізу впливів, що вивчаються.

Найбільший вплив на величину $\bar{q}_{кр}^6$ справляє нагрів всієї оболонки (4. $T_{40}^k + T_{40}^o$, q ; рис. 10). Причина збільшення $\bar{q}_{кр}^6$ для всіх варіантів нагріву (на 6, 12, 18 % проти 1. q) пов'язана з напрямком дії температурного поля, яке викликає випинання оболонки в бік протилежний дії тиску, збільшуючи її жорсткість.

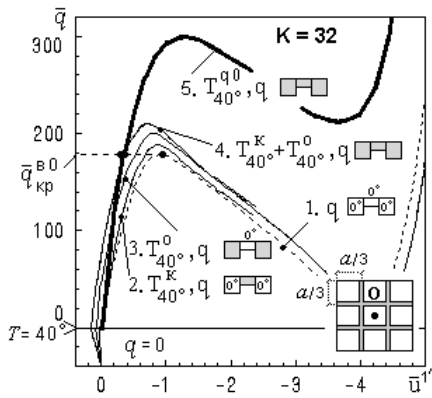


Рис. 10

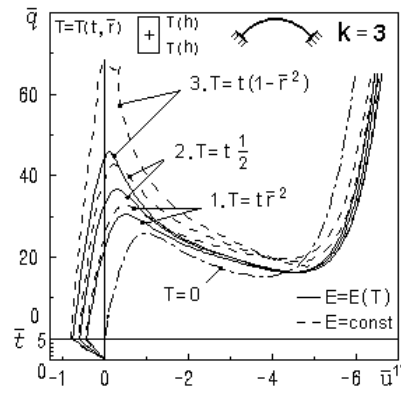


Рис. 11

Розроблений підхід до задавання навантаження як функції дозволив оцінити вплив на стійкість панелі черговості навантаження: попередній нагрів (4. $T_{40}^K + T_{40}^O, q$) і одночасна дія температури і тиску (5. $q + T_{40}^O, q$). Режим спільної дії термомеханічного навантаження складається з двох етапів. Спочатку одночасна їх дія до досягнення заданого тиску $\bar{q} = \bar{q}^0$ при нагріві на $T = 40^\circ\text{C}$. Далі навантаження лише тиском при сталому температурному полі. Величина $\bar{q}^0$ відповідає верхньому критичному навантаженню при дії тиску $\bar{q}_{кр}^{e0} = 178.79$ (1. q). Одночасна дія навантажень підвищує $\bar{q}_{кр}^{e5}$ на 43 % проти $\bar{q}_{кр}^{e4}$ послідовної схеми, при цьому значно (майже у 12 разів) зростає величина $\bar{q}_{кр}^{e5}$.

2.4 У попередніх дослідженнях термпружні характеристики матеріалу оболонок вважалися незалежними від температури. Водночас для реальних матеріалів, зокрема металів, це припущення справедливе лише в обмеженому температурному діапазоні. Запропонований алгоритм дозволяє враховувати залежність фізико-механічних характеристик від температури.

Досліджується вплив температурної залежності модуля пружності E на стійкість оболонки [1, 8]. Полога осесиметрична сферична панель жорстко затиснута за контуром. Вона знаходиться в нерівномірному за меридіаном температурному полі та навантажується зовнішнім тиском (рис. 11).

Зміна температури вздовж радіуса панелі приводить до відповідної зміни модуля пружності, що викликає відмінності у кривих $\bar{q} - \bar{u}$ для варіантів $E = \text{const}$ та $E = E(T)$ та зменшення критичного навантаження $\bar{q}_{кр}^e$ на 6.3, 14.1 і 32.4%. Для третього закону нагріву найбільше зниження $E = E(T)$ (до 25%) відбувається у найбільш деформованій частині оболонки, її полюсі. У цьому випадку втрата стійкості панелі відбувається через проклацування центральної частини, тоді як без урахування температурної залежності ($E = \text{const}$) вона реалізується у вигляді кільцевої вм'ятини в центрі меридіану.

Висновки

Для побудови моделей оболонок зі змінною товщиною та складною структурою розроблено універсальний тривимірний скінченний елемент, що модифікується. Такий підхід дозволяє за використання одного універсального СЕ та в межах єдиної методології формувати скінченноелементну модель оболонки, яка враховує різні конструктивні елементи. Термомеханічне навантаження в алгоритмі задається як функція, що може змінюватися в процесі навантаження. Це забезпечує моделювання складних режимів термомеханічного навантаження, близьких до реальних. Метод комплексного аналізу дає змогу досліджувати нелінійне деформування термопружних неоднорідних оболонок, виявляти точки розгалуження на кривих навантаження–прогин та оцінювати вплив конструктивних і навантажувальних факторів на стійкість та модальні характеристики.

На тестових задачах показано високу ефективність запропонованого підходу для аналізу поведінки неоднорідних оболонок у докритичній і закритичній областях. Отримані результати підтверджують адекватність моделі та її придатність для прогнозування роботи оболонкових конструкцій при складних термомеханічних навантаженнях.

1. В. А. Баженов, О. П. Кривенко, М. О. Соловей, *Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури*, Київ: ЗАТ Віпол (2010).
2. Victor Bazhenov, Olga Krivenko, *Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells*, LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrücken, Deutschland (2018).
3. В. А. Баженов, О. П. Кривенко, *Стійкість і коливання пружних неоднорідних оболонок при термосилових навантаженнях*, Київ: Каравела (2020).
4. О. П. Кривенко, П. П. Лізунов, О. Б. Калашніков, *Моментна схема скінченних елементів у задачах термостійкості і власних коливань пружних неоднорідних оболонок*, Київ: Каравела (2024).
5. O. P. Kryvenko, P. P. Lizunov, Y. V. Vorona & O. B. Kalashnikov, Modeling of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibration Processes of Elastic Shells in Inhomogeneous Structure. *Int Appl Mech*, 60 (3), 464 - 478. (2024). <https://doi.org/10.1007/s10778-024-01298-2>.
6. O. P. Krivenko, P. P. Lizunov, O. B. Kalashnikov, Buckling analysis of elastic thin shells with stepwise variable thickness under static thermomechanical effects, *Strength of Materials and Theory of Structures*, 115, 94-106. (2025). <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2025.115.94-106>.
7. В. И. Блох. *Теория упругости*, Харьков: ХГУ (1964).
8. А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокій, В. В. Киричевский и др., *Метод конечных элементов в механике твердых тел.*, Киев: Вища шк. Голов. изд-во, (1982).
9. Б. Я. Кантор, *Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек*, Киев: Наукова думка (1974).

Особливості математичного моделювання запуску рідинного ракетного двигуна, що включає гідравлічні системи змінної структури

О. С. Чернявський^{а1}, С. І. Долгополов^б, С. А. Шевченко^в

^аДніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

^бІнститут технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, Дніпро, Україна

^вІнститут транспортних систем і технологій Національної академії наук України, Дніпро, Україна

¹ o.s.cherniavskiy@gmail.com

На основі математичного моделювання продемонстровано задовільну роботу системи живлення окислювачем та паливом тестового двигуна при його запуску. Розроблена модель враховує кавітаційні явища в насосах, запізнення газоутворення компонентів палива та перебування продуктів згоряння у газогенераторі, а також хвильові процеси у розгалужених гідравлічних трактах змінної структури. Показано, що запуск двигуна здійснюється без закидів, пульсацій та суттєвих провалів основних параметрів за відносно короткий час. Проведено моделювання динамічних процесів у системі газодинамічного запалювання компонентів у газогенераторі та камері згоряння. Отримано стійкі режими подачі компонентів палива при перемиканні живлення від пускового бачка на живлення від насоса відповідно до обраної циклограми запуску. Запропоновано конструктивні та схемні рішення для оптимізації роботи зворотних клапанів у гідравлічній системі живлення паливом змінної структури.

Ключові слова: рідинний ракетний двигун, система живлення змінної структури, математичне моделювання, імпедансний метод, частотна характеристика

Вступ Запуск рідинних ракетних двигунів (РРД) супроводжується рядом різноманітних складних фізичних процесів та явищ. До них належать заповнення гідравлічних трактів кріогенними компонентами палива, накопичення та займання компонентів палива в газогенераторі та камері згоряння, процеси динамічної розкрутки турбонасосного агрегату, хвильові процеси у протяжних розгалужених гідравлічних трактах РРД, кавітаційні явища в насосах та явища запізнення газоутворення компонентів палива і перебування продуктів згоряння у камері згоряння та газогенераторі [1]. Раніше було сформульовано задачу опису динамічних процесів у гідравлічній системі змінної структури та запропоновано підхід до її розв'язання на основі імпедансного методу [2]. Цей підхід було розглянуто для тестового фрагмента повної гідравлічної системи живлення РРД. Метою даної роботи є дослідження динамічних процесів при запуску РРД у гідравлічній системі змінної структури, що входить до складу повної системи живлення двигуна.

1. Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є тестовий РРД багаторазового включення з допалюванням генераторного газу. Схема системи живлення цього двигуна наведена на рис. 1. Для багаторазового запалювання компонентів палива в газогенераторі та камері згоряння застосовано спеціальну гідравлічну систему живлення змінної структури з газодинамічними запалювачами (ГДЗ) [3], принцип роботи яких заснований на ефекті Гартмана-Шпренгера – нагріванні газу всередині тупикової порожнини понад температури гальмування потоку, що набігає.

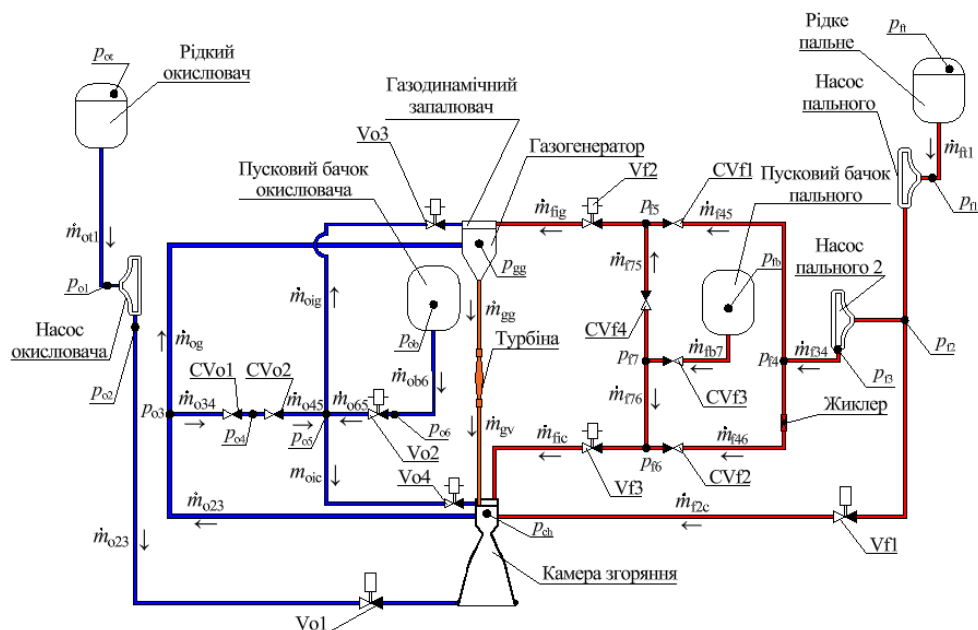


Рис. 1. Розрахункова схема системи живлення тестового РРД: $\dot{m}_{ot1}$, $\dot{m}_{ft1}$ – загальні масові витрати окислювача і пального; $\dot{m}_{oig}$, $\dot{m}_{fig}$ – масові витрати окислювача і пального на газогенератор; $\dot{m}_{oic}$, $\dot{m}_{fic}$ – масові витрати окислювача і пального на запалювання камери згоряння; $\dot{m}_{o34}$, $\dot{m}_{o45}$, $\dot{m}_{o23}$, $\dot{m}_{ob6}$, $\dot{m}_{o65}$ – масові витрати окислювача на відповідних ділянках; $\dot{m}_{f34}$, $\dot{m}_{f45}$, $\dot{m}_{f46}$, $\dot{m}_{fb7}$, $\dot{m}_{f75}$, $\dot{m}_{f76}$, $\dot{m}_{f2c}$ – масові витрати пального на відповідних ділянках; $\dot{m}_{gg}$, $\dot{m}_{gv}$ – масова витрата генераторного газу; p_{oj} – тиск окислювача у j-му вузлі розгалуження; p_{fi} – тиск пального у i-му вузлі розгалуження; p_{gg} – тиск у газогенераторі; p_{ch} – тиск у камері згоряння; p_{fb} – тиск у пусковому бачку пального; p_{ob} – тиск у балоні газоподібного кисню; p_{ot} , p_{ft} – тиск у газових подушках наддуву баків окислювача і пального; V_{oj} – j-й електроклапан окислювача; V_{fi} – i-й електроклапан пального; CV_{oj} – j-й зворотний клапан окислювача; CV_{fi} – i-й зворотний клапан пального

До складу двигуна входять камера згоряння, газогенератор та турбонасосний агрегат (ТНА), що складається з насоса окислювача, насосів пального першого та другого ступенів і газової турбіни. Агрегати з'єднані системою магістралей з електромагнітними та зворотними клапанами. На рисунку наведено лише ті агрегати автоматики, що безпосередньо задіяні в моделюванні запуску двигуна. Пусковий бачок із паливом спорожнюється під дією високого тиску газу за командою системи керування.

Система живлення працює наступним чином. Для розігріву ГДЗ з балона подається газоподібний кисень, після чого послідовно відкриваються клапани подачі пального на газогенератор і камеру згоряння. Оскільки на початку запуску вал ТНА ще не розкручений і тиск на виході з насоса низький, паливе до газогенератора та камери згоряння надходить із пускового бачка. Після займання компонентів палива в ГДЗ газогенератора та подачі рідкого окисника вал ТНА розкручується до розрахункових швидкостей обертання. Поступово насос пального створює високий тиск, і живлення системи за допомогою зворотних клапанів перемикається з пускового бачка на основну магістраль насоса.

Для надійного запуску двигуна необхідно забезпечити стабільну роботу ГДЗ газогенератора. Для цього потрібно, насамперед, виключити пульсації витрати пального при перемиканні живлення, оскільки вони можуть призвести до неприпустимих коливань співвідношення компонентів палива в ГДЗ, що негативно впливає на стабільність запалювання.

2. Математична модель. До складу математичної моделі запуску РРД входять рівняння динаміки кавітаційних каверн. Урахування кавітації в насосах проводилось за гідродинамічною моделлю [4] з використанням напівемпіричних коефіцієнтів з роботи [5]. При описі робочих процесів у газогенераторі та камері згоряння тільки в газогенераторі враховувалися запізнення газоутворення компонентів палива та перебування продуктів згоряння у вогневих порожнинах. Робочі процеси в газоводі описувалися з урахуванням часу перебування газу в його об'ємі. Для досягнення необхідної точності опису цих запізнювань використовувалися апроксимації ланки запізнення звичайними диференціальними рівняннями. При описі роботи турбонасосного агрегату враховувався баланс наявних і споживаних потужностей при запуску. Передбачалося, що при запуску регулюючі органи лінії пального на газогенератор і камеру згоряння не задіяні.

Опис динаміки гідравлічної системи змінної структури лінії пального здійснювався у два етапи, як у роботі [2]. На першому етапі визначаються частотні характеристики досліджуваної гідравлічної системи як системи з розподіленими параметрами. Далі складається математична модель із зосередженими параметрами, коефіцієнти якої задаються таким чином, щоб частотні характеристики систем з розподіленими та зосередженими параметрами узгоджувалися із заданою точністю у певному частотному діапазоні. Отримана модель із зосередженими параметрами вже безпосередньо використовується для визначення перехідних процесів у гідравлічній системі.

3. Результати моделювання.

На основі математичного моделювання продемонстровано задовільну роботу системи живлення окислювачем та паливом тестового двигуна при його запуску. Показано, що запуск здійснюється без закидів, пульсацій та суттєвих провалів основних параметрів за відносно короткий час (див. рис. 2).

Також проведено математичне моделювання динамічних процесів у системі газодинамічного займання компонентів у газогенераторі та камері згоряння. Показано стабільну подачу компонентів палива в газогенератор і камеру згоряння при перемиканні живлення від пускового бачка на живлення від насоса для обраної циклограми запуску (див. рис. 3).

Аналіз результатів математичного моделювання динамічних процесів при запуску РРД у гідравлічних системах змінної структури, які входять до складу повної (рис. 3) та урізаної [2] систем живлення двигуна, показує їх принципове та кількісне узгодження. Відмінність у результатах визначається насамперед різницею в граничних умовах. Це показує ефективність запропонованого в [2] підходу математичного моделювання динамічних процесів у фрагменті повної гідравлічної системи змінної структури, що дозволяє скоротити час розробки двигуна та провести оптимізацію його гідравлічної системи та деяких його агрегатів.

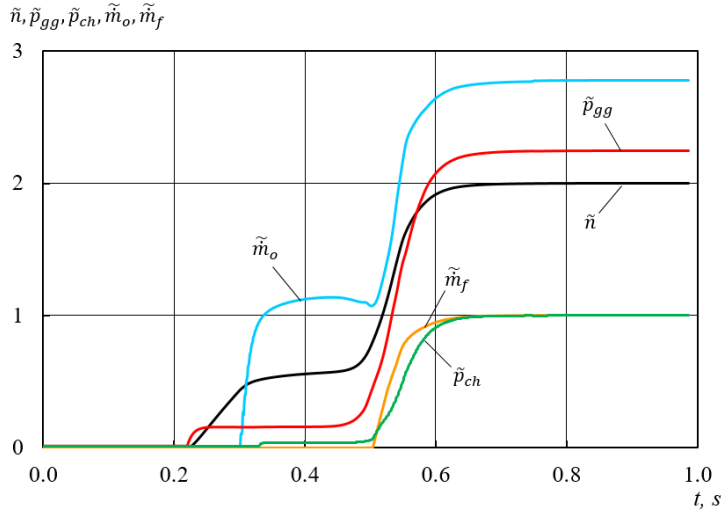


Рис. 2. Залежності від часу основних параметрів РРД при його запуску: $\tilde{n} = \frac{n}{\bar{n}} 2$, $\tilde{p}_{gg} = \frac{p_{gg}}{\bar{p}_{ch}}$, $\tilde{p}_{ch} = \frac{p_{ch}}{\bar{p}_{ch}}$, $\tilde{m}_o = \frac{m_o}{\bar{m}_f}$, $\tilde{m}_f = \frac{m_f}{\bar{m}_f}$ – відносні значення параметрів; $\bar{n}$, $\bar{p}_{ch}$, $\bar{m}_f$ – значення параметрів на усталеному режимі.

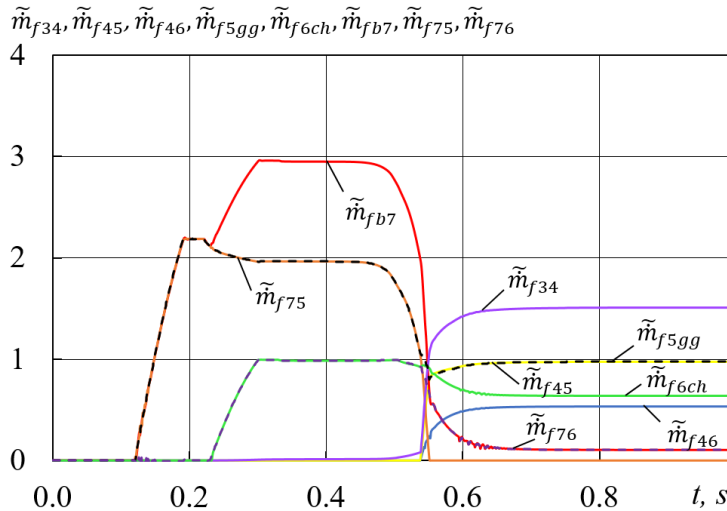


Рис. 3. Залежності від часу витрат пального у гідравлічній системі змінної структури при запуску РРД: $\tilde{m}_{fi} = \frac{m_{fi}}{\bar{m}_{f5gg}}$ – відносні витрати пального.

Висновки. На основі математичного моделювання продемонстровано задовільну роботу системи живлення окислювачем та палим тестового двигуна при його запуску. Показано, що запуск здійснюється без закидів, пульсацій та суттєвих провалів основних параметрів за відносно короткий час. Також проведено математичне моделювання динамічних процесів у системі газодинамічного запалювання компонентів у газогенераторі та камері згоряння. Показано стабільну подачу компонентів палива в газогенератор і камеру згоряння при перемиканні живлення від

пускового бачка на живлення від насоса для обраної циклограми запуску. Запропоновано конструктивні та схемні рішення для оптимізації роботи зворотних клапанів у гідравлічній системі живлення змінної структури.

1. Шевяков А. А., Калнин В. М., Науменкова М. В., Дятлов В. Г. Теория автоматического управления ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1978. 288 с.
2. Dolgoplov S., Cherniavskiy O., Shevchenko S. Mathematical modeling of dynamic processes in the branched reconfigurable fuel feed system of a liquid-propellant rocket engine. CEAS Space Journal. 2025. p. 14. <https://doi.org/10.1007/s12567-025-00691-y>
3. Marchan R. A. Small-scale supersonic combustion chamber With a gas-dynamic ignition system Combust. Sci. and Tech. 2011. 183(11), P. 1236–1265. <https://doi.org/10.1080/00102202.2011.589874>
4. Пилипенко В. В., Задонцев В. А., Натанзон М. С. Кавитационные колебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение. 1977. 352 с.
5. Dolgoplov, S. I. Generalization of Experimental Elasticity of Cavitation Bubbles in LRE Pumps that Differ Significantly in Size and Performance. Sci. innov. 2023. 19(5), 71–88. <https://doi.org/10.15407/scine19.05.071>

Визначення похибок апроксимації параболічної поверхні при використанні металевого тканого полотна та опорних пластин.

В. К. Шамаханов, С. В. Хорошилов

Інститут технічної механіки НАНУ і ДКАУ, Дніпро, Україна

vladshamakhnov@gmail.com

Ключові слова: параболічна поверхня, похибки апроксимації, металеве полотно.

Вступ.

Сучасні вимоги до космічних систем дистанційного спостереження Землі з використанням радіолокатора з синтезованою апертурою (РСА) [1] зумовлюють перехід від офсетних рефлекторних антен до симетричних відносно опромінювача рефлекторів. Використання таких симетричних конструкцій дозволяє підвищити маневреність космічного апарата завдяки зменшенню його моментів інерції. Проте ключовою проблемою залишається забезпечення точності параболічної поверхні при використанні металевого сітчастого полотна, яке натягується за допомогою опорної конструкції, що розгортається.

У роботі [2] для формування відбиваючої поверхні використовується комбінований підхід. Центральна радіальна частина рефлектора реалізована у вигляді радіальних пелюсток (опорних пластин) з параболічним профілем, виготовлених із тонкого листового дюралюмінію. Периферійна радіальна частина реалізована у вигляді тросово-стрижневої системи, де стрижні знаходяться у стиснутому стані, а троси — у натягнутому стані [3].

Ключовою проблемою при використанні металевого сітчастого полотна є забезпечення необхідної точності апроксимації параболічної поверхні. Внаслідок так званого "подушкового" ефекту [4] полотно, натягнуте між двома сусідніми жорсткими опорами, прогинається у напрямку, нормальному до поверхні параболоїда, утворюючи відхилення від ідеальної форми. Це явище суттєво впливає на тривалість використання антени тому вимагає ретельного дослідження.

Окремим питанням, що також потребує дослідження, є несуча здатність стиснутих "летючих стрижнів" [2]. Ці елементи, які не мають жорстких вузлових з'єднань і утримуються виключно системою тросів, є критичними з точки зору стійкості, особливо в умовах динамічних навантажень при розгортанні та маневруванні космічного апарата.

Вирішенню зазначених задач — визначенню похибок апроксимації параболічної поверхні та аналізу несучої здатності стрижневих елементів антени — присвячена ця робота.

Конструкція рефлектора, що розгортається.

Конструкція рефлектора, що розгортається [2] складається з двох основних частин: кільцевої ферми і центральної тросово-стрижневої системи з радіальними пелюстками (рис. 1). Кільцева ферма побудована на основі 18 пантографних ланок, з'єднаних у єдину призматичну кільцеву конструкцію.

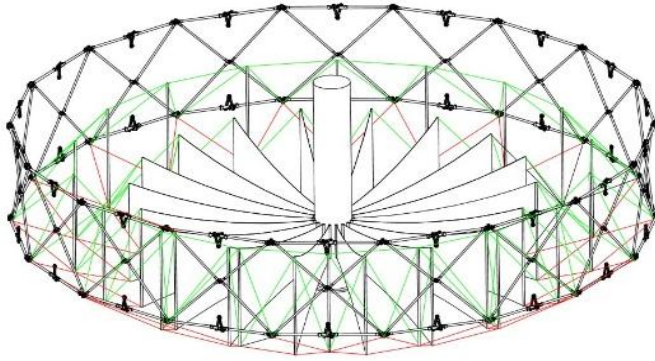


Рис. 1. Конструкція рефлектора

Центральна частина рефлектора реалізована у вигляді двоярусної системи із використанням так званих «летючих стрижнів». Вона включає радіальні пелюстки з тонкого листового металу (товщиною близько 0,1 мм), що намотуються на центральний вузол у складеному стані та розгортаються під дією тросів і ферми. Пелюстки виконують роль формуючих елементів у центральній зоні рефлектора та забезпечують точність параболічного профілю.

Периферійна зона рефлектора підтримується тросово-стрижневою системою, де стрижні — так звані "летючі стрижні" — знаходяться під дією стискаючих зусиль від попередньо натягнутих тросів. Назва "летючі" пов'язана з тим, що ці стрижні не мають жорстких вузлових з'єднань: вони утримуються виключно через прикріплені до їх кінців троси. Застосування такої конструкції підвищує загальну жорсткість центральної частини рефлектора і знижує сумарні зусилля натягу порівняно з структурою без пелюсток.

Аналіз похибок апроксимації параболічної поверхні.

Для визначення похибки апроксимації параболічної поверхні металевим полотном використано лінійну теорію мембран. Розглядається фрагмент полотна між двома сусідніми опорними пластинами. В рамках моделі полотно вважається попередньо натягнутою мембраною з однаковим натягом у всіх напрямках. Опорні пластини вважаються абсолютно жорсткими і утримують краї мембрани на ідеальній параболічній поверхні.

Для отримання результатів із зміни параболічної форми поверхні металевого полотна було створено спрощену модель, яка складається лише із двох опорних пластин та фрагмента полотна.

З використанням лінійної теорії мембран отримано наближені аналітичні вирази для визначення похибок апроксимації поверхні полотна [5].

Для розрахунку деформації мембрани спочатку визначається базова геометрія параболічного рефлектора у тривимірній декартовій системі координат з фокусною відстанню F :

$$Z = \frac{1}{4F} (X^2 + Y^2)$$

Сітка, що утворює поверхню, моделюється як мембрана під дією рівномірного натягу без жорсткості на вигин. У локальній системі координат (x, y, z) , де центр

ромба знаходиться на початку координат, вертикальна координата сітки після деформації w має задовольняти рівняння Лапласа:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Загальний розв'язок цього рівняння представляється у вигляді комплексного ряду, де $z = x + iy$:

$$w = \operatorname{Re} \left(\sum_{i=0}^{\pi} A_n z^{2n} \right)$$

Ці результати порівняно з результатами скінченно-елементного моделювання (СЕМ). Для СЕМ для поверхні було побудовано трикутну сітку із елементів типу SHELL181 (рис. 2). Симуляція натягу металевго полотна виконана шляхом прикладання до поверхні від'ємної температури у $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$.

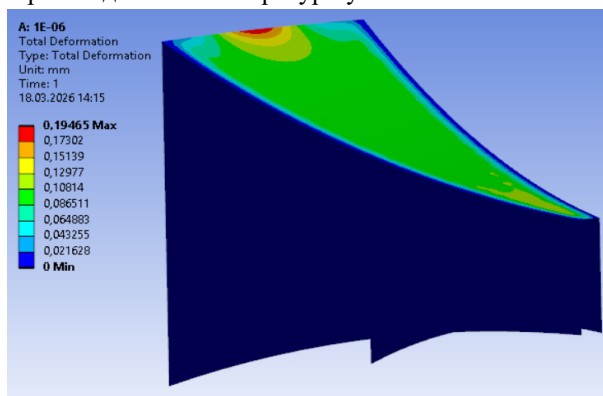


Рис. 2. Деформації фрагмента металевго полотна рефлектора

Завдяки симуляції також було оптимізовано коефіцієнт температурного розширення (КТР) матеріалу задля точнішої симуляції натягнутого стану полотна. Таким чином в першому випадку (рис.2) КТР був взятий доволі малим $0,000001\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$, чого було замало для досягнення бажаного натягу поверхні. Якщо ж підвищити КТР до $0,0015\text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$ (рис. 3) – можна досягти бажаного натягу поверхні у 4 Н/м .

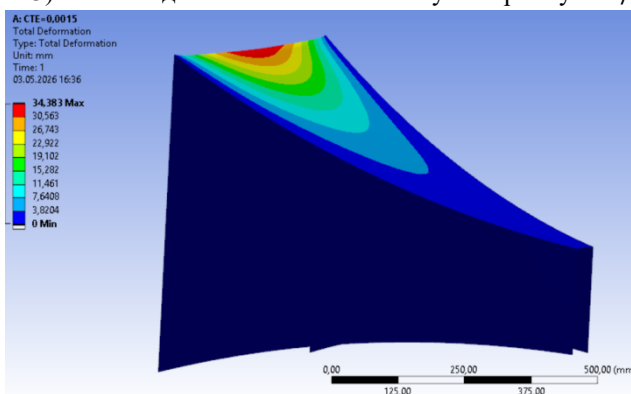


Рис. 3. Деформації фрагмента металевго полотна рефлектора із уточненим КТР

Результати СЕМ підтверджують можливість використання спрощених аналітичних виразів для аналізу точності поверхні симетричного рефлектора. В

цілому, результати дослідження демонструють доцільність комбінування тросово-стрижневих структур із жорсткими формоутворюючими елементами для досягнення необхідних характеристик при обмежених габаритах ферми у складеному стані.

Дослідження "летючих стрижнів" на стиснення.

В центральній частині рефлектора стиснуті елементи, "летючі стрижні", є несучими елементами. Їх особливість полягає в тому, що вони не мають жорстких вузлових з'єднань з іншими елементами: кожен стрижень кріпиться виключно через гнучкі троси, прикріплені до його торців і середини. Такий тип кріплення відповідає граничним умовам, близьким до шарнірного закріплення з обох кінців, хоча в реальності наявність бічних тросів дещо підвищує ефективну жорсткість кріплення.

Геометрія "летючих стрижнів": зовнішній діаметр $d = 10$ мм, товщина стінки $t = 1$ мм, довжина $L = 610$ мм, параметри матеріалу — модуль Юнга $E = 120$ ГПа, коефіцієнт Пуассона $= 0,3$, щільність $\rho = 1800$ кг/м³. Поперечний переріз — тонкостінна кругла трубка.

Навантаження з яким стрижень має стискатись визначено в залежності від натягу тросів яке становить 2 Н, тому максимальна стискаюча сила, що прикладається до «летючих стрижнів» становить 20 Н. Окрім цього було розглянуто також випадки де сила стискання значно більша і дорівнює 1000 Н.

Для СЕМ стрижня було побудовано сітку із елементів типу SOLID186, та стискання моделювалось шляхом прикладання до обох кінців стрижня стискаючих зусиль розміром 20 Н та 1000 Н. Характер деформацій для обох випадків є подібним, тому далі представлено візуальні результати тільки для першого випадку для стискаючих зусиль 20 Н (рис. 4).

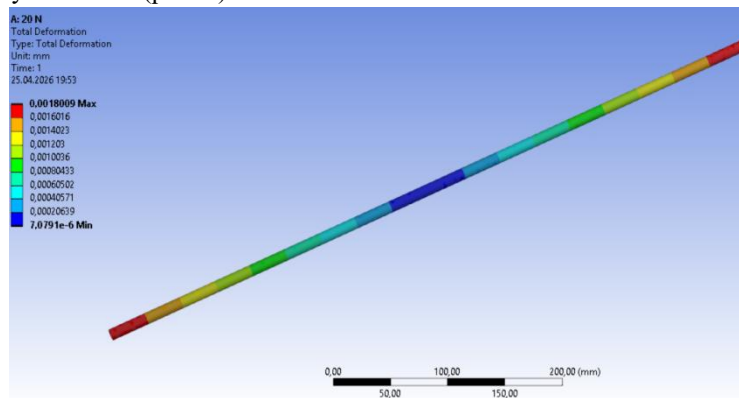


Рис.4. Деформації одного «летючого стрижня» при зусиллях у 20 Н.

Результати СЕМ стискання стрижня показують високу стійкість до зусиль які значно переважають прогнозовані. Максимальні навантаження для випадку стискання із зусиллями у 20 Н становлять 0,0018 мм, що є незначним. При стисканні стрижня із екстремальними зусиллями у 1000 Н максимальні деформації також є невеликими і становлять лише 0,45 мм, що є також дуже прийнятним результатом.

Додатково, з метою визначення мінімальних геометричних параметрів стрижня, за яких він втрачає свою стійкість, було проведено СЕМ тонкостінного стрижня, діаметр якого довелося також зменшувати до тих пір, поки максимальне значення деформації стрижня при його стисканні зусиллям у 20 Н не перевищить 0,5 мм.

Параметри використаного матеріалу, довжина стрижня, а також тип елементів побудованої для СЕМ сітки залишаються аналогічними до попередньої задачі.

В результаті проведеного моделювання було визначено наступні геометричні характеристики стрижня: зовнішній діаметр $d = 2$ мм, товщина стінки $t = 0,01$ мм. Максимальні деформації в такому випадку становлять 0,816 мм, що є достатнім, щоб вважати стрижень не стійким. Відповідно, використання «летючих стрижнів» є доцільним для збереження жорсткості та стійкості центральної частини антени.

Висновки.

У роботі проведено аналіз похибок апроксимації параболічної поверхні для симетричної антени з комбінованою відбиваючою конструкцією та проведено дослідження несучої здатності стиснутих "летючих стрижнів" рефлектора. Отримані результати підтверджують ефективність використання опорних пластин для забезпечення необхідної форми в центральній зоні рефлектора. Дослідження «летючих стрижнів» продемонстрували їхню високу надійність при номінальних та екстремальних навантаженнях та визначили межу стійкості при зміні їх геометричних характеристик, що робить їх використання в конструюванні жорсткої центральної частини антени доцільним. Враховуючи складність процесів взаємодії сітчастого полотна з тросово-стрижневою системою та температурні деформації елементів, доцільним є дослідження питання оптимізації параметрів натягу та детальний аналіз похибок з урахуванням усіх особливостей конструкції.

1. E. Medzmariashvili, S. Tserodze, et al. Structure, structural features, assembling, and bench testing of the deployable space reflector, *CEAS Space J*, **17**, 421–429 (2025).
2. S. Khoroshylov, E. Medzmariashvili, et al. *Design and analysis of symmetrical deployable antenna consisting of unified ring truss and cable-rod pre-stressed structure with radial petals*, 43nd ESA Antenna Workshop, Noordwijk (2025).
3. Y. Zhang, J. Zhang, et al. Design of deployable mesh reflector antenna based on cable-dome tensegrity structure, *Structures*, **68**, 107150 (2024).
4. Y. Tang, T. Li, X. Ma, Pillow distortion analysis for a space mesh reflector antenna, *AIAA Journal*, 55-9, 32063213 (2017).
5. T. Masuoka, S. Ozava, et al. Rhombus facet design of fan-fold deployable reflector, *Acta Astronautica*, **243**, 305–314 (2026).

Вплив тривалості старіння на міцнісні характеристики сплавів Pb-Ca-Sn для струмовідводів свинцево-кислотних акумуляторів

В. О. Дезерський, С. В. Тарасов, О. В. Сухова, В. А. Іванов

Інститут транспортних систем і технологій НАН України, Дніпро, Україна

sukhovaya@ukr.net

В роботі досліджено вплив тривалості старіння на міцнісні характеристики сплавів Pb-Sn-Ca, що містять до 1,1 ваг.% Sn і до 0,1 ваг.% Ca (Pb – залишок). Визначено їх тимчасову міцність на розрив, відносне подовження, умовну межу плинності та модуль Юнга, розрахованих з діаграм розтягу, отриманих за допомогою випробувальної машини TIRAtest 2300 за температури $20 \pm 5^\circ\text{C}$. Встановлено, що залежно від співвідношення вмісту олова і кальцію в досліджених сплавах Pb-Sn-Ca спостерігаються різні тенденції зміни їх міцнісних характеристик у ході природнього старіння протягом 35 діб під час зберігання на складі. Отримані результати пояснено з урахуванням змін в структурі сплавів Pb-Sn-Ca, викликаних проходженням процесів природнього старіння. Показано, що процеси старіння мають більший вплив на міцнісні властивості дисперсотвердих сплавів системи Pb-Sn-Ca, якщо співвідношення вмісту олова і кальцію зростає до 21.

Ключові слова: свинцево-кислотні батареї, сплави Pb-Ca-Sn, природнє старіння, дисперсійне зміцнення, тимчасова міцність, відносне подовження, межа плинності, модуль Юнга

Вступ

Натепер однією з вимог ринку свинцево-кислотних акумуляторів є зниження витрат споживачів на їх обслуговування, пов'язаних з розкладанням води в ході експлуатації, що потребує періодичного поповнення електроліту і додаткової зарядки [1,2]. Цю проблему вирішують шляхом використання свинцево-кальцієвих сплавів для виготовлення струмовідводів [3]. Переваги цих сплавів, а саме висока корозійна стійкість та мінімальні витрати на обслуговування, забезпечили їх широке використання для виготовлення струмовідводів стаціонарних і резервних акумуляторів. Однак у разі застосування свинцево-кальцієвих сплавів в акумуляторах транспортних засобів, що працюють у циклічному режимі глибокого заряду, потужність акумуляторів різко знижується впродовж перших тридцяти циклів [4]. Цей ефект, який отримав назву «передчасної втрати потужності» (ПВП-ефект), значно обмежує використання свинцево-кальцієвих сплавів у виробництві стартерних і тягових акумуляторів.

Негативну дію ПВП-ефекту можна знизити за рахунок легування сплавів Pb-Ca оловом [5,6]. Додавання цього елемента підвищує межу плинності та опір повзучості, покращує стійкість до знакозмінних навантажень. Позитивний ефект від легування оловом також полягає в компенсації негативного впливу збільшення вмісту кальцію на корозійну стійкість [7]. Швидкість корозії зменшується зі збільшенням розміру зерна в структурі [8], а кальцій має подрібнюючий ефект. Крім того, у сплавів Pb-Sn-Ca є додатковий ресурс для поліпшення механічних властивостей завдяки природньому старінню [9]. Цей процес залежно від співвідношення вмісту олова і кальцію (%Sn/%Ca) в сплавах пов'язаний із виділенням надлишкових фаз Sn_3Ca та/або Pb_3Ca з пересиченого оловом і кальцієм твердого розчину на основі свинцю [10,11].

Старіння відбувається під час охолодження і зберігання сплавів, оскільки зі зниженням температури зменшується розчинність олова і кальцію в α -свинці [12,13].

В ході експлуатації струмовідводи свинцево-кислотних акумуляторів зазнають знакозмінних навантажень з боку активної маси, пов'язаних зі зміною її питомого об'єму в циклічному процесі зарядки/розрядки, а також динамічних навантажень під час руху транспортного засобу. Тому сплави для струмовідводів повинні відповідати вимогам до механічної міцності і стабільності розмірів [14]. Перспективними до використання є сплави Pb–Sn–Ca, що містять до 1,1 ваг.% Sn і до 0,1 ваг.% Ca [2], однак механічні властивості цих сплавів досліджені недостатньо. Тому в даній роботі вивчали вплив тривалості природнього старіння на міцнісні характеристики сплавів Pb–Sn–Ca вищевказаного концентраційного діапазону.

1. Методика дослідження

Випробовували промислові сплави Pb–Sn–Ca за вмісту 0,33–1,11 ваг.% Sn; 0,053–0,11 ваг.% Ca; Pb – залишок, які виплавляли у ливарних машинах автоматичної лінії збирання свинцево-кислотних акумуляторів фірми “BM” (Австрія). Загальний вміст домішок Bi та Al не перевищував 0,026 ваг.%. Хімічний склад контролювали за допомогою оптичного емісійного спектрометра ARL 3460. Температура розплаву в казані ливарної машини перед виливкою становила $450 \pm 5^\circ\text{C}$. Температура підігріву ливарної форми, в якій охолоджували сплави після виливки, дорівнювала 70°C . На внутрішню поверхню роз'ємної ливарної форми наносили покриття з пробкової суспензії, аналогічне покриттю форм ливарних автоматів для лиття струмовідводів.

Мікроструктуру сплавів у литому стані та після природнього старіння впродовж 35 діб досліджували методами кількісного металографічного аналізу (мікроскопи “Неофот”, “Епіквант”). Випробування на розтяг виконували на випробувальній машині TIRAtest 2300 за температури $20 \pm 5^\circ\text{C}$. Плоскі зразки, що мали довжину 60 мм, довжину захватної частини 45 мм і товщину 3 мм, виготовляли відповідно до вимог стандарту ДСТУ 11701-84. На закріплених зразках встановлювали багатооборотні індикатори годинного типу, які фіксували подовження (Δl) зі збільшенням навантаження (P). Зразки навантажували зі швидкістю 10 мм/хв з кроком 100 Н. Середні значення тимчасової міцності на розрив (σ_B), умовної межі плинності ($\sigma_{0.2}$), модуля Юнга (E) та відносного подовження (δ) визначали за результатами випробувань 6 зразків відповідно до вимог стандарту ДСТУ 1497-84. Похибка вимірювання не перевищувала 3–5%.

2. Результати та їх обговорення

Литий сплав Pb–0,33% Sn–0,11% Ca (%Sn/%Ca=3) з відносно високим вмістом кальцію та низьким вмістом олова має дрібнозернисту структуру (рис. 1, а) з розміром зерна твердого α -розчину на основі свинцю 45 ± 5 мкм. Тоді як в сплаві Pb–1,11%Sn–0,053% Ca (%Sn/%Ca=21) утворюється крупнозерниста структура (рис. 1, б), розмір зерна якої збільшується в 8,7 рази до 392 ± 32 мкм.

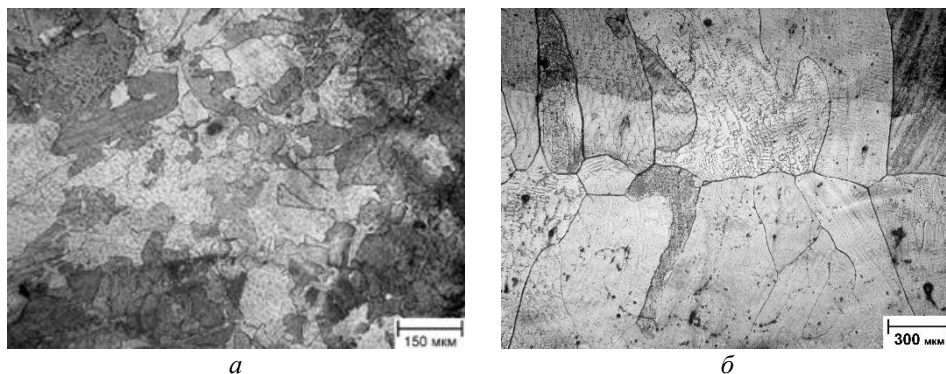


Рис. 1. Мікроструктури досліджених литих сплавів Pb–Sn–Ca: *a* – Pb–0,33%Sn–0,11%Ca; *б* – Pb–1,11%Sn–0,053%Ca.

Під час зберігання сплавів Pb–Sn–Ca на складі в їх структурі відбуваються процеси природнього старіння. На рис. 2 показано структури досліджених сплавів після 35 днів зберігання. Як видно, розмір зерна твердого α -розчину на основі свинцю практично не змінюється. Однак, спостерігаються різні тенденції зміни механічних властивостей. Вони пов'язані з фазовим складом сплавів, який залежить від співвідношення вмісту олова і кальцію.

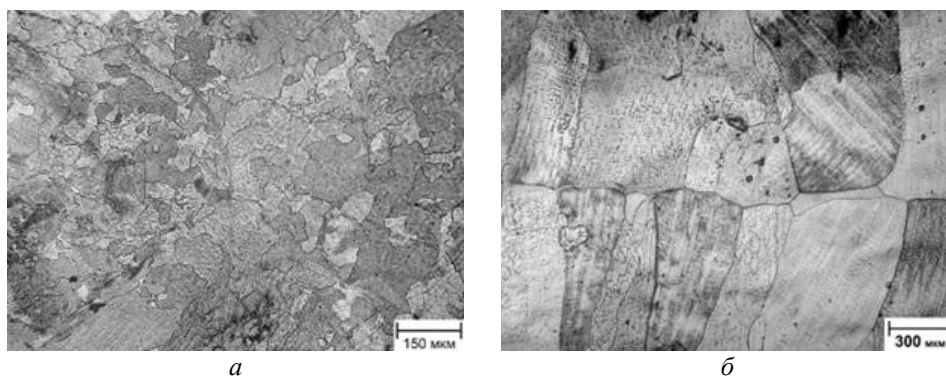


Рис. 2. Мікроструктури сплавів Pb–Sn–Ca після 35 діб старіння: *a* – Pb–0,33%Sn–0,11%Ca; *б* – Pb–1,11%Sn–0,053%Ca.

Типовий вигляд діаграм розтягу, які характеризують зміну механічних властивостей залежно від тривалості старіння, показаний на рис. 3. На всіх діаграмах видна прямолінійна ділянка, що відповідає області пружної деформації, яка плавно переходить у ділянку, яка притаманна області пластичної деформації.

Діаграми на розтяг для зразків сплаву Pb–0,33%Sn–0,11%Ca з однієї партії мають ідентичний вигляд (3, а). Значних змін в діаграмах, отриманих для досліджених зразків зі збільшенням терміну старіння, не спостерігається.

Для сплаву Pb–1,11%Sn–0,053%Ca з подовженням тривалості старіння збільшується висота підйому та кут нахилу прямолінійної ділянки діаграм (рис. 3, б). Крім того, різко зростає довжина лінійної ділянки, що свідчить про ріст величини напружень, за яких спостерігається пластична деформація зразків.

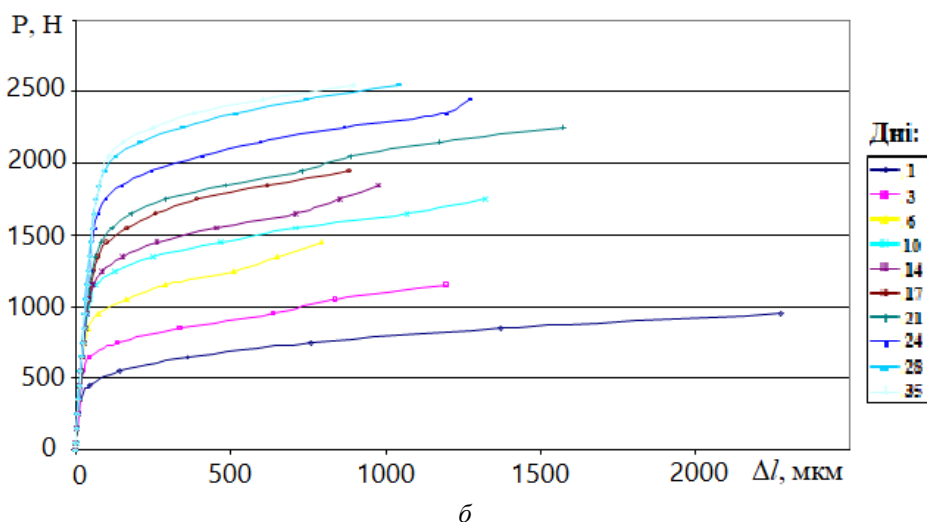
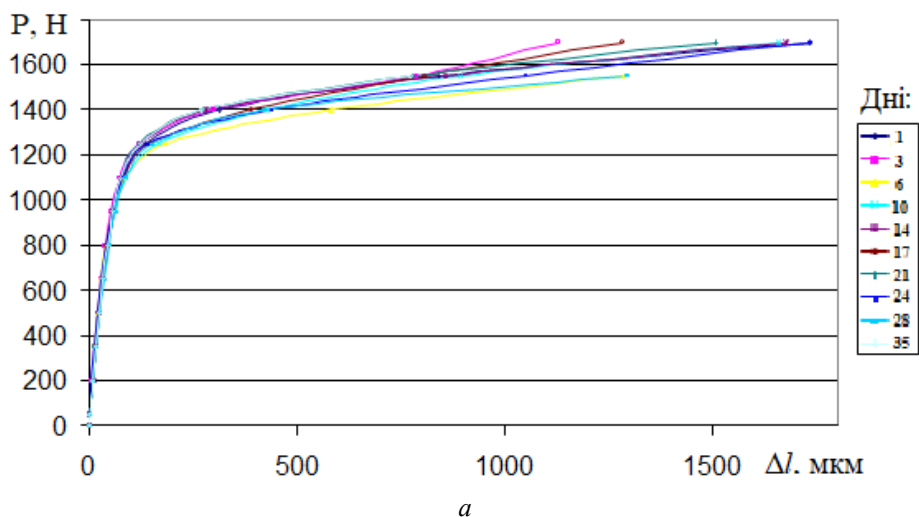


Рис. 3. Діаграми розтягу сплавів Pb–Sn–Ca залежно від тривалості старіння: а – Pb–0,33%Sn–0,11%Ca; б – Pb–1,11%Sn–0,053%Ca.

З використанням отриманих діаграм розтягу розраховували числові значення механічних властивостей, а саме тимчасової міцності на розрив σ_b , відносного подовження δ , умовної межі плинності $\sigma_{0,2}$ та модуля пружності E залежно від тривалості природнього старіння протягом 35 діб (рис. 4). Як видно з наведених кривих, механічні властивості сплаву Pb–0,33%Sn–0,11%Ca (%Sn/%Ca=3) практично не змінюються. Тимчасова міцність на розрив σ_b збільшується з 37,0 МПа до 37,2 МПа (на 0,5%) (рис. 4, а), умовна межа плинності $\sigma_{0,2}$ – з 10,0 МПа до 10,1 МПа (на 1%) (рис. 4, в). Значення модуля Юнга після 3 діб старіння стабілізуються на рівні 12,9 ГПа (рис. 4, г), а відносне подовження зменшується з 26,1% до 21,5% (на 18%) (рис. 4, б). Причиною такої поведінки сплаву в ході дисперсійного твердіння є швидке завершення виділення надлишкової фази Pb_3Ca з пересиченого кальцієм твердого розчину на основі α -Pb в процесі лиття та впродовж перших 1–3 діб.

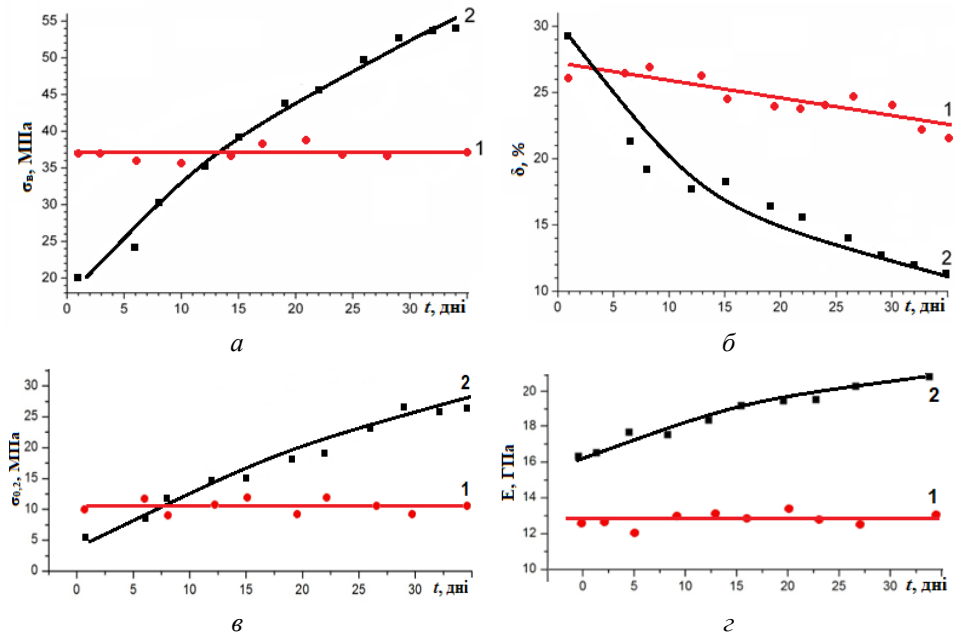


Рис. 4. Механічні властивості сплавів Pb–0,33%Sn–0,11% Ca (крива 1) та Pb–1,11%Sn–0,053%Ca (крива 2) залежно від тривалості старіння: а – тимчасова міцність на розрив; б – відносне подовження; в – умовна межа плинності; г – модуль Юнга.

Незважаючи те, що сплав Pb–1,11%Sn–0,053%Ca (%Sn/%Ca=21) має крупнозернисту структуру порівняно зі сплавом Pb–0,33%Sn–0,11%Ca, а відтак меншу довжину границь зерен і менше місць для зародження надлишкових фаз під час старіння, для цього сплаву спостерігається монотонна зміна механічних властивостей (рис. 4). Тимчасова міцність на розрив σ_v зростає з 20,1 МПа до 54,1 МПа (в 2,7 рази) (рис. 4, а), умовна межа плинності $\sigma_{0.2}$ – з 5,4 МПа до 26,3 МПа (в 4,9 рази) (рис. 4, в), модуль Юнга Е – з 16,1 ГПа до 20,8 ГПа (в 1,3 рази) (рис. 4, г). Відносне подовження δ знижується з 29,2% до 11,5% (в 2,5 рази) (рис. 4, б). На властивості цього сплаву впливає виділення дисперсних фаз Pb_3Ca , $(Pb,Sn)_3Ca$ і Sn_3Ca , що обумовлює більший темп зміни характеристик. Причому, визначальне значення має утворення фази Sn_3Ca , яка має більший зміцнювальний ефект. При цьому, на відміну від фаз Pb_3Ca і $(Pb,Sn)_3Ca$, процес утворення фази Sn_3Ca відбувається неперервно протягом всього періоду 35-денного старіння, що обумовлює монотонну зміну властивостей.

Висновки

Механічні властивості сплавів Pb–Sn–Ca, що містять 0,033–1,11 ваг.% Sn; 0,053–0,11 ваг.% Ca; Pb – залишок, залежать від співвідношення вмісту Sn та Ca в їх складі. Залежність цих властивостей від тривалості старіння зростає зі збільшенням значення співвідношення вмісту олова та кальцію, досягаючи максимального ефекту для сплаву Pb–1,11%Sn–0,053%Ca з %Sn/%Ca, рівним 21. Міцнісні характеристики сплаву Pb–0,33%Sn–0,11%Ca (%Sn/%Ca=3) після 1–3 діб природнього старіння практично не змінюються через нестачу в складі олова, необхідного для утворення надлишкової фази Sn_3Ca , яка має найбільший зміцнювальний ефект.

1. D. A. J. Rand, T. Moseley, J. Garche, and C. D. Parker, *Valve-Regulated Lead-Acid Batteries*, Elsevier, Amsterdam (2004). <https://doi.org/10.1016/B978-0-444-50746-4.X5000-4>
2. S. Guruswamy, *Engineering properties and applications of lead alloys*, CRC Press, Boca Raton (2000). <https://doi.org/10.1201/9781482276909>
3. E. Gullian, L. Albert, J. L. Caillerie, New lead alloys for high-performance lead-acid batteries, *Journal of Power Sources*, **116**(1–2), 185–192 (2003). [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-7753\(02\)00705-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-7753(02)00705-X)
4. D. A. J. Rand, D. P. Boden, C. S. Lakshmi, R. R. Nelson, R. D. Prengaman, Manufacturing and operational issues with lead-acid batteries, *Journal of Power Sources*, **107**(2), 280–300 (2002). [https://doi.org/10.1016/S0378-7753\(01\)01083-7](https://doi.org/10.1016/S0378-7753(01)01083-7)
5. V. A. Dzenzerskiy, S. V. Tarasov, O. V. Sukhova, V. A. Ivanov, Evolution of mechanical properties of Pb–Sb–Sn–As–Se grid alloys for lead-acid batteries during natural aging, *East European Journal of Physics*, **2023**(4), 182–188 (2023). <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2023-4-21>
6. K. Sawai, Y. Tsuboi, Y. Okada, M. Shiomi, S. Osumi, New approach to prevent premature capacity loss of lead-acid battery in cycle use, *Journal of Power Sources*, **179**(2), 799–807 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2007.12.106>
7. B. Yang, C. Xianyu, Y. Shaoqiang, L. Wei, D. Changsong, Y. Geping, Effect of lanthanum, cerium and other elements on the electrochemical corrosion properties of Pb–Ca–Sn–Al alloy in lead–acid batteries, *Journal of Energy Storage*, **25**(10), 1009082019. <https://doi.org/10.1016/j.est.2019.100908>
8. O. V. Sukhova, V. A. Polonskiy, K. V. Ustinova, Corrosion-electrochemical properties of quasicrystalline Al–Cu–Fe–(Si, B) and Al–Ni–Fe alloys in NaCl solution, *Voprosy Khimii i Khimicheskoi Tekhnologii*, **124**(3), 46–52 (2019). <https://doi.org/10.32434/0321-4095-2019-124-3-46-52>
9. O. V. Sukhova, Solubility of Cu, Ni, Mn in boron-rich Fe–B–C alloys, *Physics and Chemistry of Solid State*, **22**(1), 110–116 (2021). <https://doi.org/10.15330/pcss.22.1.110-116>
10. F. A. Pérez-González, C. G. Camurri, C. A. Carrasco, R. Colás, Precipitation in a lead calcium tin anode, *Materials Characterization*, **64**(1), 62–68 (2012). <https://doi.org/10.1016/j.matchar.2011.11.013>
11. C. Camurri, C. Carrasco, O. Prat, R. Mangalaraja, A. Pagliero, R. Colàs, Study of precipitation hardening in lead calcium tin anodes for copper electrowinning, *Materials Science and Technology*, **26**(2), 210–214 (2010). <https://doi.org/10.1179/174328409x443245>
12. Y. A. Yassine, M. Lakhal, N. Labchir, E. Zantalla, E. Saad, M. Sannad, Kinetic study of the aging and overaging of alloy Pb0.058%Ca0.12%Sr1.09%Sn for battery grids, *Coatings*, **13**(9), 1534 (2023). <https://doi.org/10.3390/coatings13091534>
13. F. Rossi, M. Lambertin, L. Delfaut-Durut, A. Maitre, M. Vilasi, Determination of new time–temperature–transformation diagrams for lead–calcium alloys, *Journal of Power Sources*, **185**(2), 1465–1470 (2008). <https://doi.org/10.1016/j.jpowsour.2008.11.049>
14. V. O. Dzenzerskiy, S. V. Tarasov, O. V. Sukhova, V. A. Ivanov, Effects of composition and cooling rate on mechanical properties of Pb–Sb–Sb–As grid alloys, *Romanian Journal of Physics*, **69**(1–2), 605 (2024), <https://doi.org/10.59277/RomJPhys.2024.69.605>

Вплив великомасштабної топографії дна на структуру океанічних течій

В. А. Воскобійник^{а1}, Т. Радко^б, Г. Якобс^в, А. В. Воскобійник^а, А. М. Онищенко^г,
О. А. Воскобойник^а

^аІнститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

^бВійськово-морська аспірантура, Монтерей, США

^вВійськово-морська дослідна лабораторія, Стенніс, США

^гНаціональний транспортний університет, Київ, Україна

¹ vlad.vsk@gmail.com

Проведено чисельне та фізичне моделювання, а також натурні дослідження визначення особливостей взаємодії великомасштабної та дрібномасштабної придонної топографії на мезомасштабні океанічні течії. Показано, що теорія наждачного паперу, що представляє собою строгу асимптотичну параметризацію напружень Рейнольдса та використовує статистичні спектральні властивості рельєфу океанічного дна, суттєво підвищує точність моделювання океанічних течій над широкомасштабною придонною топографією. Результати візуальних та інструментальних вимірювань полів швидкості в лабораторних умовах показали особливості генерації, формування та еволюції вихрових структур, струменевих і хвильових течій, які виникають під час обтікання шорсткої моделі підводної гори Атлантіс II та інтегральні і спектральні характеристики пульсацій поздовжньої швидкості в сліді моделі цієї гори. Результати натурних досліджень з використанням надводних і підводних планерів та супутникової альтиметрії дозволили отримати океанографічні та акустичні характеристики океанічних вод.

Ключові слова: океанічна течія, топографія дна, підводна гора, чисельне та фізичне моделювання, вихрова структура, візуалізація, поле швидкості, спектральна характеристика

Вступ

Вирішальна роль у підтриманні кліматичних умов на Землі належить циркуляційним течіям верхнього шару океанічної поверхні внаслідок перерозподілу теплової енергії, поживних речовин, вологості повітря між п'ятьма Світовими океанами. Ці великомасштабні або мезомасштабні циркуляційні течії, що мають мезомасштабну довжину (30-100) км та меншу субмезомасштабну ширину (1-10 км або менше), породжують вітрові навантаження та виникають внаслідок дії сил Коріоліса, які обумовлені обертанням планети Земля. Вивчення механізмів, які керують процесом циркуляції поверхні океанів та їх глибинних течій, має вирішальне значення для раціонального використання ресурсів в тому числі і відновлюваної енергії океанічних хвиль, транспортних морських шляхів та прогнозування клімату.

Регіон підводних гір Нової Англії, розташований біля узбережжя штату Массачусетс (США), омивається меандруючою сильною течією Гольфстрім в Атлантичному океані. Крутий рельєф підводних гір та берегових схилів генерує турбулентність, слідні течії і вихрові структури через бароклінні або баротропні нестабільності, що є визначальним для екології океанічного простору та глобальних кліматичних процесів і явищ. Так, підводні гори є місцями породження завихреності через взаємодію океанічних течій та топографії і поскільки підводні гори є джерелами

внутрішніх хвиль, то вони сприяють вертикальному перемішуванню між шарами щільності океанічної води. Взаємодія течії Гольфстрім з придонними неоднорідностями складної батиметрії призводить до суттєвої часової та просторової мінливості швидкості звуку та його розповсюдження в околі подібних неоднорідностей, особливо великомасштабних, де спостерігаються ефекти інтерференції та дисипації акустичних полів [1].

Багато теоретичних та модельних досліджень з застосуванням аналітичних, чисельних та фізичних методів моделювання взаємодії мегамасштабних циркуляційних океанічних течій з підводними великомасштабними неоднорідностями донних та берегових поверхонь були зосереджені на розумінні механізмів генерації вихрових, струменевих, хвильових придонних та поверхневих течій. Разом з натурними або напівнатурними дослідженнями характерні особливості взаємодії течії з заглибленими неоднорідностями у вигляді поганообтічних тіл проводилися з ідеалізованими конфігураціями обтічних тіл у вигляді гаусових або конічних топографій форми підводних гір та застосуванням однорідних бпротропних потоків.

Мета роботи – визначити основні особливості механізму взаємодії океанічних течій з великомасштабною топографією донної поверхні та вплив топографії на структуру мезомасштабної течії.

1. Програма, методика та методи дослідження

Дослідження проводилися за допомогою методів чисельного і фізичного моделювання та натурних вимірювань взаємодії мегамасштабних океанічних течій з великомасштабними нерівностями топографії дна. Проаналізовано динаміку взаємодії течії та рельєфу в регіонах океану з сильними течіями, крутими схилами та складним багатомасштабним рельєфом. Незважаючи на безперервний прогрес у високопродуктивних обчисленнях, моделі загальної циркуляції з визначенням нерівностей не будуть регулярно використовуватися для глобального операційного та кліматичного моделювання в майбутньому. Таким чином, параметризація ефектів дрібномасштабної батиметрії є найбільш можливим шляхом вирішення цих проблем. Особливо багатообіцяючою розробкою в цій галузі є теорія наждачного паперу [2, 3]. Ця модель дає можливість оцінити форсування течії за нерівним рельєфом за спектральними характеристиками рельєфу дна. Хоча дрібномасштабні візерунки морського дна в різних місцях такі ж унікальні, як і наші відбитки пальців, їхні спектральні характеристики можуть бути набагато більш однорідними. Теорія наждачного паперу призводить до явних моделей замикання для процесів, які мають вплив на взаємодію великомасштабної течії з елементами шорсткості, а саме, на індуковане топографією напруження Рейнольдса та топографічний опір форми, що обумовлений дією вихрових структур. В основу цього підходу покладені фізичні механізми та явища і він узгоджується з динамікою руху дрібномасштабних гідродинамічних складових і не потребує налаштування параметрів моделювання.

1.2. Програма і методика фізичного моделювання

Фізичне моделювання проводилося в лабораторних умовах в гідродинамічному каналі довжиною 14 м, шириною та глибиною по 1 м. На рис. 1 приведена фотографія експериментального стенду та шорстка модель підводної гори Атлантіс II з системою

координат, яка застосовувалася під час проведення дослідів. Стінки гідродинамічного каналу були скляними для можливості проведення контролю експериментальних робіт та виконання візуальних досліджень з застосуванням відео та фотоапаратури. Експериментальний стенд було обладнано контрольно-вимірювальною апаратурою, системами комп'ютерної реєстрації даних, засобами візуальних і інструментальних досліджень, координатними пристроями та добре обтічними державками для установки датчиків, освітлювальною апаратурою.

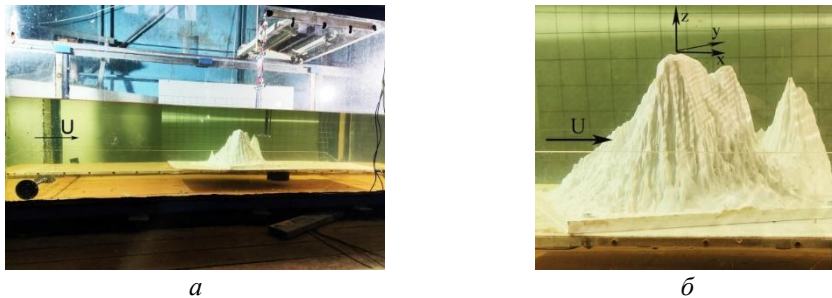


Рис. 1. Експериментальний стенд: *а* – розташування моделі підводної гори та термоанемометрів; *б* – декартова система координат.

Шорстка модель підводної гори Атлантик II, яку було зроблено з пластику на 3-Д принтері з точним дотриманням профілю гірської поверхні, мала висоту 0.2 м та ширину і довжину основи близько 0.4 м. Модель було розташовано на гідравлічно гладкій поверхні добре обтічної пластини з кінцевими шайбами довжиною 2 м та шириною 0.5 м. Пластина була закріплена на дні гідродинамічного каналу на висоті 0.1 м від його дна. Глибина потоку в гідродинамічному каналі складала 0.4 м. Таким чином, глибина потоку над вершиною моделі підводної гори була 0.1 м. Швидкість течії (U) в гідродинамічному каналі змінювалася від 0.05 м/с до 0.20 м/с, а числа Фруда ($Fr=U^2/gH$) та Рейнольдса ($Re=UL_{H/2}/\nu$), які розраховувалися по висоті моделі підводної гори ($H=0.20$ м) або по її ширині ($L_{H/2}=0.15$ м) на рівні напіввисоти ($H/2$) та по швидкості течії, де g – гравітаційна стала і ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості води. Діапазон зміни коефіцієнтів Рейнольдса і Фруда в проведених дослідженнях був наступним: $Re=(7500-30000)$ та $Fr=(0.001-0.02)$.

Згідно до розробленої програми та методики проведення експериментальних досліджень в ході робіт виконувалися візуальні дослідження з використанням відео-фотоапаратури та інструментальні вимірювання полів швидкості та тиску в околі і на обтічній поверхні шорсткої моделі підводної гори Атлантик II. Візуалізація реалізувалася за допомогою використання кольорових барвників, які подавалися через мініатюрні тонкостінні трубочки. Використовуючи цифрові фотоапарати та відеокамери, візуалізовані картини траєкторій руху барвників реєструвалися та передавалися на комп'ютерну техніку [4]. Інструментальні дослідження проводилися за допомогою датчиків швидкості та тиску, які дозволяли реєструвати як осереднені, так і пульсаційні складові полів швидкості та тиску. В якості засобів вимірювання полів швидкості використовувалися плівкові термоанемометри, мініатюрні трубки Піто, п'єзокерамічні та п'єзорезистивні датчики швидкісного напору і пульсацій прістинного тиску [5, 6].

1.3. Програма і методика натурних вимірювань

На базі результатів, які отримано в роботах [7, 8], проводяться оцінки спостережень та тривимірних моделей глибинних взаємних кореляцій і спектрів потужності температури та солоності води за допомогою планерів з пілотної компанії S-MODE з використанням Фур'є аналізу в просторі хвильових чисел та гауссівських фільтрів. В результаті досліджень буде перевірене представлення числовим моделюванням теоретичного розуміння океану з проведеними натурними спостереженнями. Це дозволить покращити регулярні прогнози стану океанічної акваторії. В тому числі велику увагу приділено до прогнозування дрібніших масштабів з корегуванням великомасштабних і дрібномасштабних об'єктів як в площинному, так і вертикальному перерізах океану. Серед засобів дистанційного моделювання використовують автономні профілюючі планери, лагранжеві поверхневі дрейфтери, альтиметричне зондування супутниками типу Surface Water Ocean Topography (SWOT) в системі аналізу чи прогнозу океану високої роздільної здатності до (500-1000) м.

2. Результати дослідження

В ході проведення досліджень з визначення особливостей механізму взаємодії океанічних течій з великомасштабною топографією донної поверхні та впливу топографії на структуру мезомасштабних і субмезомасштабних течій отримано результати чисельного і фізичного моделювання та натурні дані про особливості взаємодії течій з придонною океанічною топографією.

2.1. Результати чисельного моделювання взаємодії океанічної течії з придонною топографією

Результати чисельного моделювання з використанням теорії наждачного паперу були отримані для двох випадків моделювання взаємодії мезомасштабних течій з нерівностями придонної топографії у вигляді шорсткості на донній поверхні у віртуальній лабораторній установці, що моделювала циркуляційну течію в обертовому резервуарі (рис. 2а) та великомасштабний гребінь гауссівської форми з нанесеною дрібномасштабною шорсткістю (рис. 2б).

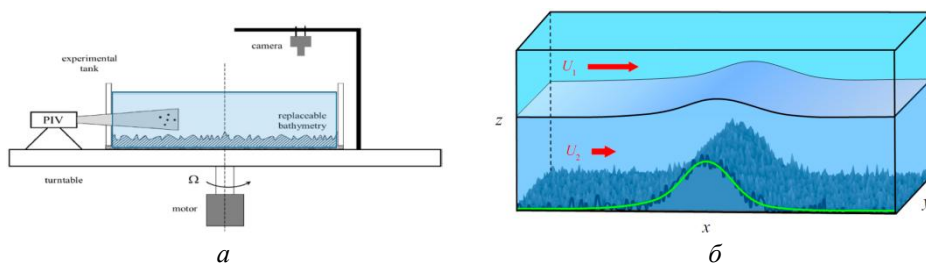


Рис. 2. Віртуальні лабораторні установки: а – обертовий резервуар (а); б – обтікання шорсткого підводного хребта.

Розрахунки, які було проведено обертовим резервуаром (рис. 2а), базувалися на розв'язку нелінійної моделі Нав'є-Стокса з метою перевірки теорії наждачного паперу та вироблення рекомендацій для майбутніх фізичних експериментів з вивчення взаємодії циркуляційних течій з дрібномасштабною та великомасштабною топографією океанічного дна. Основні положення та результати чисельного

модельовання опубліковані в роботі [9]. В проведених розрахункових дослідженнях з моделлю шорсткого підводного гребня (рис. 2б), де використовувалася більше універсальна модель циркуляції, було підтверджено прогнозовану тенденцію до особливо швидкого уповільнення неінтенсивних рухів нерівним рельєфом. Це дослідження надає переконливі докази на підтримку ефекту наждачного паперу та запропонованих схем параметризації.

2.2. Результати фізичного моделювання

Згідно до розробленої програми та методики проведення фізичного моделювання взаємодії стаціонарної течії в гідродинамічному каналі з фіксованою швидкістю потоку, що моделює осінньо-зимовий період обтікання течією Гольфстрім підводної гори Атлантіс II біля узбережжя штату Массачусетс (США), спочатку були проведені візуальні дослідження з використанням руху кольорових струмінців навколо шорсткої моделі підводної гори Атлантіс II. Потім в характерних місцях генерації, формування та еволюції вихрових структур, струменевих та хвильових течій були проведені інструментальні вимірювання гідродинамічних параметрів поля швидкості та тиску з використанням мініатюрних високочутливих датчиків.

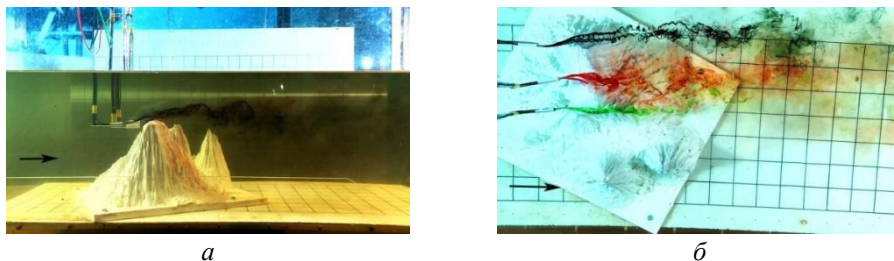


Рис. 3. Візуалізація моделі підводної гори Атлантіс II для координат подачі червоного барвника ($x=-0.05H$; $y=0$; $z=-0.05H$) для $U=0.1$ м/с: а - вид збоку (а); б – вид зверху

На рис. 3 представлено результати візуальних досліджень особливостей формування вихрових, струменевих і хвильових течій за допомогою струмінців підфарбованої різнокольорової водорозчинної рідини в околі шорсткої моделі підводної гори Атлантіс II в умовах, коли змодельована в гідродинамічному каналі течія Гольфстрім мала швидкість 0.1 м/с. Червоний барвник випускали по центру гребня гори на рівні 0.01 м нижче вершини гори, або $z=-0.05H$, де H – висота підводної гори Атлантіс II ($H=0.2$ м для досліджуваної моделі) і на відстані 0.01 м від фронтальної поверхні моделі підводної гори, $x=-0.05H$, зелений барвник випускали на краю гребня гори на відстані 0.055 м від центра гори ближче до ущелини між горами (край гребня $y=0.28H$), чорний барвник – з протилежного краю гори на відстані $y=-0.28H$.

Результати візуальних досліджень (рис. 3а) показали, що перед вершиною моделі підводної гори Атлантіс II кольоровий барвник починав підніматися перед поверхнею гори на віддаленні $x=-0.25H$ і піднімався на відстань $z=0.1H$ над вершиною гори. При цьому кольоровий струмінець, інтенсивно коливаючись, згортався у видовжену спіралеподібну вихрову структуру, яка з плином часу набувала значних коливань, що приводило в кінці кінців до її розриву і втрати когерентності.

Результати візуальних досліджень з подальшим заглибленням подачі барвників представлені на рис. 4, де на рис. 4а червоний барвник подавався по центру гребня гори з координатами ($x=-0.05H$; $y=0$; $z=-0.35H$), зелений барвник – ($x=-0.05H$; $y=0.28H$; $z=-0.35H$) та чорний барвник – ($x=-0.05H$; $y=-0.28H$; $z=-0.35H$). На рис. 4б координати подачі червоного барвника ($x=-0.05H$; $y=0$; $z=-0.5H$), зеленого барвника – ($x=-0.05H$; $y=0.28H$; $z=-0.5H$) та чорного барвника – ($x=-0.05H$; $y=-0.28H$; $z=-0.5H$).

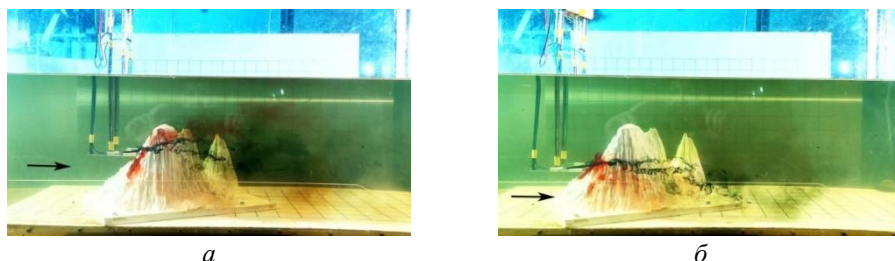


Рис. 4. Візуалізація моделі підводної гори Атлантіс II для координат подачі червоного барвника: а – $x=-0.05H$; $y=0$; $z=-0.35H$; б – $x=-0.05H$; $y=0$; $z=-0.5H$.

Результати візуальних досліджень (рис. 4а) показали, що кольорові струмінці, які використано для візуалізації течії, не досягали вершини моделі підводної гори Атлантіс II, а огинали модель гори (червоний та чорний барвник з однієї сторони верхньої частини гори). На рис. 4б всі струмінці кольорових барвників для швидкості течії 0.1 м/с не підіймалися до вершини гори, а переміщалися вниз від джерела подачі барвників до донної поверхні досліджуваної моделі та огинали модель підводної гори з її боків, знижуючись до підшови гори.

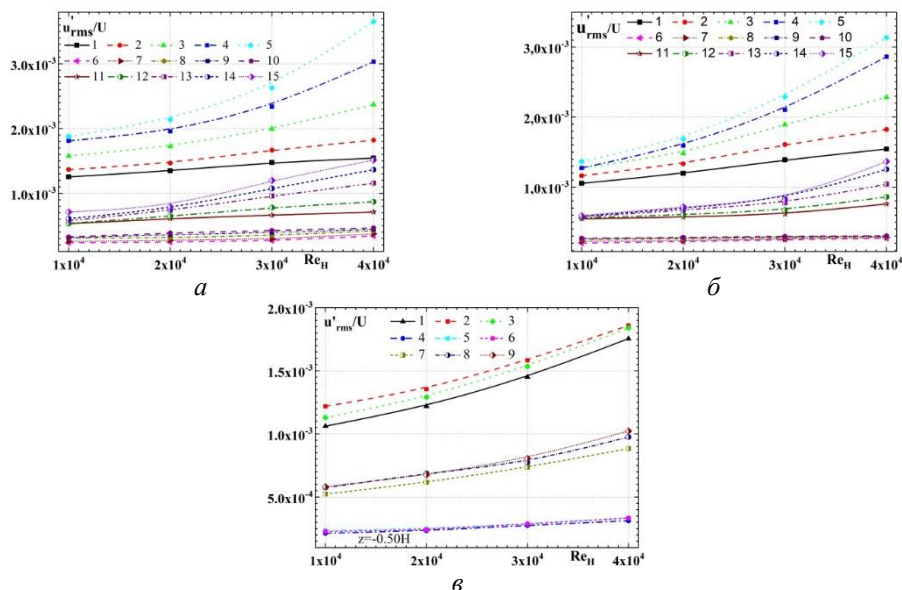


Рис. 5. Нормовані середньоквадратичні значення пульсацій поздовжньої швидкості у сліді шорсткої моделі підводної гори Атлантіс II: а – для вертикальної координати $z=-0.20H$; б – для $z=-0.35H$ (б) та в – для $z=-0.50H$ (в).

Результати вимірювання нормованих середньоквадратичних значень пульсацій поздовжньої швидкості у сліді шорсткої моделі підводної гори Атлантіс II в залежності від числа Рейнольдса, розташування датчиків швидкості, відстані до кормової поверхні підводної гори та для заглиблення датчиків від вершини гори $z=-0.20H$, $z=-0.35H$ та $z=-0.50H$ представлені на рис. 5. Число Рейнольдса було розраховано за залежністю $Re_H = UH / \nu$, де U – швидкість течії, H – висота моделі підводної гори і ν – кінематичний коефіцієнт в'язкості води, а нормовані середньоквадратичні значення пульсацій поздовжньої швидкості у вигляді u'_{rms} / U .

Тут номери кривих і умови дослідження на рис. 5а та на рис. 5б наступні: крива 1 отримана для поздовжньої координати розташування датчиків $x=0.20H$, крива 2 – $x=0.30H$, крива 3 – $x=0.55H$, крива 4 – $x=0.80H$, крива 5 – $x=1.05H$ (криві 1-5 отримані для вертикальної координати $y=-0.25H$), крива 6 – $x=0.2H$, крива 7 – $x=0.30H$, крива 8 – $x=0.55H$, крива 9 – $x=0.80H$, крива 10 – $x=1.05H$ (криві 6-10 отримані для $y=0$), крива 11 – $x=0.2H$, крива 12 – $x=0.30H$, крива 13 – $x=0.55H$, крива 14 – $x=0.80H$, та крива 15 – $x=1.05H$ (криві 11-15 отримані для $y=0.25H$). Номери кривих і умови дослідження на рис. 5в наступні: крива 1 отримана для координати розташування датчиків $x=0.55H$, крива 2 – $x=0.80H$, крива 3 – $x=1.05H$, крива 4 – $x=0.55H$, крива 5 – $x=0.80H$, крива 6 – $x=1.05H$, крива 7 – $x=0.55H$, крива 8 – $x=0.80H$ та крива 9 – $x=1.05H$ (криві 1-3 виміряні для $y=-0.25H$, криві 4-6 – $y=0$ та криві 7-9 – $y=0.25H$). Рис. 5а ілюструє результати вимірювання для заглиблення датчиків від вершини гори $z=-0.20H$. На рис. 5б приведені результати вимірювання для вертикальної координати $z=-0.35H$, а на рис. 5в – для $z=-0.50H$.

2.3. Результати натурних досліджень

Передова інтерферометрична радіолокаційна технологія разом з традиційною альтиметрією використовувалася в системі SWOT, що дозволило отримати детальні дані про глобальну протяжність та висоту океанічних поверхневих вод. Як показали результати досліджень [10], для океанології система SWOT вимірює висоту океанічної поверхні з реєстрацією її циркуляції, вихори та течії у субмезомасштабних масштабах, що актуально для розробки моделей взаємодії атмосфери з океаном та кліматичним прогнозам. Подальше розширення використання SWOT-даних забезпечить вдосконалення та точність гідрологічних, гідродинамічних та океанографічних моделей з безпрецедентною просторовою роздільною здатністю, що надає детальну інформацію про протяжність поверхневих вод, річковий стік та циркуляцію океану.

Висновки

Приведено результати чисельного та фізичного моделювання, а також натурні особливості взаємодії великомасштабної та дрібномасштабної придонної топографії на мезомасштабні океанічні течії. Показано, що не тільки дрібномасштабна шорсткість динамічно важлива для великомасштабних течій, але й параметризація за допомогою методів теорії наждачного паперу надає якісну, фізично мотивовану параметризацію ефекту шорсткості, яка враховує важливу взаємодію з мезомасштабними течіями, що забезпечує достатньо точне прогнозування впливу придонної шорсткості на великомасштабні течії.

Результати візуальних досліджень показали, що змодельована в лабораторних умовах течія Гольфстрім, мала характерні особливості, які обумовлені глибиною її взаємодії з підводною горою. Так, на глибині, що не перевищувала третю частину висоти гори, змодельована течія підіймалася вздовж фронтальної поверхні шорсткої моделі підводної гори до її вершини, а далі в сліді верхньої частини гори формувалися вихрові, струменеві та хвильові течії. Установлено, що на глибині 0.35 висоти гори змодельована течія в поздовжньому осьовому перетині моделі підводної гори роздвоювалася. Під час проведення візуалізації на рівні половини висоти гори було зареєстровано, що кольорові струмінці не піднімалися до верхньої частини гори, а обтікаючи її з боків направлялися до її придонної частини.

Визначено, що найвищі рівні нормованих середньоквадратичних значень пульсацій поздовжньої швидкості у сліді шорсткої моделі підводної гори Атлантик II спостерігалися в сліді бокової кормової поверхні бічної сторони підводної гори.

1. M. McKinley, D. Sun, M. Kelly, et al., Deep mesoscale and submesoscale circulations around the Atlantis II seamount, *J. Geophys. Res.: Oceans.*, **129**, e2024JC021233 (2024). <https://doi.org/10.1029/2024JC021233>
2. T. Radko, The sandpaper theory of flow–topography interaction for homogeneous shallow-water systems, *J. Fluid Mech.*, **977**, A9 (2023). <https://doi.org/10.1017/jfm.2023.945>
3. T. Radko, The sandpaper theory of flow–topography interaction for multilayer shallow-water systems, *J. Fluid Mech.*, **988**, A52 (2024). <https://doi.org/10.1017/jfm.2024.470>
4. V. Voskoboinick, A. Onyshchenko, O. Voskoboinyk, et al., Junction flow about cylindrical group on rigid flat surface, *Heliyon*, e12595 (2022). <http://dx.doi.org/10.1016/j.heliyon.2022.e12595>
5. V. Voskoboinick, N. Kornev, J. Turnow, Study of near wall coherent flow structures on dimpled surfaces using unsteady pressure measurements, *Flow Turbulence Combust.*, **90**(4), 709–722 (2013). <https://doi.org/10.1007/s10494-012-9433-9>
6. V. A. Voskoboinick, A. A. Voskoboinick, V. N. Turick, A. V. Voskoboinick, Space and time characteristics of the velocity and pressure fields of the fluid flow inside a hemispherical dimple generator of vortices, *J. Eng. Physics Thermophysics.*, **93**(5), 1205–1220 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10891-020-02223-3>
7. G. Jacobs, J. D’Addezio, B. Bartels, et al., Adapting constrained scales to observation resolution in ocean forecasts, *Ocean Modelling.* **186**, 102252 (2023). <https://doi.org/10.1016/j.ocemod.2023.102252>
8. G. A. Jacobs, R. W. Helber, J. M. Toole, et al., North Atlantic upper ocean sound channel variations, *J. Acoust. Soc. Am.*, **157**(6), 4573–4587 (2025). <https://doi.org/10.1121/10.0036944>
9. L. T. Gulliver, and T. Radko, Virtual laboratory experiments on the interaction of a vortex with small-scale topography, *Phys. Fluids.*, **35**, 021703 (2023). <https://doi.org/10.1063/5.0136723>
10. M. Srinivasan, V. Tsontos, M. Bonnema, et al., Launching into societal benefits from the Surface Water and Ocean Topography (SWOT) mission, *Water Resources Research*, **61**, e2024WR038436 (2025). <https://doi.org/10.1029/2024WR038436>

Аналіз ефективності різних систем демпфування поздовжніх коливань рідинних ракет-носіїв

С. І. Долгополов, Н. В. Хоряк¹

Інститут технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, Дніпро, Україна

¹ khoryak@i.ua

На основі математичного моделювання поздовжніх коливань рідинної ракети-носія (РН) середнього класу досліджено ефективність найбільш використовуваних та надійних засобів усунення поздовжньої нестійкості – газорідного демпфера (ГД) та газорідного демпфера з сильфонним розділенням середовищ (ГДС). Розглянуто три місця їх розташування в системі подачі окислювача: біля колектора за розгалуженням магістралі (локація 1); на вході в бустерний насос (локація 2); між бустерним і основним насосом (локація 3). Показано, що в локації 1 газовий демпфер ГД є на 14% ефективнішим за ГДС. Ефективність ГДС при встановленні його в локації 2 є на 33% більшою, ніж при встановленні в локації 1. Для ГД ця різниця становила 25%. Визначено, що найкращим варіантом є встановлення демпферів в локації 3: навіть при малому об'ємі газової порожнини (0,2 л) демпфери забезпечували поздовжню стійкість розглянутої РН з достатнім запасом.

Ключові слова: рідинна ракета-носіїв, рідинна ракетний двигун, динамічні процеси, поздовжні коливання, поздовжня стійкість, системи демпфування, критерій Найквіста.

Вступ. При створенні рідинних ракет-носіїв (РН) середнього, важкого та надважкого класу виникає проблема забезпечення їх поздовжньої стійкості на ділянці активного польоту. Різке зростання амплітуд поздовжніх коливань (розтягування – стиск) пружного корпусу РН і режимних параметрів рідинної ракетної двигунної установки (РРДУ), яке відбувається при втраті поздовжньої стійкості РН, здатне призвести до пошкодження корисного вантажу, порушення нормальної роботи РРДУ і системи управління, руйнування елементів конструкції та ін. Це явище (явище POGO [1, 2]) має автоколивальну природу. Воно виникає при певних умовах в результаті взаємодії пружних поздовжніх коливань корпусу РН і низькочастотних (до 50 Гц) процесів в маршовій РРДУ.

Корпус РН вкупі з живильними магістралями і маршовими рідинними ракетними двигунами (РРД) утворює автоколивальний контур «РРДУ – корпус РН» зі зворотним зв'язком по тязі. Джерелом енергії, здатним створювати та підтримувати автоколивання, є двигун. Під дією збурень, що надходять від двигуна, виникають поздовжні коливання корпусу РН. Вони спричиняють коливання рідкого палива в живильних магістралях і врешті-врешт – коливання тяги (рис. 1). При певних фазових співвідношеннях між коливаннями тяги і корпусу РН амплітуди коливань збільшуються. Якщо коефіцієнти підсилення, що зв'язують ці коливання, є досить великими, виникає POGO. Сприятливі умови для його виникнення створюються в області резонансної взаємодії корпусу РН і РРДУ, і насамперед, при зближенні нижчих власних частот поздовжніх коливань корпусу РН і рідини в живильних магістралях [1]. У потужних рідинних РН діапазони значень цих частот на одному або декількох

інтервалах часу польоту перетинаються, отже внутрішній резонанс є для них характерним явищем.

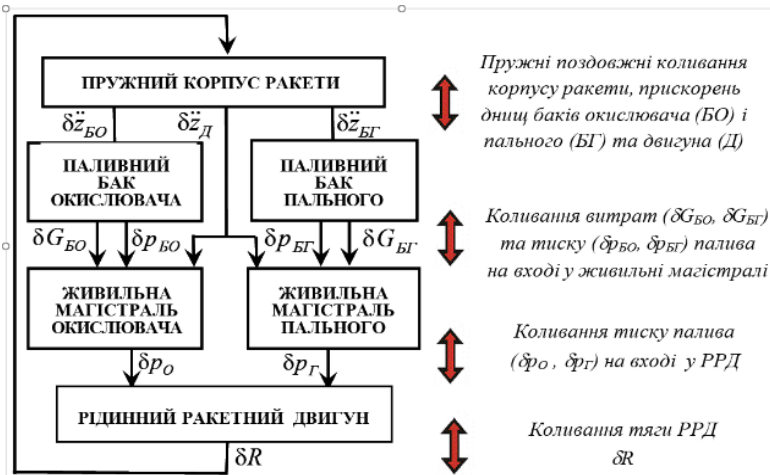


Рис 1. Структурна схема динамічної взаємодії корпусу рідинної РН та її маршової РРДУ при поздовжніх коливаннях ракети

Таким чином, явище ПОГО є специфічною особливістю, притаманною рідинним РН, тому при створенні нових РН ще на етапі ескізного проектування проводиться аналіз їх поздовжньої стійкості, а у разі нестійкості розробляються певні заходи для її усунення [3]. Вони спрямовані на зменшення коефіцієнтів підсилення ланок динамічної системи «РРД – живильні магістралі – корпус РН», що призведе до зменшення амплітуд поздовжніх коливань РН і сприятиме усуненню або пригніченню ПОГО. Є два шляхи досягнення цієї цілі. Перший передбачає усунення внутрішнього резонансу в системі (тобто ізоляцію критичних власних частот поздовжніх коливань корпусу РН від частот коливальних процесів в РРДУ), другий полягає у збільшенні демпфування взаємодіючих ланок системи. Одним із дієвих засобів усунення ПОГО є встановлення демпферів поздовжніх коливань [3, 4].

Метою даної роботи є дослідження ефективності найчастіше застосовуваних систем демпфування поздовжніх коливань, виконане для сучасної триступеневої рідинної РН середнього класу, в якій маршові РРД виконані за схемою з допалюванням генераторного газу і мають турбонасосну систему подачі палива.

2. Обрання типу системи демпфування ПОГО. На теперішній час існує багато засобів усунення або пом'якшення ПОГО, які мають різні принципи роботи і різні статуси: проєктний статус (демпер існує на папері або в CAD-моделі, зроблено розрахунок і концептуальне проектування); лабораторний статус (демпер виготовлений і протестований на лабораторних стендах, проведено базові функціональні випробування); стендовий статус (демпер пройшов випробування в реальних або напівреальних умовах, наприклад, на двигуні, або масштабних стендових контурах системи подачі палива, і є дані про його ефективність); льотний статус (демпер використано в реальному польоті, і доведено, що він справді працює); невикористаний статус (демпер не пройшов випробування). Обрати з усього

різноманіття існуючих демпферів засіб, який буде найкращим для конкретної РН за різними вимогам проєктувальника (надійність, ефективність, габарити, умови роботи, вартість, складність встановлення тощо) є доволі складною задачею.

Останні роки велика увага приділяється активним системам демпфування POGO, і цей напрямок вважається дуже перспективним. Але на теперішній час активні POGO-демпфери в чистому вигляді на практиці не використовуються. Перевагу віддають надійним пасивним засобам через їх простоту, надійність і відсутність ризику додаткових складних елементів у критичній системі. Це пояснюється недостатнім на цей час ступенем «зрілості» активних розробок, високим ризиком збою, відмов або помилок програмного забезпечення активних систем, а також необхідністю їх сертифікації, яка є вельми складною. І головне – правильно обрані пасивні системи вирішують переважну більшість проблем.

Вибір пасивних систем демпфування засновується на таких цілком зрозумілих принципах. Якщо критичну гідравлічну частоту можна «витіснити» зміною довжини або діаметра паливної магістралі – це найпростіше і надійне рішення. В разі, коли зміни геометрії недостатньо, обирають пасивний демпфер певного типу. У випадку пілотованої місії пріоритет мають перевірені пасивні рішення з багаторічним наявним досвідом попереднього застосування.

Пасивні демпфери ефективно працюють в обмеженому частотному діапазоні. Вони змінюють імпеданс лінії подачі палива, вводять додаткові піддатливості, інерційність та гідравлічний опір, який поглинає енергію та створює фазовий зсув між тиском і витратою. Таким чином, вони змінюють критичну частоту коливань рідини в живильній магістралі і зменшують інтенсивність зворотного зв'язку в системі «РРДУ – корпус РН».

У середніх двоступеневих рідинних ракет з турбонасосною системою подачі палива ризик виникнення POGO є великим, але у більшості випадків для усунення поздовжньої нестійкості достатньо використання пасивних акумуляторів (газових або гідравлічних демперів) і оптимізації геометрії системи живлення. У важких великих ракет ризик виникнення і розвитку POGO до неприпустимого рівня є максимальним, в низькочастотному діапазоні можуть знаходитися декілька власних частот поздовжніх коливань корпусу РН, а на активній частині польоту РН – декілька областей внутрішнього резонансу і POGO-нестійкості. Для забезпечення поздовжньої стійкості таких ракет може знадобитися багаторівнева пасивна система демпфування з використанням декількох засобів.

Оскільки в цій роботі акцент робиться на використанні пасивних методів демпфування, відзначимо пасивні демпфери POGO, які мають найбільший успіх і досвід практичного використання.

До найкраще вивченому і перевіреному типу демпферів POGO належить газорідинний демпфер. В деяких моделях газорідинного демпфера – моделях мембранної конструкції – є гнучка мембрана, яка розділяє рідину і газ та компенсує зміну об'єму без контакту газу з паливом. Газорідинний демпфер є класичним стандартом POGO-захисту. Він працює як пружний елемент з демпфуванням. Його основний ефект полягає у зниженні жорсткості гідросистеми, зміні її критичної власної частоти коливань та невеликого додаткового демпфування. Таким чином, він здатний усунути резонансні явища і в деякій мірі прискорити згасання коливань рідкого палива в гідросистемі. Цей демпфер зазвичай має вузькосмугову дію і

потребує правильного "налаштування" на критичну частоту. Частотне налаштування газорідинного демпфера залежить від об'єму газу, тиску в газовій порожнині демпфера та показника політропи газу ($n \approx 1...1.4$). При правильному налаштуванні він має високу ефективність. Добре масштабується; може комбінуватися з дроселем.

Варто відзначити також дросельний демпфер. Він здатний гасити коливання у широкому діапазоні частот, може працювати в умовах дуже високих температур та тиску, є надзвичайно надійним і має низьку вартість. Але його демпфуючий ефект слабкий (він забезпечується дисипацією енергії через гідравлічний опір на дроселі), а підвищені втрати тиску призводять до зниження коефіцієнта корисної дії. Цей демпфер використовується практично у всіх ракетних двигунах, часто – як допоміжний елемент. Використовується також при створенні гібридних демпферів.

В даній роботі буде розглянуто застосування газорідинного демпфера і газорідинного демпфера з сифонним роздленням середовищ.

На рисунку 2 наведено схему кільцевого газового демпфера. Основним його елементом є газова камера, яка розміщена по кільцю між внутрішньою та зовнішньою стінками корпусу. Вона заповнюється стислим газом (найчастіше гелієм), який забезпечує ефект пружини і поглинає імпульси тиску. Основний потік рідини проходить через центральний внутрішній канал, і коливання тиску в цьому каналі передаються на газове кільце. Встановлений у штуцері дроселюючий елемент у центральному каналі обмежує швидкість рідини при вході чи виході з демпфера і забезпечує демпфуючий (резистивний) ефект. Демпфер має клапани для заправки газу в кільцеву камеру, опорні та напрямні елементи, які утримують мембрану і внутрішні стінки від деформацій, та ущільнення для герметизації стиків.

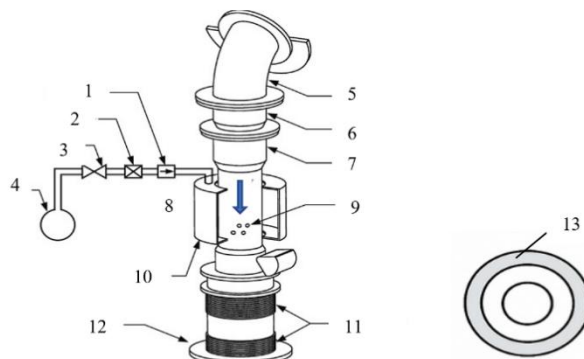


Рис. 2. Схема кільцевого газового демпфера

- 1 – зворотний клапан; 2 – регулятор; 3 – електромагнітний клапан; 4 – балон із гелієм;
 5 – коліно; 6 – передклапан; 7 – роз'ємне з'єднання; 8 – рівень рідини;
 9 – отвори у живильній магістралі до акумулятора; 10 – акумулятор с гелієвим газом;
 11 – сифони; 12 – з'єднання з насосом двигуна;
 13 – вигляд кільцевої газової камери у горизонтальному розрізі

Принцип роботи кільцевого газового демпфера є таким. Коли в центральному каналі виникають коливання тиску рідини, збурення передаються на газову камеру. Газ у кільцевому об'ємі стискається (пружний компонент), коливання поглинають

енергію. Дросель, який обмежує швидкість потоку, створює додаткове демпфування (резистивний компонент), і амплітуда коливань рідини у трубопроводі зменшується. І головне – встановлення у трубопроводі додаткової пружності у вигляді демпфера змінює власні частоти коливань рідини. При правильному визначенні параметрів демпфера це дозволяє ізолювати критичні частоти коливань рідкого палива в живильній магістралі від частот поздовжніх коливань корпусу РН і запобігти внутрішньому резонансу в системі «РРДУ – корпус РН».

Математична модель. Рішення про необхідність встановлення демпфера поздовжніх коливань приймається на основі результатів математичного моделювання динамічної взаємодії корпусу РН і РРДУ та аналізу стійкості замкненої динамічної системи «РРДУ – корпус РН». До складу цієї системи входять математична модель вимушених поздовжніх коливань корпусу РН при дії збурень з боку РРДУ і математична модель низькочастотних процесів в РРДУ при дії збурень з боку корпусу РН. Ефективність РОГО-демпфера визначаються за результатами аналізу стійкості відповідної динамічної системи «РРДУ з демпфером – корпус РН».

Аналіз поздовжньої стійкості РН виконувався в цій роботі на основі лінійної математичної моделі замкненої динамічної системи «РРДУ – корпус РН».

Корпус РН розглядався як дисипативна коливальна система «конструкція РН – паливо в баках» [5]. При розробці моделі поздовжніх коливань корпусу РН його конструкцію було схематизовано пружним тонкостінним стрижнем змінного перерізу з вільними кінцями. Осцилятори, розташовані на поздовжній осі стрижня, імітували поздовжні коливання двигуна і рідини в паливних баках при поздовжніх коливаннях конструкції [6]. Вимушені поздовжні коливання корпусу РН при дії збурень з боку РРДУ описувались як механічні коливання багатовимірної системи із в'язким тертям неоднорідним матричним рівнянням

$$M_K \delta \ddot{X}(t) + B_K \delta \dot{X}(t) + C_K \delta X(t) = F_C \delta Y(t), \quad (1)$$

де δX – вектор поздовжніх відхилень координат елементів системи від положення статичної рівноваги; M_K , B_K , C_K – матриці мас, коефіцієнтів демпфування і жорсткості; δY – вектор збурень (відхилень параметрів РРДУ від номінальних значень); F_C – матриця коефіцієнтів при збуреннях; t – час польоту.

В динамічній системі «РРДУ – корпус РН» використовувалась усічена модель вимушених поздовжніх коливань корпусу РН [1, 4], в якій було ураховано лише чотири нижчі тони його поздовжніх коливань, описаних рівняннями в узагальнених нормальних координатах. Параметри нижчих тонів коливань корпусу визначались на основі розрахунку коренів характеристичного рівняння системи (1) при $\delta Y = 0$.

Математична модель динаміки живильних магістралей маршових РРД містила рівняння неусталеного руху рідини, нерозривності і стану. Моделювання виконувалось із застосуванням імпедансного методу.

При розробці математичної моделі низькочастотної динаміки РРД особа увага приділялася урахуванню кавітації в насосах окислювача і пального. Воно виконувалось на основі гідродинамічної моделі [7] з використанням напівемпіричних коефіцієнтів з роботи [8]. Згідно з існуючою феноменологічною моделлю низькочастотної динаміки газових трактів РРД [9] робочі процеси в газових трактах двигунів – камері згоряння (КЗ), газогенераторі (ГГ) і газоводі (ГВ) – описувались

диференційними рівняннями з запізнюваннями. В рівняннях динаміки КЗ і ГГ ураховувались передбачені феноменологічною моделлю затримки газоутворення та час перебування продуктів згоряння в у вогневих порожнинах, в рівняннях динаміки газопроводу – час перебування продуктів згоряння в газовому тракті [10].

Результати моделювання. Стійкість системи «РРДУ – корпус РН» визначалась за критерієм Найквіста. Його використання потребує розрахунку частотної характеристики розімкненої системи $W_{pc}(j\omega)$, а отже, частотних характеристик корпусу РН і РРДУ, і зокрема, комплексних коефіцієнтів підсилення живильних магістралей та маршових РРД по тиску [4]. Для порівняльного аналізу ефективності різних систем демпфування поздовжніх коливань застосовувався модуль частотної характеристики розімкненої системи «РРДУ – корпус РН» без демпферів поздовжніх коливань і з різними демпферами – $\text{mod } W_{pc}(j\omega)$.

Результати математичного моделювання показали, що при зближенні частоти І-го тону поздовжніх коливань корпусу РН з першою частотою коливань рідини в живильній магістралі окислювача розглянута РН без демпферів втрачає поздовжню стійкість і залишається нестійкою в інтервалі часу польоту від $t \approx 10 \text{ с}$ до $t \approx 50 \text{ с}$.

Досліджено можливість забезпечення поздовжньої стійкості цієї РН шляхом встановлення газорідинних демпферів або газорідинних демпферів з сифонним розділом середовищ в систему живлення двигуна окислювачем. Розглянуто штатний варіант – встановлення демпферів заданого об'єму біля колектора за розгалуженням живильної магістралі окислювача. Показано, що в цій локації газорідинний демпфер ефективніше за сифонний на 14%.

Проаналізовано й інші варіанти – зі зміною локацій демпферів, а також зі зменшенням об'ємів газової порожнини демпферів. Обрано три локації демпферів: біля колектора за розгалуженням живильної магістралі окислювача; на вході в бустерні насоси окислювача (БНО); в двигуні між бустерними і основними насосами окислювача (НО). Показано, що встановлення штатних демпферів у будь-якій із зазначених локацій дозволяє усунути поздовжню нестійкість тестової РН. При цьому визначено, що ефективність демпфера з сифонним розділенням середовищ в разі його встановлення на вході в БНО збільшується на 33%, ніж в разі його встановлення біля колектора. Для газорідинного демпфера ця різниця становить 25%.

Найбільш ефективним варіантом виявилось встановлення демпфера поздовжніх коливань між БНО та НО. Результати розрахунків передатної функції розімкненої системи «РРДУ – корпус РН» показали, що газорідинний демпфер, встановлений між БНО та НО, навіть за умови малого об'єму газової порожнини (вдвічі, вдесятеро і навіть в 20 разів меншого, ніж об'єм газової порожнини в штатному демпфері) забезпечує поздовжню стійкість розглянутої РН із достатнім запасом.

На рис. 3 показано криві Найквіста – годографи амплітудно-фазової частотної характеристики (АФЧХ) розімкненої системи «РРДУ без демпферів – корпус РН» (рис. 3, а)) та розімкненої системи «РРДУ з демпферами – корпус РН» зі штатними демпферами, встановленими на вході в БНО (рис. 3, б)) та між БНО та НО (рис. 3, в)). Кожний рисунок містить декілька кривих, які представляють результати розрахунку АФЧХ відповідних систем в різні моменти часу польоту. Останні два рисунки ілюструють ефективність штатного газового демпфера при його встановленні в різних локаціях.

На рисунку рис. 3, а) годографи Найквіста, що відповідають моментам часу польоту $t = 10 \text{ с}, 30 \text{ с}, 50 \text{ с}$, охоплюють точку з координатами $(1, 0)$, яка належить дійсній осі. Це свідчить про нестійкість динамічної системи «РРДУ без демпферів – корпус РН» на визначеному інтервалі часу польоту.

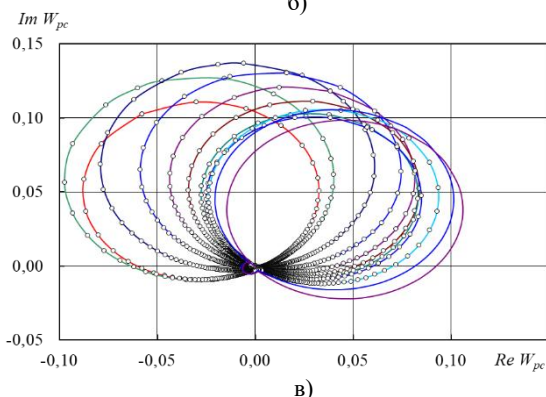
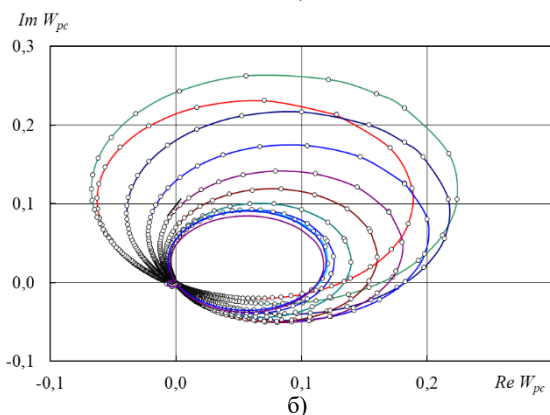
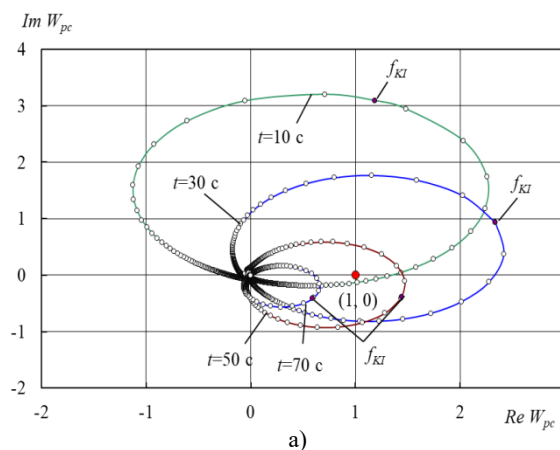


Рис. 3. Годографи частотної характеристики розімкненої системи «РРДУ– корпус РН» без демпферів (а) та зі штатними демпферами поздовжніх коливань, встановленими на вході в БНО (б) і між БНО та НО (в)

корпус РН» на визначеному інтервалі часу польоту.

Встановлення газорідинних демпферів усуває поздовжню нестійкість РН, при цьому встановлення демпфера між бустерним і основним насосом окислювача (рис. 3, в)) збільшує запас стійкості системи вдвічі в порівнянні з варіантом встановлення демпфера на вході в бустерний насос окислювача (рис. 3, б)).

Висновки. На основі математичного моделювання поздовжніх коливань сучасної триступеневої рідинної РН середнього класу, маршові двигуни якої виконані за схемою із допалюванням генераторного газу і мають турбонасосну систему подачі палива, спрогнозовано втрату поздовжньої стійкості цієї ракети, виявлено причину її поздовжньої нестійкості і визначено варіанти обрання засобів усунення ПОГО. Проаналізовано ефективність пасивних ПОГО-демпферів двох типів – газорідинного (газового) демпфера і газорідинного демпфера з сильфонним розділенням середовищ. Показано, що використання таких демпферів при правильному визначенні їх параметрів, яке налаштовує демпфер на критичну частоту коливань, дозволяє повністю усунути поздовжню нестійкість цієї РН. Розглянуто три локації встановлення демпферів в системі живлення

окислювачем – біля колектора за розгалуженням живильної магістралі окислювача; на вході в бустерний насос окислювача; між бустерним і основним насосом окислювача. Наочно продемонстровано, що місце розташування POGO-демпфера належить до ключових факторів, які впливають на ефективність гасіння поздовжніх коливань. Показано, що встановлення газового демпфера в двигуні між бустерним і основним насосом є найкращим варіантом, який дозволяє забезпечити найбільшу ефективність демпфування POGO навіть при малому об'ємі газової порожнини демпфера.

1. М. С. Натанзон. Продольные автоколебания жидкостной ракеты. М.: Машиностроение, 1977. 208 с. .
2. S. Rubin. Longitudinal Instability of Liquid Rockets Due to Propulsion Feedback (POGO). *J. Spacecraft and Rockets*. Vol. 3, No. 8 (1966), 1188-1195. <https://doi.org/10.2514/3.28626>
3. Б. И. Рабинович. Неустойчивость жидкостных ракет и космических аппаратов и некоторые фрагменты борьбы с ней. – М. : ИКИ РАН, 2006. – 40 с. (Препринт / Российская академия наук; Ин-т космических исследований; Н/8977/Пр-2123)
4. O.V. Pylypenko., M.A. Degtyarev, O.D. Nikolayev, D.V. Klimentko, S.I. Dolgoplov, N.V. Khorjak, I.D. Bashliy, L.A. Silkin. Providing of POGO stability of the Cyclone-4M launch vehicle. *Космічна наука і технологія*. 2020. 26, № 4 (125). С. 3–20. <https://doi.org/10.15407/knit2020.04.003>
5. Н. В. Хоряк, А. Д. Николаев, С. И. Долгополов. Теоретическая оценка эффективности динамического гасителя продольных колебаний жидкостной ракеты-носителя *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2015. – №. 9/126. – С. 26–32. http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2015_9_6
6. К. С. Колесников. Динамика ракет. М. : Машиностроение, 1980. 376 с.
7. В. В. Пилипенко, В.А. Задонцев, М.С. Натанзон. Кавитационные колебания и динамика гидросистем. М.: Машиностроение. 1977. 352 с.
8. S. I. Dolgoplov. Generalization of Experimental Elasticity of Cavitation Bubbles in LRE Pumps that Differ Significantly in Size and Performance. *Sci. innov.*, 19(5), 71–88. (2023). <https://doi.org/10.15407/scine19.05.071>
9. Шевяков А. А., Калнин В. М., Науменкова М. В., Дятлов В. Г. Теория автоматического управления ракетными двигателями. М.: Машиностроение, 1978. 288 с.
10. О.В. Пилипенко, Н.В. Хоряк, С.И. Долгополов, А.Д. Николаев. Особенности математического моделирования динамики газовых трактов в задаче об устойчивости низкочастотных процессов в жидкостных ракетных двигателях *Техн. механика*. 2017. № 3. С. 30–44. <https://doi.org/10.15407/itm2017.03.030>

Розсіювання енергії у фрикційному демпфері з розімкнутою рівномічною оболонкою

А. Величкович^{а1}, І. Шацький^б, В. Шопя^б

^аІвано-Франківський національний технічний університет нафти і газу, Івано-Франківськ, Україна

^бІнститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів, Україна

¹ a_velychkovych@ukr.net

Об'єктом дослідження є фрикційний демпфер, основним елементом якого є розімкнута циліндрична оболонка зі змінною за азимутотом товщиною стінки, оптимізованою за критерієм рівномірності. Усередині оболонки розміщено слабостисливий заповнювач, що утворює з нею активну контактну пару. Метою роботи є аналітичне дослідження впливу раціонального розподілу матеріалу в оболонці на дисипацію енергії в оболонковому демпфері за немонотонного навантаження. На основі одновимірної моделі отримано аналітичні залежності для побудови діаграми циклічного деформування, а також вирази для визначення енергії, що розсіюється за один цикл навантаження. Проведено порівняння поведінки двох варіантів демпфера: з розімкнутою оболонкою сталої товщини та з розімкнутою рівномірною оболонкою. Перехід до рівномірної оболонки істотно підвищує податливість системи і водночас впливає на форму та площу петлі гістерезису.

Ключові слова: рівномірна оболонка, заповнювач, сухе тертя, конструкційний гістерезис, одновимірна модель.

Вступ

Для більшості інженерних об'єктів ефективний віброзахист є однією з необхідних умов надійної, довготривалої та безпечної експлуатації. Особливої ваги ця проблема набуває для машин, технологічного обладнання і конструкцій, що працюють в умовах повторно-змінних, ударних, немонотонних або позаштатних динамічних навантажень [1, 2]. У таких системах демпфувальні пристрої повинні мати достатню утримувальну здатність і податливість за помірної матеріаломісткості та водночас забезпечувати інтенсивне розсіювання енергії динамічних впливів [3].

Фрикційні демпфери посідають особливе місце серед засобів віброзахисту, оскільки поєднують конструктивну простоту, компактність і високу дисипативну здатність [4, 5]. На відміну від в'язкопружних, гідравлічних, магнітореологічних або складних інерційних пристроїв демпфери сухого тертя не потребують розвинених систем керування чи обслуговування і зберігають працездатність у широкому діапазоні навантажень [6, 7]. Тому їх часто застосовують у відповідальних вузлах машинобудівних конструкцій, авіаційної техніки, транспортних систем, будівельних споруд і серійних віброзахисних пристроїв [8–10].

У попередніх роботах авторів розроблено оригінальні конструкції віброізоляторів, серед яких чільне місце належить демпферам на основі розімкнутої оболонки з деформівним заповнювачем [11]. Розріз циліндричної оболонки вздовж твірної істотно змінює її деформаційні властивості. Унаслідок цього система набуває властивостей компактного пружно-демпфувального модуля, у якому податливість

визначається переважно згинною деформацією розімкнутої оболонки, а розсіювання енергії – фрикційною взаємодією заповнювача з оболонкою. У цьому напрямі вже розв'язано низку взаємопов'язаних задач, зокрема визначено міцність і жорсткість оболонкових пружин, описано конструкційне демпфування оболонкових систем із заповнювачем [11, 12].

У нещодавньому дослідженні оболонкового пружного елемента [13] було побудовано профіль рівномірної розімкнутої оболонки зі змінною за азимутом товщиною стінки. У роботі [14] для розімкнутої оболонки сталої товщини розроблено аналітичний опис конструкційного демпфування, зумовленого сухим тертям між оболонкою і деформівним заповнювачем під час циклічного навантаження. Однак ці два результати досі залишалися методично розділеними. Подальшим розвитком цих досліджень є визначення впливу раціонального розподілу матеріалу в розімкнутій оболонці на дисипативні властивості всієї фрикційної системи. Йдеться про встановлення ролі рівномірного профілювання навантаженої оболонки не лише як способу зменшення матеріаломісткості, а й як інструменту керування формою гістерезисної петлі та енергією, що розсіюється за цикл навантаження.

Метою цієї статті є аналітичне дослідження впливу раціонального розподілу матеріалу в оболонці на розсіювання енергії у фрикційному демпфері за немонотонного навантаження. Об'єктом розгляду є демпфер, що складається з розімкнутої циліндричної оболонки зі змінною за азимутом товщиною стінки та слабостисливого деформівного заповнювача, який утворює з оболонкою активну контактну пару. Профіль оболонки оптимізовано за критерієм рівномірності, а опис немонотонного деформування будується на основі квазістатичної одновимірної моделі з урахуванням тертя на поверхні контакту.

1. Об'єкт дослідження та його модель

Розглянемо пружний деформівний циліндр завдовжки $2a$ та радіуса R , який заповнює розрізану вздовж твірної оболонку (рис. 1). Товщина оболонки змінюється за азимутальною координатою ϑ відповідно до функції, визначеної за критерієм рівномірності робочої ланки [13]. Заповнювач стискається по торцях абсолютно жорсткими гладкими штовхачами, до яких прикладено немонотонне осьове навантаження Q . Контактна взаємодія заповнювача з оболонкою описується законом сухого тертя, що за немонотонного навантаження зумовлює розсіювання енергії на інтерфейсі.

Для опису деформування системи урахували її основну ознаку – жорсткість розрізаної оболонки в тангенційному напрямку є меншою, ніж уздовж твірної. Матеріал заповнювача вважали нестисливим. Розрізаній ізотропній оболонці, яка згинається в умовах неосесиметричного контактного навантаження, поставили у відповідність сильно ортотропну замкнуту циліндричну оболонку, яка перебуває під дією осесиметричного контактного навантаження. Модуль пружності та допустиме напруження для еквівалентної ортотропної оболонки вибрали такими, щоби вони в середньому ототожнювали властивості розрізаної оболонки та її суцільної моделі.

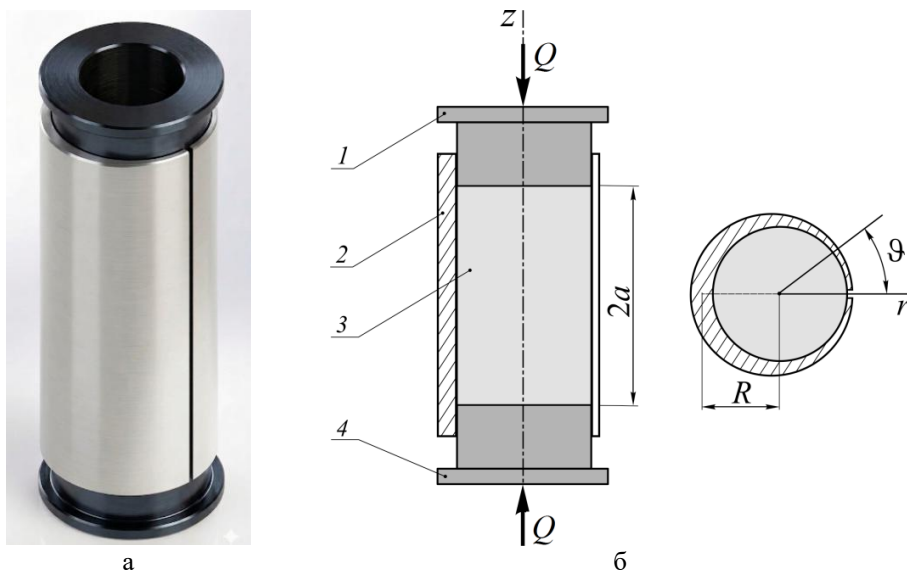


Рис. 1. Фрикційний демпфер з рівномірною оболонкою: а – загальний вигляд, б – розрахункова схема; 1, 4 – штовхачі, 3 – деформівний заповнювач, 4 – рівномірна оболонка.

Вихідними модельними співвідношеннями для нестисливого заповнювача є усереднені за площею поперечного перерізу рівняння рівноваги, нестисливості та закон Гука

$$\frac{d\sigma_z}{dz} + \frac{2\tau}{R} = 0, \quad \frac{du}{dz} + \frac{2w}{R} = 0, \quad \frac{du}{dz} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \sigma) = 0, \quad z \in (-a, a), \quad (1)$$

де σ_z , u – осьові напруження та переміщення заповнювача; σ і τ – нормальне та дотичне контактні напруження, w – радіальне переміщення на поверхні $r=R$; E – модуль Юнга матеріалу заповнювача.

На торцях заповнювача виконуються умови

$$\sigma_z(\pm a) = -Q/(\pi R^2), \quad u(0) = 0. \quad (2)$$

Для модельної ортотропної оболонки, описуючи її пружну рівновагу співвідношеннями безмоментної теорії, маємо

$$w_0 = -\frac{\sigma R^2}{E_e h}, \quad \frac{du_0}{dz} = 0, \quad z \in (-a, a), \quad (3)$$

де w_0 , u_0 – радіальне та осьове переміщення оболонки; $E_e = \pi h^2 E_0 / (96 R^2 (1 - \nu_0^2))$ – еквівалентна пружна стала; E_0 та ν_0 – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу розімкнутої рівномірної оболонки; h – товщина модельної ортотропної оболонки, прийнята рівною максимальному значенню функції $h(\theta)$ для рівномірної оболонки.

Фрикційну взаємодію оболонки і заповнювача описуємо законом сухого тертя Кулона:

$$w = w_0, \quad \sigma < 0; \quad \tau = f\sigma \operatorname{sgn} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial Q} \dot{Q}, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial Q} \neq 0; \quad |\tau| \leq -f\sigma, \quad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial Q} = 0, \quad (4)$$

де f – коефіцієнт тертя пари оболонка–заповнювач.

2. Результати та їх аналіз

У результаті розв'язку конструктивно нелінійної задачі (1)–(4) за методикою, розробленою в працях [11, 12, 14], для циклічного навантаження з коефіцієнтом асиметрії $s = Q_{\min} / Q_{\max} \in [0,1]$ отримали вирази переміщень поршня $\delta = \mp u(\pm a)$ на усіх етапах навантаження.

Отримані співвідношення подамо в компактній підсумковій формі:
для активного навантаження –

$$\delta^I = \frac{Q}{c} \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \quad 0 \leq Q \leq Q_{\max}; \quad (5)$$

для розвантаження –

$$\delta^{II} = \begin{cases} \delta_{\max}^I - \frac{1}{c\lambda} (\sqrt{Q_{\max}} - \sqrt{Q})^2, & Q_{\max} \geq Q \geq s^* Q_{\max}; \\ \frac{Q}{c} \frac{e^{\lambda} - 1}{\lambda}, & s^* Q_{\max} \geq Q \geq 0; \end{cases} \quad (6)$$

для повторного навантаження –

$$\delta^{III} = \begin{cases} \delta_{\min}^{II} + \frac{1}{c\lambda} (\sqrt{Q} - \sqrt{Q_{\min}})^2, & Q_{\min} \leq Q \leq \min\{Q_{\min}/s^*, Q_{\max}\}; \\ \delta^I, & \min\{Q_{\min}/s^*, Q_{\max}\} \leq Q \leq Q_{\max}, \end{cases} \quad (7)$$

де $\lambda = \frac{2fa}{R(1+2\varepsilon)}$, $\varepsilon = \frac{ER}{E_\epsilon h} = \frac{96}{\pi} \frac{R^3}{h^3} \frac{E}{E_0} (1 - \nu_0^2)$, $s^* = e^{-2\lambda}$ – характерне значення

коефіцієнта асиметрії циклу, $c = \frac{\pi R^2 E}{a} \frac{1+2\varepsilon}{2\varepsilon}$ – лінійна жорсткість консервативної системи.

Для ілюстрації отриманих результатів за приклад обрали систему з параметрами $a/R = 3$, $h/R = 0.2$, $E/E_0 = 0.0001$. На рис. 2. подано діаграми деформування фрикційного демпфера з рівномірною оболонкою та з розімкнутою оболонкою сталої товщини. Вони показують, що перехід від оболонки сталої товщини до рівномірної оболонки істотно підвищує податливість системи. За однакового рівня навантаження демпфер з рівномірною оболонкою має більший хід поршнів, а петля гістерезису дещо змінює свою форму та площу. Отже раціональний розподіл матеріалу в оболонці впливає не лише на жорсткість демпфера, а й на інтенсивність фрикційного розсіювання енергії.

Величину розсіяної за цикл енергії обчислювали як площу петлі конструкційного гістерезису. В результаті отримали:

$$\psi = \begin{cases} \frac{Q_{\max}^2}{3c\lambda} (1-s)(1-\sqrt{s})^2, & s_* \leq s \leq 1; \\ \frac{Q_{\max}^2}{6c\lambda} \left[(2 + e^{-\lambda})(1 - e^{-\lambda})^2 - s^2(e^{\lambda} - 1)^2(2 + e^{\lambda}) \right], & 0 \leq s \leq s_*. \end{cases} \quad (8)$$

На рис. 3 подано характерну залежність нормалізованої величини розсіяної енергії $\bar{\psi} = \psi/A$ від коефіцієнта асиметрії циклу, де $A = Q_{\max}^2 / (2\pi RE)$.

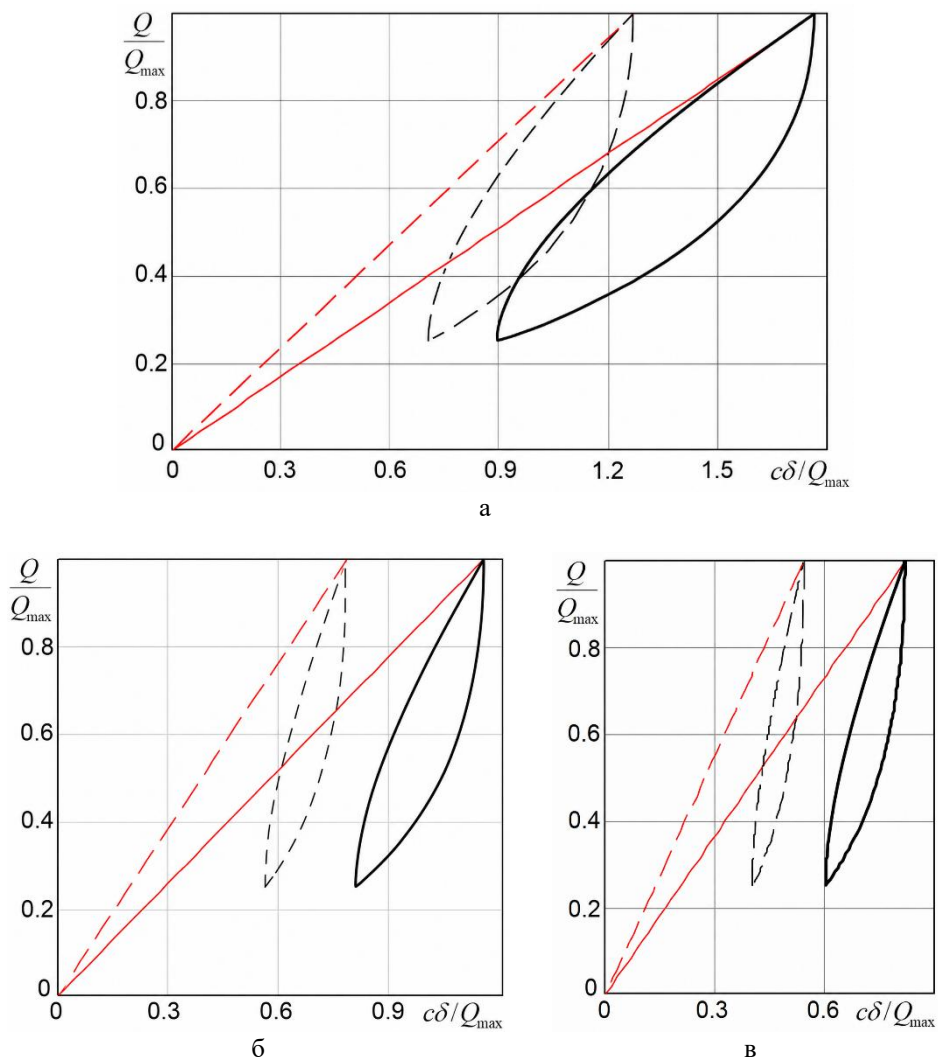


Рис. 2. Діаграма циклічного деформування: штрихові лінії – оболонка сталюї товщини, суцільні – рівномірна оболонка; а – $f = 0.2$, б – $f = 0.5$, в – $f = 0.8$.

Графічні залежності (рис. 3) демонструють, що енергія, розсіяна за цикл, зменшується зі зростанням асиметрії навантаження. Для всіх розглянутих випадків рівномірна оболонка забезпечує вищий рівень дисипації, ніж оболонка сталюї товщини. Найвиразніше ця перевага проявляється за глибших циклів навантаження–розвантаження, коли площа гістерезисної петлі є найбільшою. Це свідчить про те, що ефект рівномірного профілювання найповніше реалізується в режимах, де контактна пара зберігає достатню амплітуду відносного проковзування. Зі збільшенням коефіцієнта тертя максимальний рівень дисипації зменшується. Це пояснюється тим, що розсіяна енергія визначається не лише величиною дотичних контактних напружень, а й протяжністю зон проковзування та амплітудою відносних переміщень. За високого тертя контактна пара частково блокується, тому робота проковзування за цикл зменшується.

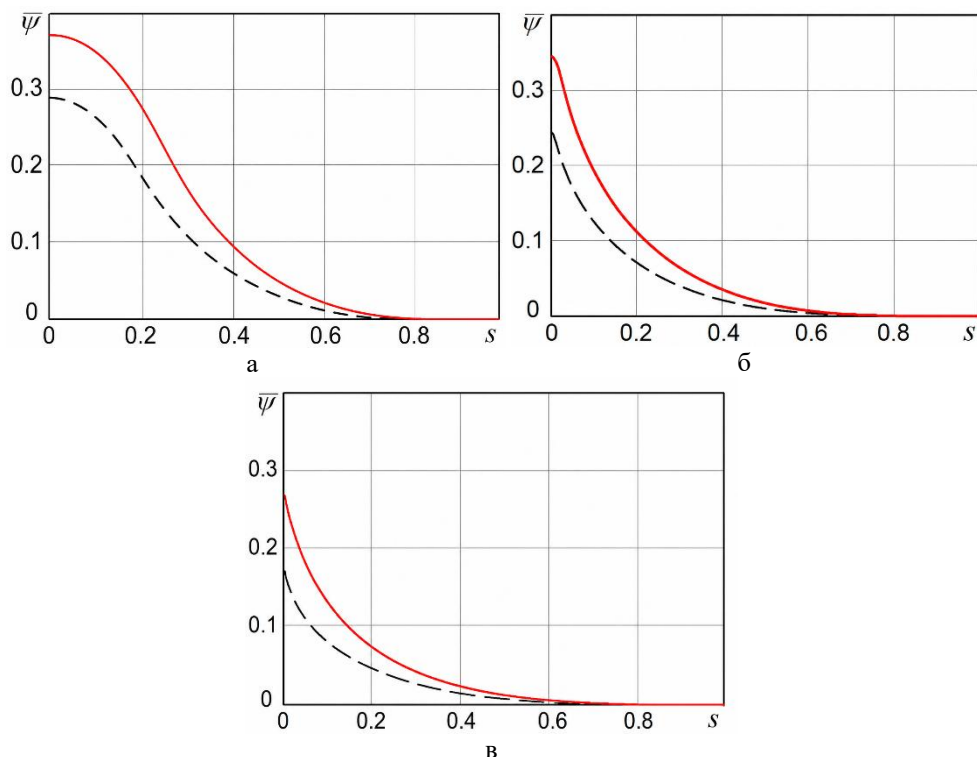


Рис. 3. Залежність розсіяної енергії від коефіцієнта асиметрії циклу: штрихові лінії – оболонка сталої товщини, суцільні – рівномірна оболонка; а – $f = 0.2$, б – $f = 0.5$, в – $f = 0.8$.

Висновок

У роботі аналітично досліджено розсіювання енергії у фрикційному демпфері з розімкнутою циліндричною оболонкою, профіль якої сформовано за критерієм рівномірності. На основі одновимірної квазістатичної моделі контактної взаємодії оболонки із заповнювачем отримано співвідношення для побудови діаграм циклічного деформування та визначення енергії, що розсіюється за цикл навантаження.

Порівняння з демпфером на основі оболонки сталої товщини показало, що рівномірне профілювання істотно підвищує податливість системи та збільшує площу петлі конструкційного гістерезису. Для розглянутих параметрів демпфер з рівномірною оболонкою забезпечує вищий рівень дисипації, причому найбільший ефект спостерігається за глибших циклів навантаження–розвантаження. Водночас зростання коефіцієнта тертя в дослідженому діапазоні зменшує роботу проковзування через скорочення зон відносного руху в контактній парі.

Отримані результати показують, що рівномірне профілювання оболонки, окрім раціонального розподілу матеріалу і підвищення податливості, є конструктивним інструментом керування дисипативними характеристиками фрикційного демпфера. Запропонована модель створює аналітичну основу для проектування компактних оболонкових демпферів, у яких вимоги до міцності, маси, жорсткості та дисипації енергії узгоджуються в межах єдиної механічної постановки.

1. Z.R. Wani, M. Tantray, E.N. Farsangi, N. Nikitas, M. Noori, B. Samali, and T.Y. Yang, A Critical Review on Control Strategies for Structural Vibration Control, *Annual Reviews in Control*, 54, 103–124 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2022.09.002>
2. L. Gagnon, M. Morandini, and G.L. Ghiringhelli, A review of friction damping modeling and testing, *Arch Appl Mech*, 90, 107–126 (2020). <https://doi.org/10.1007/s00419-019-01600-6>
3. S. Jaisee, F. Yue, and Y.H. Ooi, A state-of-the-art review on passive friction dampers and their applications, *Eng Struct*, 235, 112022 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112022>
4. J. Yuan, C. Gastaldi, E. Denimal Goy, and B. Chouvion, Friction damping for turbomachinery: A comprehensive review of modelling, design strategies, and testing capabilities, *Prog Aerosp Sci*, 147, 101018 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2024.101018>
5. S. Jaisee, F. Yue, and Y.H. Ooi, A State-of-the-Art Review on Passive Friction Dampers and Their Applications, *Eng Struct*, 235, 112022 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112022>
6. H. Zhang, A. Li, Y. Su, G. Xu, and B. Sha, Viscoelastic dampers for civil engineering structures: A systematic review of constructions, materials, and applications, *J Build Eng*, 96, 110597 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.jobeb.2024.110597>
7. C. Liu, L. Chen, H.P. Lee, Y. Yang, and X. Zhang, A review of the inerter and inerter-based vibration isolation: Theory, devices, and applications, *J Franklin Inst*, 359, 7677–7707 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2022.07.030>
8. H.Y. Ma, L. Li, Y.G. Wu, Y. Fan, and Q. Gao, Design of dry friction dampers for thin-walled structures by an accelerated dynamic Lagrange method, *J Sound Vib*, 489, 115550 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115550>
9. E. Grossi, M. Zerbin, A. Aprile, R. De Risi, and F. De Luca, Conceptual study of an innovative friction damper for the seismic retrofit of precast RC structures with poor connections, *Structures*, 67, 106960 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106960>
10. J. Liu, H. Wang, T. Guo, Y. Xia, and L. Wang, Vibration reduction for expansion joints of long-span suspension bridges using frictional dampers, *Eng Struct*, 326, 119579 (2025). <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2024.119579>
11. В.М. Шопа, І.П. Шацький, О.О. Бездзір і А.С. Величкович, Контактна взаємодія прорізаних оболонок з деформівними тілами, ІФНТУНГ, Івано-Франківськ (2015).
12. I. Shatskyi, I. Popadyuk, and A. Velychkovych, Hysteretic Properties of Shell Dampers, *Springer Proc Math Stat*, 249, 343–350 (2018). https://doi.org/10.1007/978-3-319-96601-4_31
13. I.P. Shats'kyi, V.M. Shopa, and A.S. Velychkovych, Development of Full-Strength Elastic Element Section with Open Shell, *Strength Mater*, 53, 277–282 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00286-y>
14. I. Shatskyi, A. Velychkovych, Analytical Model of Structural Damping in Friction Module of Shell Shock Absorber Connected to Spring, *Shock and Vibration*, 2023, 4140583 (2023). <https://doi.org/10.1155/2023/4140583>

Problems and Methods for Providing Cooling to Heat-Stressed Jet Engine Components

Asieiev M.A.¹, Lobunko O.P.

National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute", Department of Space Engineering, Kyiv, Ukraine

lasieiev.m.a.-ak51f@edu.kpi.ua

This paper reviews the primary cooling strategies for heat-stressed structural components of jet engines, summarizing their respective advantages and disadvantages. A major scientific and engineering challenge in the design of single-mode and multi-mode propulsion systems for both expendable and reusable vehicles is ensuring structural integrity under the increasing maximum temperatures of operating processes. The structural efficiency of cooling systems for heat-stressed jet engine components directly impacts specific impulse, mass, functional stability, and other critical performance criteria. The performance of internal channel turbulators specifically V-shaped ribs, cylindrical pin-fins, and spherical dimples is investigated and analyzed. Based on Computational Fluid Dynamics (CFD) modeling, a comparative assessment of the hydrodynamic characteristics of these geometries at high flow velocities is conducted. The results indicate that while cylindrical pin-fins provide the maximum intensification of flow mixing, they induce critical pressure losses. In contrast, V-shaped ribs and dimples demonstrate more viable operational modes regarding energy efficiency and structural mechanical behavior. This study serves as the initial stage of an optimization process aimed at determining the most favorable microstructural parameters. The goal is to achieve maximum cooling efficiency with minimal coolant pumping power requirements, while forecasting thermally induced elasto-plastic deformation of components in zones of extreme thermal exposure.

Keywords: thermodynamic process, regenerative cooling, film cooling, transpiration cooling, wall, structural materials, stability, protection, hydrodynamic characteristics.

Introduction Modern jet engines are characterized by a wide spectrum of external factors, diverse flows of thermodynamic processes, variations in operational modes, altitudes, and speeds, as well as the evolution of the flight vehicle itself, among other variables. The challenges in designing engine components stem from the fact that, during operation, they are subjected to significant mechanical and thermal loads at high temperatures, possess complex geometries, and are manufactured from materials that require specialized technological processing. Research into new capabilities for ensuring improved cooling stimulates the development of complex thermodynamic systems. The emergence of new physical models of deformation and concepts regarding the hierarchy of failure processes allows for the adjustment of established approaches, prompting a modern perspective on material strength as the loss of local and global stability within a thermodynamic system [1]. Thermal analysis of cooling system components, the thermal stability of their materials, and the prediction of their performance are made possible through novel calculation approaches and modern CFD models.

1. Cooling Methods. A well-known method for the thermal protection of liquid propellant rocket engine (LPRE) chambers is the implementation of regenerative cooling, where one of the propellant components flows through a structure of complex, curvilinear channels along the "hot" wall of the chamber. However, for main engines with a thrust of $R > 10$ kN, the use of low-boiling-point components (H_2) presents a relevant challenge, requiring complex structures for cryogenic systems on board. Under deep thrust throttling ($K_{dr} \geq 8 \dots 10$), the conditions for wall cooling deteriorate significantly ($\dot{m}_{cool\ dr} < \dot{m}_{cool\ max}$), accompanied by the risk of low-frequency pressure oscillations. For low-thrust LPREs with

$R = 1 \dots 200$ N, where active cooling by a propellant component is often impossible, a portion of the heat is dissipated through radiation. Such designs utilize heat-resistant alloys (niobium alloys, specialized carbon materials) that allow the combustion chamber to operate in a space environment for $t_{work} > 3000$ s (with 600 s being the duration of continuous operation).

In nuclear propulsion systems (NPS), the cooling system is integrated into the working cycle. The coolant (H_2) passes through a structure of curvilinear channels in the exhaust nozzle cooling system, facilitating heat regeneration before entering the reactor to be heated to temperatures $T_M > 3000$ °C. This enables a specific impulse of $I_{SP} = 9100 \dots 9800$ m/s. For vehicles with an NPS, a critical issue is the dissipation of primary energy that has not been converted into electrical energy ($\eta = 0,25 \dots 0,3$). Approximately 70...75% of this energy is dissipated into the environment through heat exchanger-radiators, which are structurally designed as finned tubes connected into cylindrical or conical panels [2].

The use of unitary paste propellant allows for the implementation of an original thermal protection method. The inner surface of the combustion chamber wall is protected by a layer of low-temperature solid propellant. Due to its low thermal conductivity, this layer burns out gradually, protecting the main wall material from high-temperature combustion products during the specified engine operating time, t_{work} . In certain designs of paste-propellant engines, "heat pipes" with thermal elements are employed, located near the outer surface of the combustion chamber wall. This allows for partial utilization of the heat from the combustion chamber for the phase transition of the coolant (H_2), which simultaneously reduces the thermal stress of the structure and increases the energy efficiency of the system.

Film cooling involves injecting a small amount of coolant $\dot{m}_{cool}$ through specially profiled holes directly onto the inner surface of the combustion chamber wall. The coolant forms a thin insulating film that protects the base metal from direct contact with the high-temperature flow of combustion products. In many engines, injectors are specifically designed to create a fuel-rich mixture near the inner surface of the walls. The temperature of this "near-wall layer" is significantly lower than the temperature of the main combustion plume core, which reduces the intensity of metal oxidation processes and the overall thermal load [3]. The combustion temperature can be controlled via the stoichiometric ratio, that is, by varying the amount of oxidizer required for the complete combustion of $m_{fuel} = 1$ kg. By improving calculation accuracy, it becomes possible to adjust the stoichiometric ratio and achieve a lower temperature $T_{wg} \rightarrow T_{wgmin}$ on the inner surface of the wall.

Transpiration cooling methods involve manufacturing walls from porous materials through which a pressurized coolant seeps through. The coolant creates a uniform insulating film across the entire surface. This method is considered the most thermodynamically efficient, as it allows for a significant reduction in wall temperature at $\dot{m}_{cool} \rightarrow 0,015-0,02(\dot{m}_{flow})$. The primary obstacle to its implementation is the difficulty of manufacturing porous structural materials capable of withstanding the operating pressure forces, along with the risk of pore clogging.

The radiation cooling method is based on the ability of bodies to emit thermal energy. This cooling method operates most effectively in a vacuum environment, where there is no energy absorption by the surrounding medium. It is applied in low-thrust engines with $P = 5-200$ N, orientation systems, satellite orbit correction systems, and for cooling the casings of auxiliary propulsion systems. Since the walls must operate reliably at extreme temperatures, specialized refractory materials are utilized: the Ir-Re material system allows operation at $T_M = 2200$ °C, providing higher performance and a longer service life; niobium and its alloys, often coated with a disilicide ($NbSi_2$) for oxidation protection, offer stability at $T_M = 1120 \dots 1370$ K; Ta-Mo alloys are used due to their high strength when heated [4][5].

2. Results. A considered simplified methodology for the computational analysis of jet engine component cooling systems is based on decomposing the model into computational layers to sequentially determine the temperature parameters within the "gas-wall-coolant"

system [6]. To determine the local convective heat transfer coefficients $h_{gw,i}$ on the hot gas side, the Bartz correlation is applied:

$$h_{gw,i} = 0.026 \frac{D_t^{0.2}}{(\mu^{0.2} c_p^{0.6} / Pr^{0.6})_0} \left(\frac{p_c}{c^*} \right)^{0.8} \left(\frac{A_t}{A_i} \right)^{0.9} \quad (1)$$

The estimation of pressure drop in the cooling channels is performed using the Darcy-Weisbach equation, taking into account hydraulic resistance and surface roughness.

$$\Delta P_{\text{cont}} = f \left(\frac{\Delta x}{D_h} \right) \frac{1}{2} \rho v^2 \quad (2)$$

The mathematical model implemented in the MATLAB environment enables the real-time prediction of the heat flux rate $\dot{Q}$ (3) and the distribution of temperature fields (T_{aw} , T_{co}).

$$\dot{Q}_i = \left(\frac{T_{aw} - T_{co}}{R_{gw} + R_w + R_{wc}} \right)_i \quad (3)$$

This approach provides a rapid iterative assessment of design solutions, which is critically important for preventing the thermal failure of structures. Further computations involve transitioning from one-dimensional modeling to CFD methods, which will allow for the verification of the obtained results, a more detailed investigation of complex three-dimensional heat transfer effects, and their impact on structural integrity [6].

Mathematical modeling of thermohydrodynamic processes in the internal cooling channels of blades is based on solving the Reynolds-Averaged Navier-Stokes (RANS) equations. According to the methodology, the conservation laws of mass, momentum, and energy are used to describe the flow of a compressible viscous gas. Given the high inlet velocity (80 m/s) and intense vortex generation behind the turbulators, the closure of the system of equations is achieved using the two-equation k - ε turbulence model. This model allows for the adequate calculation of the turbulent kinetic energy and its dissipation rate in flow separation zones, which is critical for determining local heat transfer coefficients in dimples and inter-rib spaces. To account for dynamic factors in rotating channels, additional terms are introduced into the equations of motion to describe the effects of centrifugal and Coriolis forces via the dimensionless Rossby number.

The thermodynamic model of the working fluid (air) is developed taking into account temperature gradients in the range of 800...1300 K. Unlike simplified ideal gas models, in this study, the coolant properties are defined as functions of temperature, $c_p(T)$ and $\eta(T)$, which corresponds to approaches used in the calculation of real power cycles. The numerical implementation of the mathematical model is performed using the finite volume method in the SolidWorks Flow Simulation software package. To ensure the reliability of the results, a grid independence analysis of the solution is conducted: the parameters of the computational grid (averaging 1.5...2 million cells) are selected to ensure convergence based on energy and momentum residuals at the level of 10^{-5} . This allows for the highly accurate identification of thermal stress concentration zones and pressure gradients, which are necessary for the subsequent prediction of thermally induced elasto-plastic deformation of components in zones of extreme thermal exposure [7, 8].

For rotating cooling system channels, the task of modeling the coolant flow is complicated by the need to account for additional dynamically changing factors: centrifugal and Coriolis forces. The ratio of inertial forces to Coriolis forces [9, 10] acting on the coolant flow is estimated using the following relationship:

$$Ro = \frac{u\omega}{D_h} \quad (4)$$

where ω is the angular velocity, D_h is the hydraulic diameter, and u is the flow velocity.

Furthermore, the calculation of heat transfer characteristics for rotating channels with turbulators (ribs) is performed using a model of the following form:

$$Nu = C \cdot Re \cdot Pr(1 + f(e, Pe, t, Lv, \theta, s)) \cdot f(Ro)$$
 (5)

where Re is the Reynolds number, Pr is the Prandtl number (air properties), $f(Ro)$ is the correction factor for the Rossby number (Ro) accounting for Coriolis forces, and $f(e, Pe, t, Lv, \theta, s)$ represents the design and technological parameters of the complex internal structures of the non-linear channels within the coolant flow turbulator system [9, 11] (Table 1).

Table 1.

Initial Data for Channel Geometry

Type of turbulators	(h/H)	Height of turbulators (h)	Height of channel (H _{ch})
Pin-fin	0,8	4 mm	5 mm
V-shaped ribs	0,12	0,5 mm	4,17 mm
Dimples	0,07	0,4 mm	5,71 mm

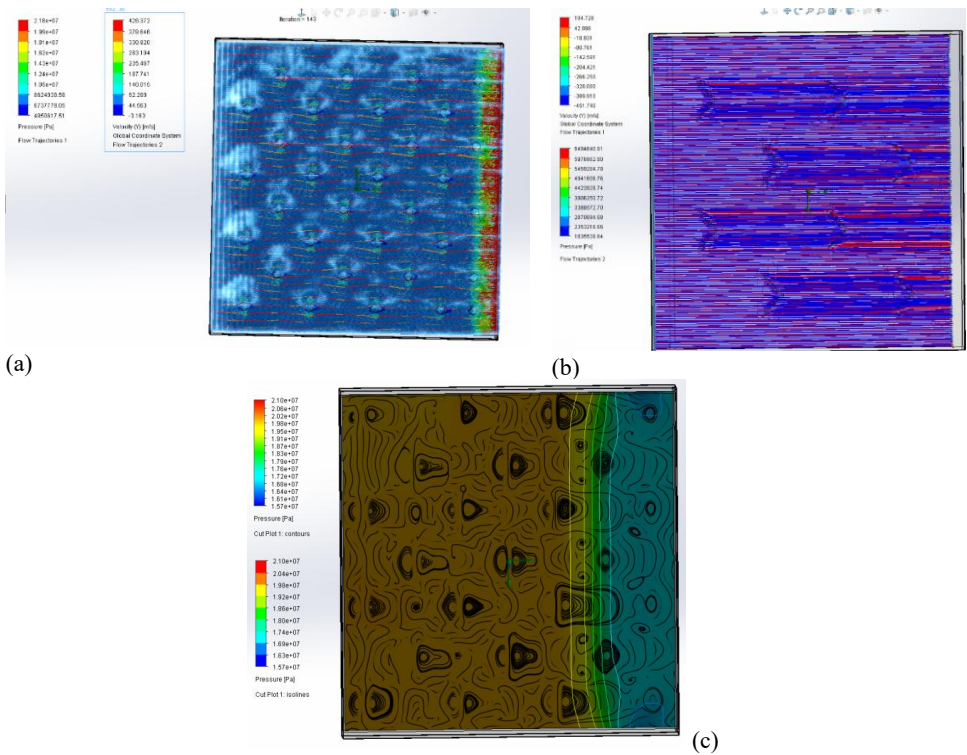


Fig. 1. Analysis of flow characteristics in channel models with turbulators in SolidWorks Flow Simulation: a – analysis of cylindrical pin-fins; b – analysis of V-shaped ribs; c – analysis of dimples.

The analysis of hydrodynamic characteristics in a channel with a staggered arrangement of cylindrical turbulators (pin-fins) revealed a complex flow structure at an inlet velocity of 80 m/s [12]. The hydrodynamic pattern and velocity field (Fig. 1(a)) demonstrate a significant intensification of the working fluid mixing. Due to the significant blockage of the channel cross-section, a local increase in velocity up to $v_{in} = 426$ m/s is observed, which is 5,3 times higher than the nominal inlet value. Stable recirculation zones and vortex wakes form behind each turbulation element, facilitating the disruption of the near-wall laminar sublayer and

increasing the efficiency of convective heat transfer. The calculated pressure drop in the investigated section is ($\Delta P^{(a)} = 16,9$ MPa, from $P_{in} = 21,8$ MPa to $P_{out} = 4,85$ MPa. Such a high gradient is caused by the dominance of inertial forces over viscous forces and significant vortex generation losses. The hydraulic resistance coefficient correlates with the sharp flow acceleration in the narrow cross-sections between the pin-fins. Local pressure peaks and high shear stress values on the surface of the turbulators indicate a risk of erosive wear. Considering the obtained results, the critical zones in terms of fatigue strength are the junctions between the pin-fins and the base, where the maximum pressure gradients and velocity pulsations are concentrated [15].

Fig. 1(b) illustrates the complex hydrodynamic pattern in a channel with V-shaped turbulators at $v_{in} = 80$ m/s. The interaction of the incoming flow with the sharp edges of the V-shaped ribs leads to intense boundary layer separation. This initiates the formation of paired longitudinal vortices, which promote the mixing of the coolant between the flow core and the near-wall zone. A substantial local flow acceleration is observed in the inter-rib spaces (red zones on the trajectories), caused by the flow cross-section narrowing effect. The peak velocity values in these zones correlate with a high static pressure gradient. The vortex structure of the V-shaped configuration, with its apex pointing downstream, ensures the deflection of flow lines from the central axis toward the channel side walls. This minimizes the formation of stagnation zones directly behind the elements and promotes uniform flow turbulization across the entire width. The obtained pressure drop value ($\Delta P^{(b)} = 3,53$ MPa) characterizes a high degree of flow intensification ($I_\alpha > 1$) and hydraulic efficiency. Such a level of hydraulic losses is justified for systems with high thermal stress, where the priority is the disruption of the laminar sublayer and heat transfer enhancement $\alpha \rightarrow \alpha_{max}$ at $Re \geq 10^5$ [11, 13].

Fig. 1(c) depicts the static pressure field in the form of contours and isolines. This visualization makes it possible to trace the nature of the flow interaction with the surface dimples. A smooth pressure drop along the channel is observed from $P_{in} = 21$ MPa (left section, brown zone) to $P_{out} = 15,7$ MPa (right section, blue zone). The total pressure drop is approximately $\Delta P^{(c)} = 5,3$ MPa. The vortex structure within the dimples, specifically the black concentric isolines inside each dimple, indicates the formation of stable vortex structures. These are zones of local pressure reduction, where reverse flow and intense mixing of the boundary layer occur. The uniform distribution of vortex zones confirms flow stability and the effectiveness of the staggered dimple arrangement. It is evident that each subsequent dimple interacts with the already turbulized flow from the preceding row, which maintains a high level of heat transfer along the entire wall. The absence of abrupt pressure spikes (compared to ribs) indicates lower aerodynamic resistance. The flow moves over the dimples more smoothly while still retaining high vortex energy to disrupt the laminar sublayer [14].

Table 2.

Initial Data for analysis

Parameter	Symbol	Unit	Pin-fin	V-shaped ribs
Inlet velocity	v_{in}	m/c	80	80
Inlet presure	P_{in}	Pa	$20,0 \times 10^5$	$20,0 \times 10^5$
Outlet pressure	P_{out}	Pa	17×10^5	16×10^5
Pressure drop	ΔP	Pa	300 kPa	400 kPa
Air temperature (average)	T	K	800	800
Wall temperature	T_{wall}	K	1300	1300

3. Discussion. Summarizing the results of the conducted simulation, it can be stated that the choice of turbulator geometry determines the critical balance between heat transfer intensity and the hydraulic resistance of the channel. The analysis has shown that the use of cylindrical pin-fins exerts the most powerful influence on the flow structure, causing a local acceleration of the working fluid up to $v_{in} = 426$ m/s and the active disruption of the near-wall laminar sublayer. However, the downside of such intensification is a significant pressure drop reaching $P = 16,9$ MPa, which imposes a substantial load on the system and increases the risk of erosive wear at the base of the elements.

Alternative designs in the form of V-shaped ribs and spherical dimples demonstrate more energy-efficient operational modes. Specifically, the V-shaped configuration allows for the generation of stable longitudinal vortices with significantly lower pressure losses ($\Delta P^{(b)} = 3,53$ MPa), whereas the staggered arrangement of dimples provides the smoothest pressure gradient along the channel while maintaining high mixing energy within the recirculation zones.

It should be emphasized that the presented results represent only the initial stage of a comprehensive study. The obtained data will serve as a baseline for subsequent modeling iterations, within which a series of optimization calculations is planned. Future work will focus on identifying the most optimal geometric parameters (height, pitch, and inclination angle of the elements) to achieve maximum cooling efficiency while minimizing the energy required for coolant pumping. The subsequent stages of scientific research include:

- (I) the development of a thermodynamic mathematical model of the working processes for the cooling system of heat-stressed components in complex thermodynamic systems;
- (II) the development of a scientific and methodological framework for investigating the thermohydraulic characteristics of complex cooling system structures for stationary and moving heat-stressed objects in centrifugal and Coriolis force fields;
- (III) conducting computational and experimental heat transfer studies on test prototypes of thermodynamic system components featuring complex internal (cooling) structures manufactured or repaired using additive technologies;
- (IV) the development of technological recommendations based on computational and experimental studies.

Conclusions. The creation of efficient cooling systems is a key factor in the development of aerospace transport systems. Combining regenerative cooling methods with the use of novel materials and manufacturing techniques for combined thermal protection enables an increase in the reliability of propulsion systems for prolonged and reusable missions. The investigation of new materials and methods for applying transpiration cooling will ensure fuel savings and a higher specific impulse under the same tactical and technical specifications. The successful application of base and protective materials primarily depends on how thoroughly their behavior and properties are understood under the expected conditions of thermomechanical exposure.

The search for opportunities to improve performance and thermal efficiency requires a comprehensive analysis and optimization of the fundamental parameters of the cooling method (working fluid – heat exchange surface – flow hydrodynamics – similarity criteria – driving source), allowing for maximized heat removal with minimal aerodynamic losses $\Delta P \rightarrow \Delta P_{min}$.

The effectiveness of ribs, pin-fins, and dimples directly depends on their integration into the blade profile. V-shaped ribs are investigated to improve heat transfer with moderate pressure losses, whereas pin-fin arrays are most commonly applied in the narrow trailing edge region to increase the contact area. Dimples offer an alternative: they increase heat transfer by a factor of 2 to 2,5 while maintaining low hydraulic resistance, making them optimal for assemblies where the priority is minimal pressure drop.

The further development of jet engines requires finding a balance between various cooling methods and integrated flow management systems to achieve greater durability and overall energy efficiency.

1. Karpinos, B. S. (2025). Physico-phenomenological principles of energy criteria for material failure. *Strength of Materials*, 3, 46-60. <https://strength.org.ua/journal/118>
2. Bondarenko, S. G., Dron, M. M., & Dubovyk, L. G. (2016). Rocket propulsion systems of interorbital transport vehicles in the context of preventing space debris. Dnipro. ISBN 978-966-383-784-0
3. D.P. Mishra *Fundamentals of Rocket Propulsion* (2017). <https://ftp.idu.ac.id/wp-content/uploads/ebook/tdg/DESIGN%20SISTEM%20DAYA%20GERAK/Fundamentals%20of%20Rocket%20Propulsion.pdf>
4. George P. Sutton, Oscar Biblarz (2013) *Rocket propulsion elements* Seventh Edition. <https://ftp.idu.ac.id/wp-content/uploads/ebook/tdg/DESIGN%20SISTEM%20DAYA%20GERAK/Rocket%20Propulsion%20Elements%20by%20George%20P.%20Sutton.pdf>
5. Brian D. Reed, James A. Biaglow, and Steven J. Schneider (1997) *Iridium-coated rhenium radiation-cooled rockets* National Aeronautics and Space Administration Lewis Research Center Cleveland, Ohio 44135, NASA TM-107453 <https://files01.core.ac.uk/download/pdf/76444198.pdf>
6. Asieiev M.A., Lobunko O.P. (2025). Numerical tool for predicting heat flux distribution in cooled engine components. *XVII International Conference of Students and Young Scientists «Intelligence. Integration. Reliability»*, 6-10. <https://philpapers.org/archive/KORIIR.pdf#page=6>
7. Baranyuk O. V., Vorobiov M. V., Rachynskyi A. Yu. (2023). CFD modeling of heat transfer and hydrodynamics processes by means of a software complex: Monograph. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. 160 p. <https://ela.kpi.ua/items/cf143d28-db06-428d-809b-5880af8dd368>
8. Ryndiuk D. V. (2020). Mathematical modeling of thermal processes in energy and industry: Lecture notes. Part 1. Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute. 72 p. <https://ela.kpi.ua/server/api/core/bitstreams/e956016f-caa9-4515-a73c-clda418185d9/content>
9. Je-Chin Han, Lesley M. Wright (2005). Enhanced Internal Cooling of Turbine Blades and Vanes. Turbine Heat Transfer Laboratory Department of Mechanical Engineering Texas A&M University College Station. 1-64 <https://netl.doe.gov/sites/default/files/gas-turbine-handbook/4-2-2-2.pdf>
10. S. V. Epifanov, E. V. Martsenyuk, I. F. Kravchenko (2022). Design of cooled parts of gas turbine engines. National Aerospace University named after M. Ye. Zhukovsky “Kharkiv Aviation Institute”. 1-88 <https://dspace.library.khai.edu/xmlui/handle/123456789/7747>
11. Chao Zhang, Matthew Janeway (2022). Optimization of Turbine Blade Aerodynamic Designs Using CFD and Neural Network Models. *International Journal of Turbomachinery, Propulsion and Power*. 7(3), 20. 1-15 <https://www.mdpi.com/2504-186X/7/3/20>
12. Prabhakar Bhandari, Kamal S. Rawat, Yogesh K. Prajapati, Diwakar Padalia, Lalit Ranakoti, Tej Singh (2023). Design modifications in micro pin fin configuration of microchannel heat sink for single phase liquid flow: A review. *Journal of Energy Storage*. 72, 107548. 1-25 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352152X23009453>
13. Karthik Krishnaswamy, Suresh Sivan (2021). Improvement in thermal hydraulic performance by using continuous V and W-Shaped rib turbulators in gas turbine blade cooling application. *Case Studies in Thermal Engineering*. 24, 100857. 1-12 <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214157X21000204>

14. Lei Luo, Chenglong Wang, Lei Wang, Bengt Ake Sunden, Songtao Wang (2025). Heat transfer and friction factor in a dimple-pin fin wedge duct with various dimple depth and converging angle. *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*. Volume 26, Issue 6. 1954-1974
<https://www.sciencedirect.com/org/science/article/abs/pii/S0961553916001343>
15. Shawkat Chowdhury, Fatima Tasneem Mohsin, Morium Mannan Tonni, Mita Noor Hasan Mita, M. Monjurul Ehsan (2023). A critical review on gas turbine cooling performance and failure analysis of turbine blades. *International Journal of Thermofluids*. 18, 100329. 1-20
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666202723000484>

Оцінка квазістатичної складової пошкодження високотемпературної області ротора під час зупинки турбіни

В.А. Пешко¹, А.П. Бовсуновський

Інститут атомної та теплової енергетики КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ, Україна

¹ vapeshko@gmail.com

Представлено підхід до визначення квазістатичної складової пошкодження турбіни при циклічних навантаженнях. Об'єкт дослідження – ротор середнього тиску турбіни К-200-130. Розглянуто пошкодження галтелі 13-го ступеня ротора, в якій часто діагностуються тріщини під час планово-попереджувальних ремонтів. За допомогою методу скінченних елементів розраховано нестационарний тепловий та напружено-деформований стан ротора під час зупинки, отримано динаміку зміни температури та інтенсивності напружень в досліджуваній області. Допустимий термін роботи металу для певних інтервалів часу визначено за допомогою інтеграла Робінсона та параметра Ларсона-Міллера. Загальне пошкодження металу за 2000 циклів зупинки від дії лише термічних напружень становить 4,2%. З урахуванням інших механізмів пошкодження отримане значення квазістатичної складової суттєво знижує залишковий ресурс турбіни.

Ключові слова: парова турбіна, зупинка, нестационарний процес, тепловий стан, напружений стан, параметр Ларсона-Міллера, циклічне пошкодження, квазістатичне пошкодження.

Вступ

Згідно до нормативних документів України [1] оцінка залишкового ресурсу високотемпературних елементів парових турбін виконується за темпом накопичення статичної та циклічної складових пошкодження. Зокрема циклічне пошкодження встановлюється на основі допустимого числа циклів для певного характеру навантаження, яке в свою чергу визначається величиною амплітуди інтенсивності деформації [2]. В той же час для деяких нестационарних режимів роботи турбіни, таких як зупинка, характерна робота при достатньо високих температурах та напруженнях що є характерними факторами для процесу повзучості. В даній роботі пропонується підхід до визначення квазістатичної складової пошкодження при циклічних навантаженнях, характерних для нестационарних процесів експлуатації.

1. Аналіз методів оцінки пошкодження роторів парових турбін під час змінних режимів експлуатації

Сучасні тенденції експлуатації теплових електростанцій в умовах маневрування потужностями призводять до збільшення кількості пуско-зупинних операцій. Це зумовлює виникнення складних термічних та механічних напружень, що є головною причиною вичерпання ресурсу роторів парових турбін [3-7].

У недавніх дослідженнях [3, 4] виконано аналіз температурних і напружених полів роторів турбін під час пускових режимів експлуатації. Автори застосували лінійні та нелінійні моделі CDM для розрахунку взаємодії малоциклової втоми та повзучості, підтвердивши, що температурні градієнти є визначальним фактором формування пікових напружень, а нелінійні моделі пошкоджуваності дають більш

консервативну та безпечну оцінку життєвого циклу. Для оперативного контролю цих процесів також успішно впроваджуються статистичні моделі на базі машинного навчання [5], що є частиною ширшого тренду на автоматизацію прогнозування росту тріщин, який охоплює й інші складні конструкції та елементи з аустенітних сталей.

Особлива увага в літературі приділяється зонам концентрації напружень. Зокрема в роботі [6] спираючись на норми ASME III-NH, довели, що галтелі роторів та конструктивні пази в зоні паровпуску є найбільш критичними ділянками для зародження тріщин в умовах взаємодії повзучості та втоми під час перехідних режимів пуску та зупинки. Розрахунки підтверджують, що процеси повзучості стають вагомим фактором руйнування при температурах понад 400 °С [7].

Незважаючи на значний масив робіт, присвячених оптимізації пускових графіків та загальному циклічному пошкодженню, в існуючих публікаціях недостатньо розкрито механізми накопичення пошкоджень під час специфічних режимів розхолодження. У цьому контексті дослідження саме квазістатичної складової пошкодження, що генерується лише термічними напруженнями під час зупинки турбіни, є обґрунтованим і необхідним кроком.

2. Об'єкт дослідження та розрахункова модель термонапруженого стану ротора турбіни

Об'єктом дослідження пропонується ротор середнього тиску турбіни К-200-130 в області галтелі 13-го ступеня з боку наступних ступенів (т. А на рис. 1), в якій найбільш часто діагностуються значні кільцеві тріщини при експлуатації. Матеріал ротора – сталь Р2МА (25Х1М1ФА).

Нестационарний процес що досліджується – зупинка зі зривом вакууму, під час якої ротор зазнає стрімкого охолодження та значних термічних напружень. Цей режим зупинки реалізується припиненням роботи основних ежекторів, що відкачують повітря з конденсатора та відкриттям клапанів зриву вакууму. Далі спрацьовують стопорні та регулюючі клапани, які припиняють подачу пари в проточну частину турбіни. Частота обертання ротора сповільнюється протягом 15-16 хв і далі підтримується на рівні 5 об/хв за допомогою валоповоротного пристрою.

Згідно правил технічної експлуатації даний режим зупинки вважається аварійним, хоча досить часто реалізується в реальних умовах роботи.

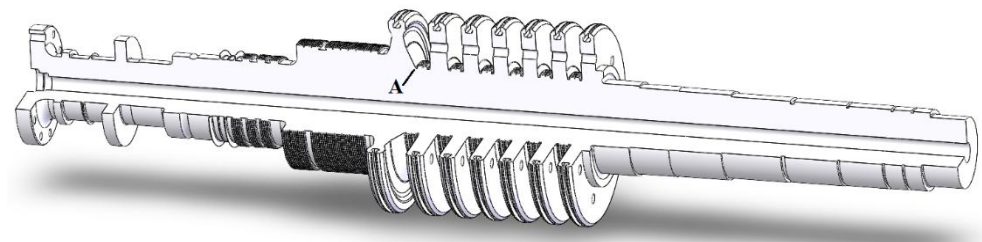


Рис. 1. Ротор середнього тиску турбіни К-200-130, точкою А позначено область дослідження

Дослідження закономірностей формування теплового та напружено-деформованого стану ротора під час зупинки виконано в нестационарній постановці з використанням методу скінченних елементів.

В загальному випадку, нестационарна теплопровідність може бути описана рівнянням:

$$\operatorname{div}[\lambda(T) \cdot \operatorname{grad}(T)] = c(T) \cdot \gamma(T) \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau}, \quad (1)$$

де λ – коефіцієнт теплопровідності сталі, c – питома теплоємність, γ – питома вага, що є функціями температури T і циліндричних координат r, z, θ, τ – розрахунковий час.

Для вирішення цієї задачі на всіх поверхнях ротора задаються граничні умови теплообміну II і III роду. Розрахунок граничних умов є окремою складною задачею, яка потребує встановлення умов теплообміну за допомогою спеціальних експериментальних рівнянь подібності. Результати даних досліджень представлені в роботі [8].

Отриманий розподіл температур в роторі в кожен момент часу при зупинці турбіни є граничними умовами при визначенні напружено-деформованого стану ротора. Додатково враховуються відцентрові сили, що діють на основний метал, маси робочих лопаток, тощо.

Система диференціальних рівнянь рівноваги для осесиметричного ротора має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + \rho X_r = 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} + \rho X_z = 0, \end{cases} \quad (2)$$

ρ – густина сталі, X_r, X_z – компоненти вектору густини масової сили.

Співвідношення закону Гука, записані через деформації мають вид:

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \varepsilon_{rr} \right), \\ \sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \varepsilon_{zz} \right), \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{\theta\theta}) + \varepsilon_{\theta\theta} \right), \\ \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{rz}. \end{cases} \quad (3)$$

Розрахункову модель ротора скорочено до його високотемпературної зони, не досліджувались області від лівого краю до середини шийки валу в області опорно-упорного підшипника та від диску 5-го ступеня до правого краю (рис. 1). Розрахункову модель було дискретизовано на 102 тис. кінцевих елементів трикутного типу. Щільність розрахункової сітки збільшувалась у радіальному напрямку до зовнішньої поверхні ротора. Розмір найбільшого елемента – 15 мм, найменшого – 0,5 мм.

3. Тепловий та напружений стан ротора під час зупинки

З точки зору формування теплового поля режим зупинки можна поділити на два основні етапи: 1 – вибіг ротора та зменшення частоти обертання від 3000 до 5 об/хв протягом 16 хв; 2 – робота на валоповоротному пристрої на частоті 5 об/хв та остигання протягом 5-7 днів до температури холодного стану.

В початкові моменти етапу 1 в проточній частині турбіни наявні залишки робочої пари, які поступово переходять в конденсатор. При цьому в кінцеві ущільнення циліндрів продовжує подаватись ущільнююча пара, яка обертанням ротора вентилюється по проточній частині. Із уповільненням ротора інтенсивність теплообміну зменшується. Під час етапу 2 подача ущільнюючої пари припиняється і ротор природньо охолоджується знаходячись у «термосі», що утворюється корпусом циліндра турбіни.

Описані вище особливості течії пари враховано при вирішенні задачі теплопровідності. На рис. 2 представлено тепловий стан ротора в момент часу 1600 с після початку зупинки, що відповідає етапу № 2. Найбільший рівень температур (510 °C) спостерігається в області диску 13-го ступеня та поступово зменшується за напрямком течії пари до значення 427 °C на 16-му ступені. В області кінцевих ущільнень температура зменшується з 496 °C для 1-го сегменту до 73 °C для останнього 13-го сегменту.

Розподіл інтенсивності напружень в металі ротора в цей же момент часу показано на рис. 3. Максимум напружень наявний в досліджуваній області галтелі 13-го ступеня та складає 188 МПа. Також достатньо високий рівень напружень характерний для зон термокомпенсаційних канавок передніх кінцевих ущільнень ротора (125-170 МПа). Для решти областей помітний суттєво нижчий рівень інтенсивності напружень.

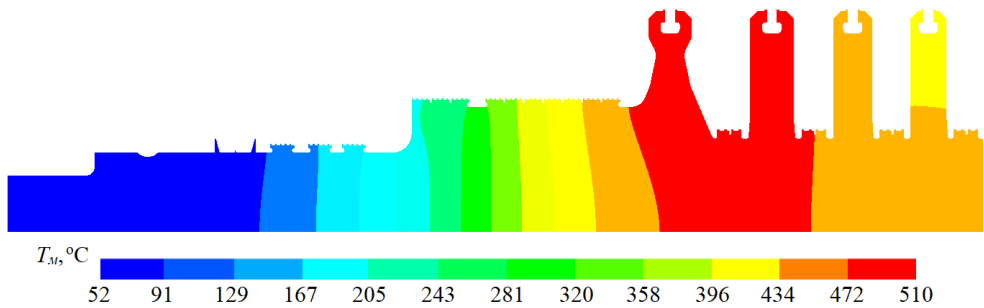


Рис. 2. Тепловий стан ротора після вибігу під час зупинки в момент часу 1600 с

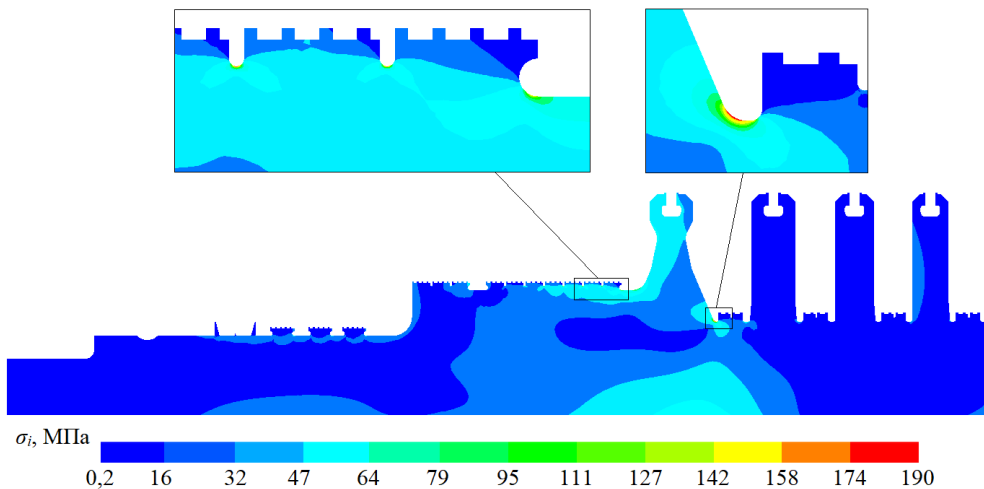


Рис. 3. Напружений стан ротора після вибігу під час зупинки в момент часу 1600 с

Аналогічні до представлених на рис. 2 і 3 дані щодо розподілу температур та напружень в роторі протягом зупинки наявні для решти моментів часу. Зокрема на рис. 4 показано динаміку зміни температури та інтенсивності напружень в галтелі регулюючого ступеня протягом перших 10000 с зупинки.

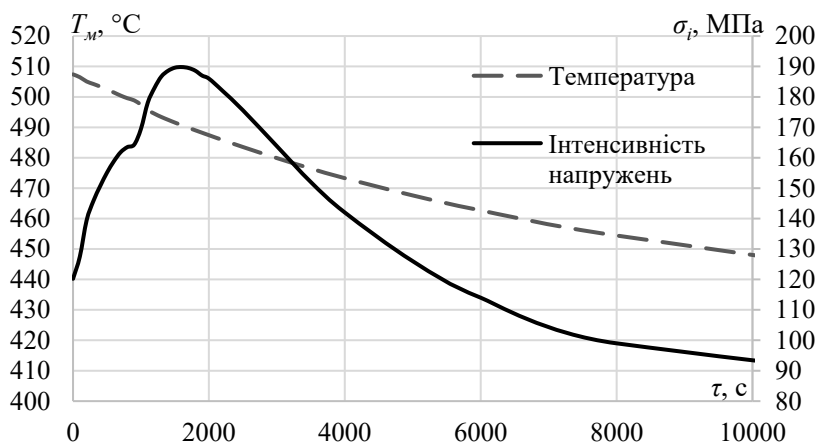


Рис. 4. Динаміка зміни температури та напружень в галтелі 13-го ступеня ротора протягом перших 10000 с роботи після зупинки зі зливом вакууму

Не зважаючи на візуально плавне зменшення температури поверхневих шарів досліджуваної області, через певну нерівномірність температурного поля в галтелі проявляється значний рівень інтенсивності напружень, який збільшується зі 120 МПа на початку зупинки до 167 МПа протягом вибігу ротора (етап 1, перші 960 с) та до 188 МПа в момент часу 1600 с (представлено на рис. 3). В подальшому, з частковою стабілізацією теплового поля після перших 20 хв інтенсивного охолодження ротора, температура металу та напруження в усіх зонах ротора плавно зменшуються.

4. Оцінка квазістатичної складової пошкодження ротора при зупинці

В керівному матеріалі РТМ 108.021.103-85 [1] представлені дані по довготривалій міцності сталі Р2МА для різних температур на 10^5 год (табл. 1). Для даних параметрів було розраховано параметр Ларсона-Міллера за рівнянням [9]:

$$LMP = T(C + \lg t_{p,j}) \quad (4)$$

де T – температура випробування, C – константа Ларсона-Міллера (для легованих сталей $C = 20$), $t_{p,j}$ – база випробувань (в даному випадку 10^5 год).

Таблиця 1. Показники довготривалої міцності сталі Р2МА для різних температур

θ , °C	σ_{10^5} , МПа	LMP , К
450	390	18079
475	260	18704
500	215	19329
525	175	19954
550	130	20579

Параметр Ларсона-Міллера було логарифмічно апроксимовано згідно до параметричного методу температурно-часової екстраполяції повзучості [9].

Отримані значення температури та інтенсивності напружень в галтелі ротора (рис. 4) були осереднені з кроком в 100 секунд використовуючи інтеграл Робінсона [10]. Для відповідних середніх значень інтенсивності напружень було визначено параметр Ларсона-Міллера та допустимий час роботи металу $[t_{p,j}]$ для режиму навантаження що характерний в даний період часу. Для кожного з даних часових відрізків розраховано пошкодження основного металу, використовуючи теорію лінійного складання пошкоджень за гіпотезою Пальмгрена-Майнера та побудовано криву накопичення пошкоджень в роторі середнього тиску за перші 6000 секунд зупинки зі зливом вакууму (рис. 5).

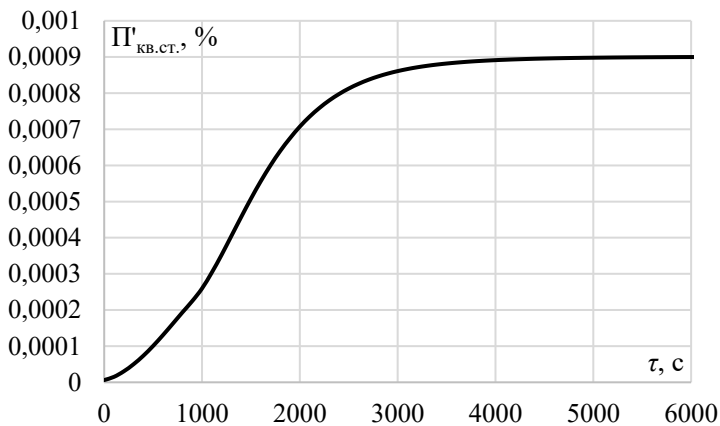


Рис. 5. Крива накопичення квазістатичного пошкодження в роторі середнього тиску під час зупинки зі зливом вакууму за механізмом повзучості

Найбільш стрімке накопичення пошкодження (рис. 5) спостерігається протягом періоду часу 700-3000 с коли наявні високі температури металу (508-480 °С) та інтенсивності напружень (120-190 МПа). Починаючи з 1800 с темп накопичення пошкодження дещо уповільнюється через зменшення розтягуючих напружень, а також температури металу. За перші 5000 с сумарне пошкодження металу сягає 0,0009 % і в подальшому майже повністю припиняється.

Для нестационарного режиму зупинки доцільно врахувати циклічну складову пошкодження, яка визначається амплітудою деформацій протягом циклу. Допустиме число циклів навантаження визначається за експериментальними кривими малоциклової втоми [1]:

$$[N_p] = \min(N_1/n_N; N_2), \quad N_1 = f(\varepsilon_a), \quad N_2 = f(\varepsilon_a n_\varepsilon), \quad (5)$$

де ε_a – амплітуда інтенсивності деформацій, n_N – запас міцності за числом циклів, n_ε – запас міцності за деформацією.

Для представленої на рис. 4 динаміки зміни інтенсивності напружень протягом циклу зупинки, амплітуда напружень складає 94,4 МПа, що забезпечує циклічне пошкодження на рівні 0,0012 %. Таким чином сумарне пошкодження під час зупинки спричинене циклічним навантаженням та квазістатичною повзучістю:

$$\Pi' = \Pi'_{\text{кв.ст.}} + \Pi'_{\text{ц.}} = 0,0021\% \quad (6)$$

За 2000 циклів пуску-зупинки, пошкодження в основному металі ротора спричинене лише термічними напруженнями під час зупинки складе 4,2 %, що з врахуванням інших механізмів пошкодження здатне суттєво обмежити індивідуальний ресурс ротора турбіни К-200-130.

Висновки

1. Запропоновано підхід до розрахунку квазістатичної складової пошкодження деталей турбін від дії температурних напружень для змінних режимів роботи. Детально досліджено режим зупинки парової турбіни К-200-130 зі зривом вакууму, який є специфічним режимом розхолодження з високим рівнем термічних напружень в роторі середнього тиску.

2. Доведено, що специфіка теплообміну при розхолодженні спричиняє суттєву нерівномірність температурного поля ротора та, як наслідок, значні термічні напруження в зоні галтелі 13-го ступеня. Максимальна інтенсивність напружень становить 188 МПа і досягається на етапі роботи, коли температура металу ротора ще перевищує 490 °С.

3. Встановлено, що поєднання високих залишкових температур та інтенсивних напружень під час зупинки створює умови для розвитку процесу повзучості. Запропонований підхід до розрахунку квазістатичної складової пошкодження показав, що найінтенсивніше вичерпання ресурсу ротора турбіни К-200-130 за цим механізмом відбувається в період 700–3000 секунд після початку розхолодження.

4. Показано, що неврахування етапу охолодження може призводити до недооцінки загального пошкодження високотемпературних елементів турбіни. Сумарне пошкодження в зоні галтелі від дії квазістатичної та циклічної складових за один цикл зупинки становить 0,0021 %, що за 2000 циклів призводить до вичерпання ресурсу металу на 4,2 % лише від впливу нестационарного температурного режиму.

1. М. Г. Шульженко, *Визначення розрахункового ресурсу та оцінки живучості роторів та корпусних деталей турбіни: СОУ-Н МЕН 40.1-21677681-52:2011*, Міністерство палива та енергетики України, Київ: ГРІФРЕ (2011).
2. M. Banaszkiwicz, Creep-fatigue defect development and risk of brittle fracture in the ultrasupercritical steam turbine rotors, *Materials at High Temperatures*, **40**(1), 1-12 (2023). <https://doi.org/10.1080/09603409.2022.2160896>
3. H. Li, S. Xiao, M. Sun, Y. Zheng, Y. Xu, K. Mi, F. Zhang, Life Damage Evaluation of 600MW Supercritical Condensing Steam Turbine Rotor under Start-up Schedule, *Journal of Physics: Conference Series*, **3086**, 012004 (2025). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/3086/1/012004>
4. W. Liu, B. Liang, X. Wu, M. Yang, Z. Sun, Y. Li, M. Yao, Z. Xu, F. Zhang, Life Damage Online Monitoring Technology of a Steam Turbine Rotor Start-Up Based on an Empirical-Statistical Model, *Technologies*, **13**, 417 (2025). <https://doi.org/10.3390/technologies13090417>

5. F. Wang, Y. Yang, B. Cui, D. Wang, Study on Fatigue Crack Growth Prediction and Machine Learning Correction for Deepwater Risers, *Journal of Marine Science and Engineering*, **14**, 768 (2026). <https://doi.org/10.3390/jmse14090768>
6. H. Gharehbaghi, M. Aghaei, Investigation of creep-fatigue interaction in steam turbine rotor, *Forces in Mechanics*, **19**, 100314 (2025). <https://doi.org/10.1016/j.finmec.2025.100314>
7. A. Kaimkuriya, K. Chaware, Y. S. Chandel, N. K. Singh, P. Singh, Experimental Investigation of Fatigue Life Cycle Behaviour of Austenitic SS 316L, *EPJ Web of Conferences*, **355**, 03005 (2026). <https://doi.org/10.1051/epjconf/202635503005>
8. В. Пешко, А. Сепік, Граничні умови теплообміну в проточній частині ротора середнього тиску турбіни К-200-130. *Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського. Серія: Технічні науки*, **36**(75), 169-176 (2025). <https://doi.org/10.32782/2663-5941/2025.3.1/22>
9. E. L. Robinson, Effect of Temperature Variation on the Long-Time Rupture Strength of Steels, *Transactions of the ASME*, **74**(5), 777–780 (1952). <https://doi.org/10.1115/1.4015916>
10. F. R. Larson, J. Miller, A time-temperature relationship for rupture and creep stresses, *Transactions of the ASME*, **74**(5), 765–771 (1952). <https://doi.org/10.1115/1.4015909>

Особливості моделювання тонкостінних соплових насадків, виготовлених за адитивною технологією L-PBF

С. Векілов^{a1}, О. Ніколаєв^a, В. Ліповський^{b2}, Р. Пустовий^b

^aІнститут технічної механіки НАН України, Дніпро, Україна

^bДніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

¹ abst0@i.ua, ² lealvi@ukr.net

У роботі розглянуто особливості проектування тонкостінних соплових насадків радіаційного охолодження рідинних ракетних двигунів, виготовлених із застосуванням адитивної технології L-PBF. Показано, що використання адитивного виробництва дозволяє суттєво знизити масу конструкції за рахунок зменшення товщини стінки, однак супроводжується зниженням жорсткості та підвищенням ризику втрати стійкості під дією зовнішнього тиску. На основі аналізу особливостей втрати стійкості тонкостінних конічних оболонок запропоновано інженерне рішення локального підсилення конструкції шляхом гармонічної модифікації зовнішнього контуру в критичних зонах. Проведено чисельне моделювання базового, полегшеного та підсиленого варіантів конструкції. Встановлено, що запропоноване рішення забезпечує підвищення коефіцієнта запасу стійкості до 1.59 при збереженні зниження маси конструкції на 42% порівняно з традиційним варіантом. Отримані результати підтверджують перспективність застосування технології L-PBF для створення високоефективних тонкостінних елементів рідинних ракетних двигунів.

Ключові слова: рідинні ракетні двигуни, соплові насадки радіаційного охолодження, адитивні технології, Laser Powder Bed Fusion, тонкостінні конічні оболонки, стійкість конструкцій, чисельне моделювання, скінченно-елементний аналіз, оптимізація маси.

Вступ

Підвищення масової ефективності рідинних ракетних двигунів залишається одним із ключових напрямів розвитку сучасного ракетного двигунобудування як при створенні нових конструкцій, так і при реінжинірингу відомих технічних рішень. Сучасні двигуни повинні забезпечувати високу питому ефективність при одночасному використанні недефіцитних матеріалів та збереженні технологічної простоти виготовлення. Однак одночасне виконання зазначених вимог є складною інженерною задачею, що зумовлює необхідність пошуку раціональних компромісних рішень на рівні конструкції окремих елементів двигуна.

Одним із таких елементів є сопловий насадок радіаційного охолодження. Його застосування у складі камери двигуна дозволяє збільшити ступінь розширення продуктів згоряння без застосування регенеративного охолодження, що сприяє підвищенню масової ефективності двигуна в цілому. Разом з тим застосування використання таких соплових насадків загалом обмежується робочою температурою матеріалу, а також складністю забезпечення надійного з'єднання насадка з основним корпусом камери в умовах значних термомеханічних навантажень.

У сучасній практиці застосовуються різні підходи до виготовлення соплових насадків радіаційного охолодження. Зокрема, застосовуються класичні технології обробки листових матеріалів, композитні конструкції та адитивне виробництво. Кожен із підходів має свої переваги та обмеження, що визначають область їх

застосування. При цьому адитивні технології відкривають можливість суттєвого зниження маси конструкції за рахунок зменшення товщини оболонки. Однак таке підвищення масової ефективності може призводити до втрати стійкості соплового насадка під дією зовнішніх навантажень.

У зв'язку з цим актуальною є задача розробки конструктивних рішень для тонкостінних соплових насадків радіаційного охолодження, виготовлених адитивними методами, що забезпечують необхідний рівень стійкості при збереженні високих масових характеристик. Об'єктом дослідження є соплові насадки радіаційного охолодження, виготовлені із застосуванням технології L-PBF. Предметом дослідження є вплив конструктивних параметрів на стійкість та масові характеристики таких насадків. Для досягнення поставленої мети використано методи чисельного моделювання на основі скінченно-елементного аналізу.

Опис технологічних особливостей – обладнання, процес, матеріали, особливості реалізації, особливості результату друку

Процес адитивного виробництва методом L-PBF (Laser Powder Bed Fusion) базується на послідовному пошаровому плавленні металевого порошку в середовищі інертного газу. Такий підхід забезпечує можливість виготовлення деталей зі складною внутрішньою геометрією, яка у ряді випадків є недосяжною для традиційних технологій. При цьому складність геометрії не призводить до суттєвого збільшення тривалості виробництва або вартості виготовлення.

Номенклатура порошкових матеріалів для адитивного виробництва постійно розширюється. Зокрема, нікелеві жароміцні сплави, такі як Inconel 718 та Haynes 230, продемонстрували придатність для виготовлення деталей і вузлів камер рідинних ракетних двигунів, що працюють в умовах високих температур і агресивного середовища продуктів згоряння. Наприклад, у ряді публікацій [1–5] описано процес розробки бронзового сплаву GRCo-42 та подальший розвиток у форматі створення біметалічних конструкцій із суперсплавом Inconel 625 спеціально для технології L-PBF.

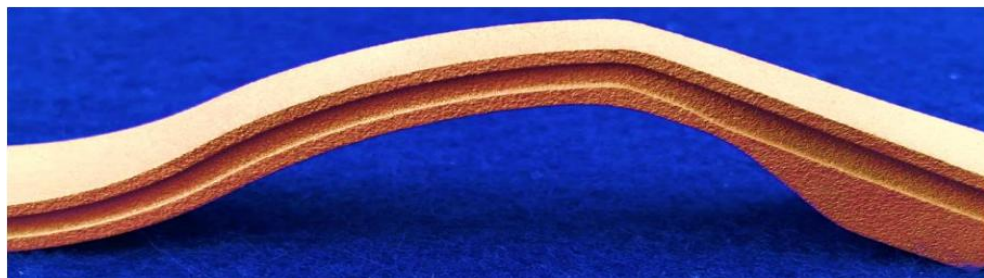


Рис. 1. Зразок тракту регенеративного охолодження, виготовленого із застосуванням адитивної технології L-PBF зі сплаву GRCo-42 [4]

До основних переваг методу L-PBF належить можливість виготовлення складних конструкцій без використання спеціалізованого технологічного оснащення, а також зменшення кількості операцій складання, зокрема паяння та зварювання. У

ряді випадків це дозволяє скоротити тривалість виробництва у 4–5 разів та знизити його вартість приблизно у 2.5 раза [5].

Разом з тим метод L-PBF має ряд особливостей, які необхідно враховувати при проектуванні. Пошарова побудова деталі обумовлює формування характерної ступінчастої структури, що призводить до підвищеної шорсткості поверхні (див. рис. 2).

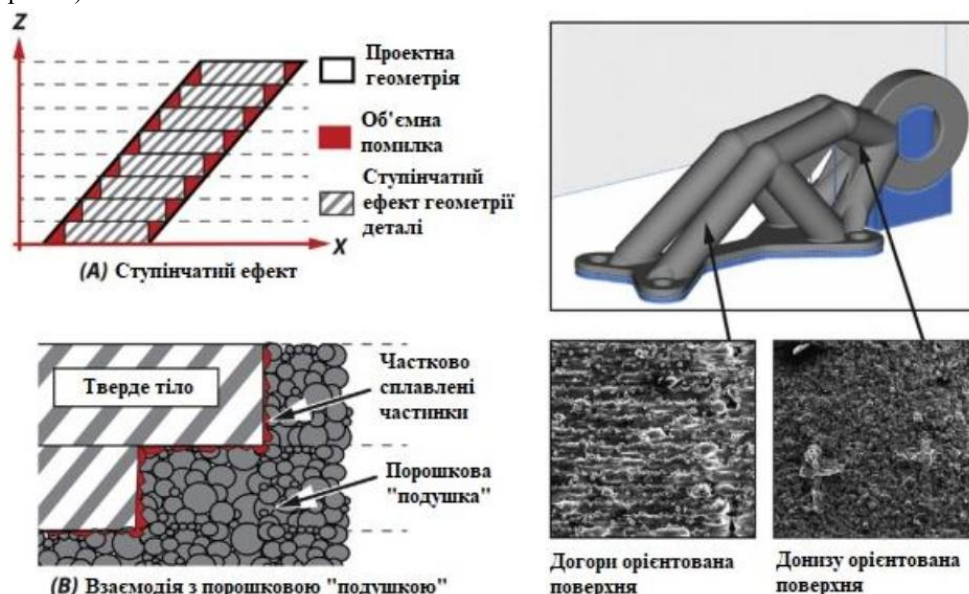


Рис. 2. Формування «ступінчатого» ефекту під у процесі виготовлення деталі із застосуванням технології L-PBF [6]

Це, у свою чергу, може впливати на експлуатаційні характеристики виробу та повинно враховуватися на ранніх етапах проєктування.

До обмежень технології слід віднести відносно низьку продуктивність у порівнянні з традиційними методами, що ускладнює її застосування у великосерійному виробництві. Крім того, геометричні розміри виробів обмежуються габаритами робочої камери установки (порядку $400 \times 400 \times 400$ мм), а також відсутністю уніфікованих стандартів контролю якості у процесі виготовлення.

Водночас експериментальні дослідження підтверджують можливість виготовлення тонкостінних конструкцій з товщиною стінки 0.3–0.4 мм методом L-PBF [7]. Це відкриває перспективи створення соплових насадків радіаційного охолодження зі значно покращеними масовими характеристиками порівняно з конструкціями, виготовленими за класичними технологіями.

Опис об'єкта дослідження, умов роботи та розрахункові випадки

Сопловий насадок рідинного ракетного двигуна являє собою тонкостінну оболонку, яка традиційно виготовляється із жароміцних матеріалів. Геометричний контур насадка відповідає профілю сопла Лавалю та визначається розрахунковими методами газодинаміки.

Оболонка повинна зберігати роботоздатність в умовах високих температур та дії високотемпературних продуктів згоряння.

У загальному випадку соплові насадки працюють як в умовах навколишнього середовища, так і у вакуумі. При роботі в умовах атмосфери різниця тисків між внутрішньою та зовнішньою поверхнями призводить до виникнення стискуючих напружень у стінці насадка, що може спричинити втрату стійкості тонкостінної оболонки та є одним із визначальних розрахункових випадків. Величина тисків, які приводять до втрати стійкості є незначною, що пов'язано з малою товщиною стінки соплового насадка. Цей розрахунковий випадок є вирішальним при оцінці роботоздатності конструкції. Проаналізуємо явища втрати стійкості в цих умовах на основі експериментальних досліджень.

Стійкість тонкостінних соплових насадків

Зменшення товщини соплового насадка, досягнуте застосуванням адитивних технологій, забезпечує підвищення його масової ефективності. Разом з тим такі конструкції характеризуються зниженою жорсткістю порівняно з класичними аналогами, що підвищує їх чутливість до втрати стійкості під дією експлуатаційних навантажень.

Під час роботи двигуна сопловий насадок зазнає значних термомеханічних навантажень, обумовлених впливом температури та зовнішнього тиску. У таких умовах можливий розвиток локальної або загальної втрати стійкості оболонки. Це призводить до порушення геометрії насадка та локальної зміни умов течії високоентальпійних продуктів згоряння, що може спричинити втрату роботоздатності конструкції.

У традиційних конструкціях підвищення стійкості досягається шляхом збільшення товщини оболонки або встановлення підсилюючих елементів типу бандажів, які забезпечують локальне підвищення жорсткості. Однак такі рішення супроводжуються суттєвим зростанням маси конструкції, що суперечить вимогам підвищення масової ефективності рідинних ракетних двигунів.

Таким чином виникає задача розробки конструктивних рішень, що забезпечують підвищення жорсткості тонкостінних соплових насадків, виготовлених із застосуванням адитивної технології L-PBF, без суттєвого збільшення їх маси. Для аналізу впливу конструктивних параметрів на стійкість доцільним є застосування методів чисельного моделювання, зокрема скінченно-елементного аналізу.

Експериментально-теоретичні особливості втрати стійкості конічного насадка

Насадок геометрично може бути описаний як конус змінної кривизни. Експериментальні дослідження впливу геометричної форми конуса на втрату стійкості під дією зовнішнього тиску проаналізовано в роботі [8]. В роботі описано ефект впливу меридіональної кривизни та меридіональної форми на навантаження втрати стійкості конічних оболонок з криволінійною формою. Насадок РРД може розглядатися, як конус з змінною кривизною, а залежності отримані для звичайного конуса є базовими для опису фізичної особливості втрати стійкості.

Експериментальний опис формозміни при втраті стійкості конуса постійної товщини під дією зовнішнього тиску показує наступні стадії формозміни, саме – початкова, критична, розвинена та руйнування [9, 10, 11].

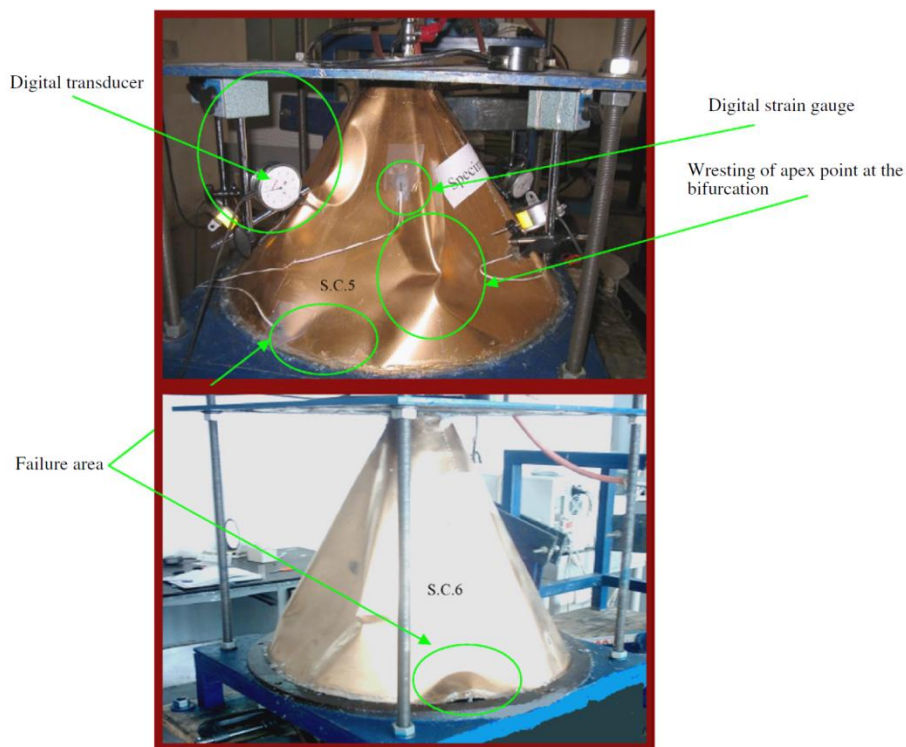


Рис. 3. Результати експериментального дослідження втрати стійкості конічних тонкостінних дослідних зразків [9]

Початковій стадії відповідає гладка поверхня, при цьому оболонка працює як мембранна система. Виникають: окружні стискаючі напруги та меридіональні напруги, а деформації малі. Геометрія поверхні залишається практично ідеальною.

При досягненні тиску рівного критичному з'являється локальна зона збурень, локальне зародження втрати стійкості та починається критична стадія формозміни. Початок зони зазвичай знаходиться в ділянці $x \approx$ від $0.6L$ до $0.9L$, де L – довжина утворюючої конічної оболонки. Ця зона розташована не біля вершини, а ближче до основи (більшого радіусу конусу). Це локальний кільцевий пояс, де виникає гофрування. Ширина зони приблизно дорівнює від $0.1L$ до $0.3L$. Як показано у роботах [9, 10] спочатку виникає локальний гофрований пояс, потім деформація поширюється, з'являються складні структури (концентричні складки, спіральні гребені). Початкове гофрування характеризується вузьким поясом дрібних складок, які рівномірно та розподілені по колу.



Рис. 4. Результати досліджень деформації дослідних зразків конічних оболонок з підсиленням твірної кільцевими елементами [10]

Розвиненій стадії формозміни відповідає посилене гофрування, при якому складки стають глибшими і різкішими. Гофри стають глибокими та нерівномірними з'являється ромбічна сітка, складки йдуть під кутом, а поверхня виглядає як «зім'ята фольга» або «луска».

Перехід від стійкості до руйнування відбувається миттєво і зазвичай одна область різко провалюється всередину, конус втрачає форму цілком з'являються перекіс і овальність. Він ініціюється дефектом чи локальним максимумом напружень.

На відміну від теорії [11, 12] експеримент показує хаотичність, асиметрію та локалізацію процесу втрати стійкості. Збільшити несучу здатність конічної оболонки можливо за рахунок посилення. Причому посилювати потрібно не весь конус, а локальний пояс за допомогою змінної товщини, кільцевих ребер або за допомогою синусоїдального посилення.

Слід зазначити, що ступінчасте посилення товщини призведе до концентрації напруження, ініціюватиме гофри і працюватиме як «дефект». Лінійна зміна товщини в залежності від радіусу не пригнічує локальні моди, не враховує гофрування та можливі недосконалості. Синусоїдальне посилення конічної оболонки – це умовний інженерний компроміс між теорією стійкості та реальною поведінкою оболонок. Такий вид підсилення буде більш доцільним тому, що:

по-перше, воно узгоджується з формою втрати стійкості [12]

$$w(x, \theta) = W \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cdot \cos(n\theta),$$

де $\sin$ змінюються вздовж твірної конуса L , тому посилення, що має ту саму форму, буде пригнічувати цю моду;

по-друге, функція синус є гладкою функцією з безперервними похідними, що визначає відсутність концентрації напружень у цьому посиленні. Не буде стрибків жорсткості та локальних напружень;

по-третє, така форма посилення дозволяє посилити лише небезпечну зону, не обтяжуючи всю оболонку.

Запропоноване синусоїдальне посилення «ламає» механізм втрати стійкості тому що збігається з формою гофри, змінює жорсткість по фазі і не дає розвинутися хвилі [11, 12].

Загальний закон синусоїдального посилення прийнятий у такому вигляді:

$$h(x) = h_{min} + A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - x_0)\right), \text{ де}$$

h_{min} – мінімальна товщина в безпечній зоні, яка визначається значенням зовнішнього тиску та технологічними обмеженнями, A – амплітуда посилення, x_0 – координата початку посилення, λ – період. Період λ пов'язаний із довжиною хвилі втрати стійкості [11, 12] визначається $\lambda \approx \pi\sqrt{Rh}$.

Прийнято наступний діапазон параметрів:

A – амплітуда посилення визначається в діапазоні $A \approx (0.3 \div 1.0) h_{min}$;

$\lambda \approx (0.5 - 1.5)\sqrt{Rh}$; $x_0 \approx 0.6L \div 0.8L$; кількість хвиль $m = \frac{L}{\lambda}$ вздовж твірної приймається від 8 до 10.

Інженерне рішення для створення тонкостінних соплових насадків з урахуванням особливостей технології виготовлення та фізики явища втрати стійкості

Варіант 1. За основу була взята модель насадку камери висотного двигуна тягою 2452.5 Н. Вихідна конструкція призначена для виготовлення класичними технологіями виробництва та обмежена значенням товщини стінки у 1 мм. Це обумовлює масу такого соплового насадку, що дорівнює приблизно 30% маси двигуна. Конструкція вихідного соплового насадку приведена на рисунку 5. Розміри соплового насадку нормалізовані до значення діаметра критичного перерізу камери двигуна $d_{кр}$.

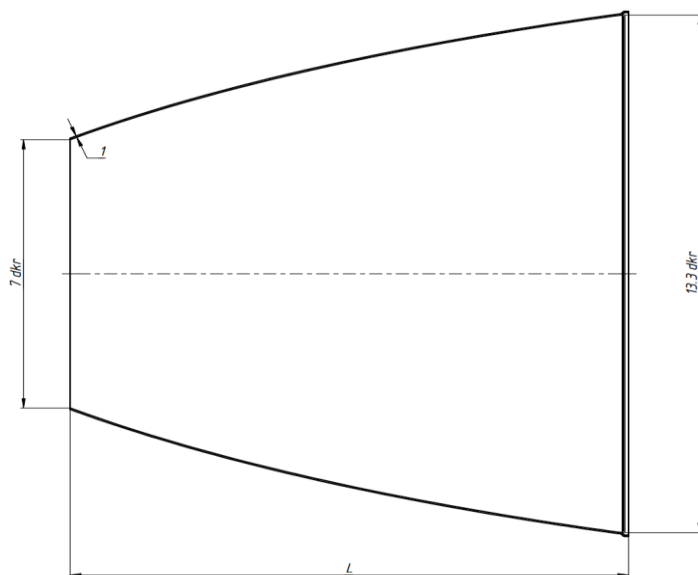


Рис. 5. Вихідна конструкція соплового насадку радіаційного охолодження, виготовленого традиційними технологіями

Варіант 2. З метою підвищення масової ефективності насадку радіаційного охолодження було розглянуто варіант конструкції зі зменшеним значенням товщини стінки у 0.5 разу. Таке рішення дозволило б відповідно знизити масу конструкції приблизно удвічі. Конструкція запропонованого насадку радіаційного охолодження для адитивного виробництва приведено на рисунку 6.

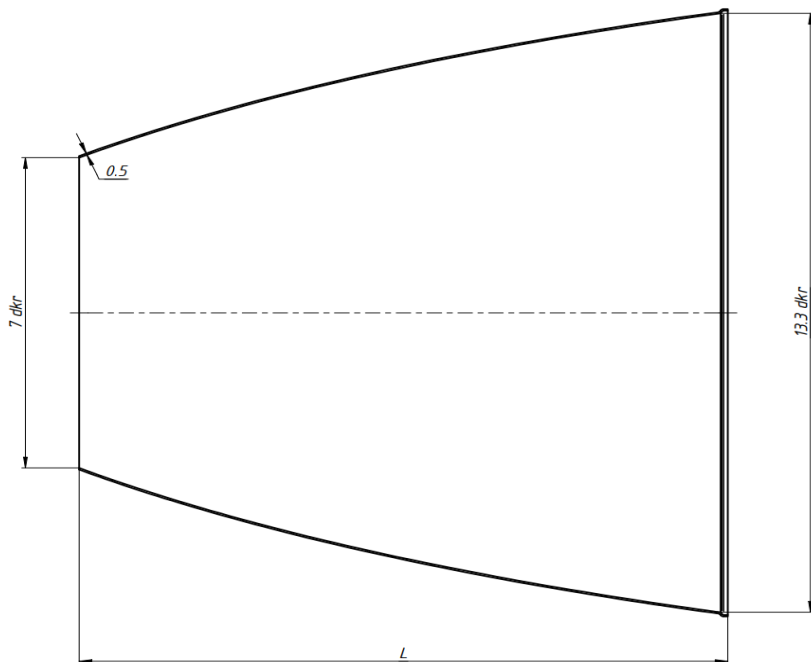


Рис. 6. Запропонована конструкція соплового насадку радіаційного охолодження зі зменшеною товщиною стінки для адитивного виробництва

Варіант 3. Після проведення попередньої оцінки жорсткості конструкції запропонованого насадку радіаційного охолодження було встановлено, що існує зона максимальних напружень на ділянці приблизно $0.3 L$. На цій ділянці реалізовано синусоїдальна зміна товщини. При цьому мінімальна товщина зменшена відносно товщини стінки та дорівнює 0.4 мм, а максимальна товщина – 0.9 мм. Кількість хвиль – 30 шт. Таке рішення зменшує масову ефективність на 7% відносно запропонованого гладкого варіанту з товщиною 0.5 мм для адитивного виробництва, однак позитивно впливає на коефіцієнт стійкості.

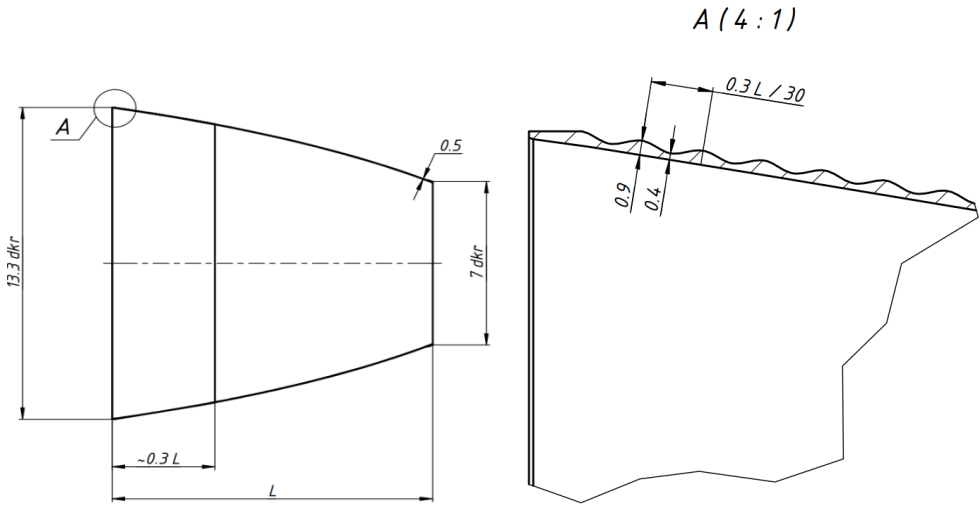


Рис. 7. Запропонований варіант підсилення соплового насадку у місці виникнення максимальних напружень

Результати чисельного експерименту

Проведено моделювання запропонованих варіантів конструкції соплових насадків радіаційного охолодження. Розрахункова схема приведена на рисунку 8.



Рис. 8. Розрахункова схема проведення чисельного експерименту

Отримані результати розподілу деформацій приведені на рисунку 9.

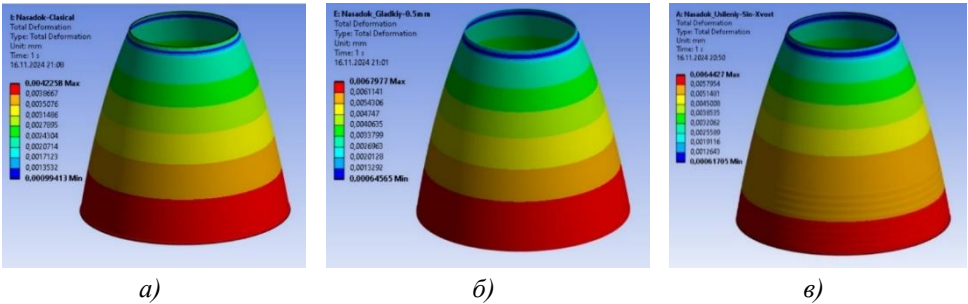


Рис. 9. Розподіл деформації у запропонованих варіантах насадків радіаційного охолодження: а) варіант 1 – класичний; б) варіант 2 – полегшений гладкий для адитивного виробництва; в) варіант 3 – посилений для адитивного виробництва

На рисунку 10 приведені результати оцінки коефіцієнтів запасу стійкості розгляданих варіантів конструкції.

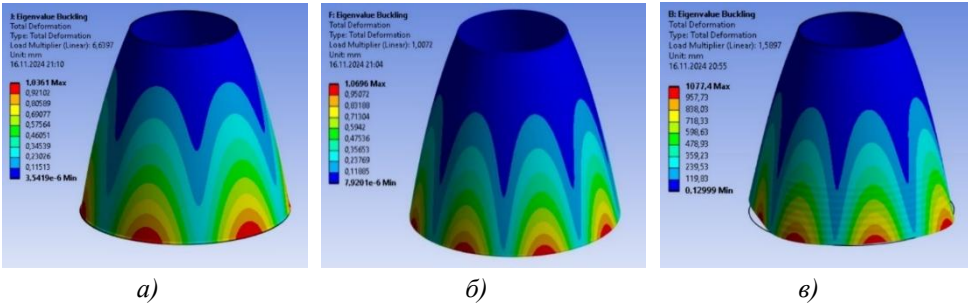


Рис. 10. Отримані результати розрахунку коефіцієнту запасу стійкості запропонованих конструкцій соплових насадків радіаційного охолодження: а) варіант 1 – класичний; б) варіант 2 – полегшений гладкий для адитивного виробництва; в) варіант 3 – посилений для адитивного виробництва

Отримані результати відображені у таблиці 1. При цьому, значення маси насадків нормалізовані до маси вихідного варіанту.

Таблиця 1.

Отримані параметри насадків запропонованих варіантів конструкції насадків радіаційного охолодження

Варіант	Товщина стінки, мм	Кількість хвиль посилення, шт.	Нормалізована маса	Коефіцієнт запасу стійкості
Варіант 1	1	-	1	6.6
Варіант 2	0.5	-	0.51	1
Варіант 3	змінна	30	0.58	1.59

Висновки

Отримані результати демонструють перспективність застосування адитивної технології L-PBF для виготовлення соплових насадків радіаційного охолодження

рідинних ракетних двигунів. Використання даної технології дозволяє реалізовувати конструкції високої геометричної складності, які є складними або практично неможливими для виготовлення традиційними методами, а також забезпечує суттєве зниження маси конструкції за рахунок зменшення товщини стінки до 0.4–0.5 мм.

За результатами чисельного моделювання встановлено, що гладкий варіант соплового насадка з зменшеною товщиною у два рази у порівнянні з традиційним характеризується коефіцієнтом запасу стійкості, близьким до критичного значення, що не забезпечує необхідного інженерного запасу стійкості при експлуатаційних навантаженнях. Врахування особливостей технології виготовлення та фізики явища втрати стійкості дозволило сформулювати інженерне рішення підвищення стійкості такої конструкції.

Показано, що підвищення стійкості конструкції може бути досягнуте шляхом локальної модифікації зовнішнього контуру насадка на найбільш навантажених ділянках із використанням гармонічного закону зміни твірної. Розглянуті варіанти конструкцій показали, що можливо зменшити масу традиційної конструкції. Запропоноване конструктивне рішення дозволяє підвищити коефіцієнт запасу стійкості у 1.59 рази порівняно з варіантом зменшеної товщини, при збільшенні маси конструкції приблизно на 12%. Заміна традиційного насадка запропонованим з посиленням дозволяє зменшити вагу конструкції на 42%.

Подальші дослідження доцільно спрямувати на параметричну оптимізацію геометрії конструкції, а також експериментальну верифікацію отриманих чисельних результатів на фізичному зразку.

1. Vekilov S. Comparison and analysis between conventional and additive manufacturing technologies of LPRE [Електронний ресурс] / Samir Vekilov, Volodymyr Lipovskyi // System Design and Analysis of Aerospace Technique Characteristics. – 2022. – Т. 31, № 2. – С. 14–25. – Режим доступу: <https://doi.org/10.15421/472210> – Назва з екрана.
2. Gradl, P., Teasley T. Advancing GRCoP-based Bimetallic Additive Manufacturing to Optimize Component Design and Applications for Liquid Rocket Engines. AIAA 2021, <https://doi.org/10.2514/6.2021-3231>.
3. Advancing GRCoP-based Bimetallic Additive Manufacturing to Optimize Component Design and Applications for Liquid Rocket Engines [Електронний ресурс] / Paul R. Gradl [та ін.] // AIAA Propulsion and Energy 2021 Forum, Virtual event. – Reston, Virginia, 2021. – Режим доступу: <https://doi.org/10.2514/6.2021-3231> (дата звернення: 15.09.2023). – Назва з екрана.
4. GRCoP-42 Development and Hot-fire Testing Using Additive Manufacturing Powder Bed Fusion for Channel-cooled Combustion Chambers [Електронний ресурс] / Paul R. Gradl [та ін.] // AIAA Propulsion and Energy 2019 Forum, Indianapolis, IN. – Reston, Virginia, 2019. – Режим доступу: <https://doi.org/10.2514/6.2019-4228> (дата звернення: 15.09.2023). – Назва з екрана.
5. Gradl, P., Mireles, O. Additive Manufacturing (AM) for Propulsion Component and System Applications. Team Redstone Additive Manufacturing IPT Meeting, May 21, 2021. Режим доступу: https://ntrs.nasa.gov/api/citations/20210016065/downloads/Redstone_IPT_NASA_A

- M-Components_Gradl-Mireles_25-May-2021.pdf (дата звернення: 03.05.2026). – Назва з ек-рана.
6. Sames WJ, List FA, Pannala S, Dehoff RR, Babu SS. The metallurgy and processing science of metal additive manufacturing. *Int Mater Rev* 2016;61(5):315 <https://doi.org/10.1080/09506608.2015.1116649>
 7. Geometric Feature Reproducibility for Laser Powder Bed Fusion (L-PBF) Additive Manufacturing with Inconel 718 [Електронний ресурс] / Paul R. Gradl [та ін.] // *Additive Manufacturing*. – 2021. – С. 102305. – Режим доступу: <https://doi.org/10.1016/j.addma.2021.102305> (дата звернення: 15.09.2023). – Назва з ек-рана.
 8. Zhu Y., Yu J., Guan W., Tang W., Yue L., Zhang J. Effects of the geometrical shapes on buckling of conical shells under external pressure // *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. – 2022. – Vol. 196. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2022.104624>
 9. Golzan B. S., Showkati H. Buckling of thin-walled conical shells under uniform external pressure // *Thin-Walled Structures*. – 2008. – Vol. 46. – P. 516–529. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2007.10.011>
 10. Ross C. T. F., Little A. P. F., Adeniyi K. A. Plastic buckling of ring-stiffened conical shells under external hydrostatic pressure // *Ocean Engineering*. – 2005. – Vol. 32. – P. 21–36. – DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2004.05.007>
 11. Bower A. F. *Applied Mechanics of Solids*. – 2nd ed. – Boca Raton : CRC Press, 2025. – 752 p. – ISBN 978-1041019954.
 12. Jawad M. H. *Theory and Design of Plate and Shell Structures*. – London : Chapman & Hall, 1994. – 344 p.

Математичні моделі для оцінки міцності елементів кульшового суглоба людини при експлуатаційних навантаженнях

Д. В. Горобець, М. Б. Соболевська

Інститут технічної механіки Національної академії наук України і Державного космічного агентства України, Дніпро, Україна

sobolevskaya1609@gmail.com

Метою досліджень є розробка на основі даних комп'ютерної томографії скінченно-елементних моделей для оцінки при експлуатаційних навантаженнях напружено-деформованого стану (НДС) елементів кульшового суглоба до та після операції тотального ендопротезування. З використанням даних комп'ютерної томографії розроблено скінченно-елементну модель для дослідження НДС елементів здорового кульшового суглоба при стоянні людини на двох ногах. Розроблено скінченно-елементні моделі для оцінки НДС елементів кульшового суглоба на різних стадіях після операції тотального ендопротезування з використанням безцементного ацетабулярного компонента, запресованого методом цільної посадки "Press-fit" у вертлюжну западину, яка немає дефектів. В цих моделях враховано безфрикційний контакт "поверхня-поверхня" між голівкою ендопротеза кульшового суглоба і вкладишем ацетабулярного компонента, фрикційний контакт між металевим корпусом і вкладишем, а також контакт з сумісним переміщенням контактуючих поверхонь кісткових тканин при їх взаємодії між собою. Результати роботи будуть використані в подальшому при розробці рекомендацій з вибору конструкцій ацетабулярних компонентів, які забезпечать стабільну роботу ендопротеза кульшового суглоба.

Ключові слова: скінченно-елементна модель, напружено-деформований стан, контактна взаємодія, тотальне ендопротезування кульшового суглоба.

Вступ

На теперішній час в умовах воєнного стану при наявності великої кількості поранених, зокрема з важкими ураженнями кульшових суглобів, єдиним способом повернути дієздатність людини, покращити якість її життя є своєчасна операція тотального ендопротезування. Математичне моделювання напружено-деформованого стану елементів кульшового суглоба в експлуатації до та після операції дозволить розробити біомеханічно обґрунтовані рекомендації щодо ендопротезування кульшового суглоба в залежності від патології вертлюжної западини. Сучасними тенденціями в ендопротезуванні кульшового суглоба є розробка нових конструкцій ендопротезів; удосконалення способів фіксації компонентів ендопротеза; розвиток технологій створення індивідуального ендопротеза шляхом побудови віртуальних 3D моделей тазових кісток з використанням результатів томографічних досліджень, що дозволяють визначити зосередження та розміри кісткових пошкоджень, оцінити якість кісткових тканин та розробити персональну ацетабулярну систему з урахуванням особливостей її фіксації [1 – 5].

Метою досліджень є розробка на основі даних комп'ютерної томографії скінченно-елементних моделей для оцінки НДС елементів кульшового суглоба до та після тотального ендопротезування при експлуатаційних навантаженнях.

1. Математичне моделювання НДС елементів кульшового суглоба

Розрахунок методом скінчених елементів напружено-деформованого стану елементів кульшового суглоба при дії статичних навантажень зводиться до розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, визначення вузлових переміщень, деформацій скінчених елементів, обчислення еквівалентних напружень σ_e та порівняння їх максимальних значень з допустимими $[\sigma]$.

Розроблено алгоритм побудови геометричної моделі кульшового суглоба людини з використанням даних комп'ютерної томографії. За цим алгоритмом побудовано 3D геометричну модель (рис. 1), яка включає крижову кістку хребтового стовпа, клубову, сідничу, лобову кістки, кульшову западину на бічній поверхні тазової кістки та головку стегнової кістки кульшового суглоба.

Розроблено скінченно-елементну модель 1 для дослідження НДС елементів здорового кульшового суглоба при стоянні людини на двох ногах. Скінченно-елементну схему для цієї моделі наведено на рис. 1.

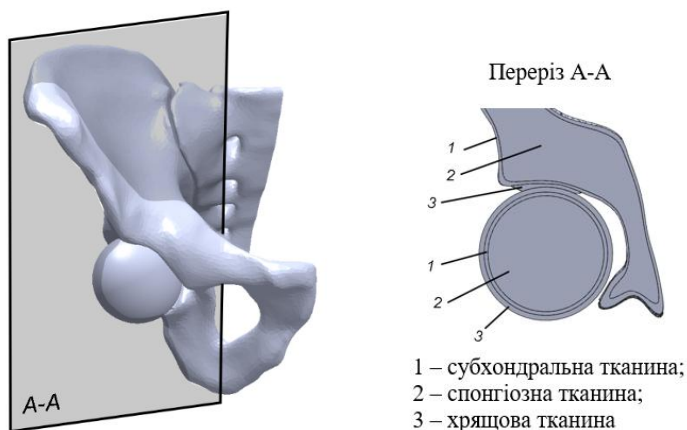


Рис. 1. 3D геометрична модель кульшового суглоба

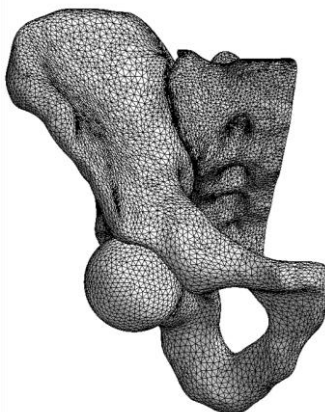


Рис. 2. Скінченно-елементна схема для моделі 1

Вона складається з 253673 об'ємних 4-х вузлових елементів тетраедральної форми з характерним розміром ребра 3 мм. В скінченно-елементній моделі 1

враховано безфрикційний контакт “поверхня-поверхня” між голівкою стегнової кістки і поверхнею вертлюжної западини, а також контакт з сумісним переміщенням контактуючих поверхонь субхондральних, спонгіозних та хрящових тканин кульшового суглоба при їх взаємодії між собою.

Фізико-механічні параметри матеріалів для скінченно-елементної моделі 1, наведено в табл. 1, де використано такі позначення: E – модуль Юнга другого роду; $[\sigma]$ – допустиме напруження для кісткової тканини; μ – коефіцієнт Пуассона.

Таблиця 1.

Параметри матеріалів кісткових та хрящових тканин

Найменування	E , МПа	$[\sigma]$, МПа	μ
Субхондральна тканина	18350	150	0,3
Спонгіозна тканина	330	25	0,3
Хрящова тканина	10,5	–	0,49



Рис. 3. Схема граничних обмежень та навантажень

Враховано навантаження на тазову кістку при стоянні людини на двох ногах [6]. При середньостатистичному значенні маси тіла людини чоловічої статті 80 кг вертикальні навантаження $F_1 = 262$ Н та $F_2 = 105$ Н на один суглоб. Навантаження F_1 рівномірно розподілене по поверхні шару, який спрощено моделює голівку стегнової кістки (рис. 3). Навантаження F_2 рівномірно розподілене по поверхні тазової кістки.

2. Математичне моделювання НДС елементів кульшового суглоба на різних стадіях після операції тотального ендопротезування

Розроблено скінченно-елементні моделі 2–4 (далі моделі) для оцінки НДС елементів кульшового суглоба на різних стадіях після операції тотального ендопротезування з використанням безцементного ацетабулярного компонента,

запресованого методом щільної посадки “Press-fit” у вертлюжну западину, яка немає дефектів.

Ацетабулярний компонент складається із зовнішнього металевого корпусу і закріпленого усередині спеціального вкладиша. Під час операції після установки в оброблену фрезою вертлюжну западину металевого корпусу в нього вставляється і блокується вкладиш, усередині якого відбувається обертання головки ендопротеза. Після обробки вертлюжної западини на її дні можуть залишатися або бути відсутні фрагменти субхондральної тканини.

Розглянуто дві стадії після операції:

- початкова стадія, коли установка ендопротеза тільки відбулася;
- стадія повного загоєння після встановлення ендопротеза.

На початковій стадії розглянуто варіанти установки ендопротеза з урахуванням наявності або відсутності фрагментів субхондральної тканини на дні вертлюжної западини. На стадії повного загоєння враховано адгезію, тобто “вростання” субхондральної тканини вертлюжної западини в поверхню ацетабулярного компонента.

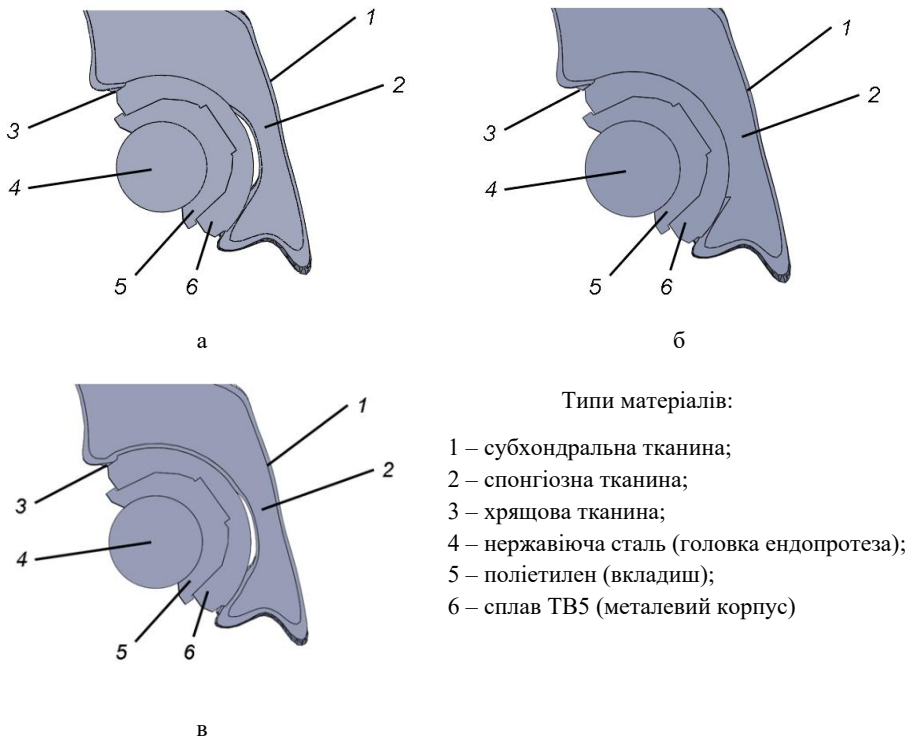


Рис. 4. Перерізи А-А кульшового суглоба з ендопротезом на різних стадіях після операції: а) – початкова стадія після операції ендопротезування при наявності фрагментів субхондральної тканини на дні вертлюжної западини; б) – початкова стадія після операції ендопротезування при відсутності фрагментів субхондральної тканини на дні вертлюжної западини; в) – стадія повного загоєння після встановлення ендопротеза.

Загальний вид скінчено-елементних схем для моделей 2 – 4 однаковий (рис. 5), а скінчено-елементні схеми зони вертлюжної западини для моделей 2 – 4 показано на рис. 6.



Рис. 5. Загальний вид скінчено-елементних схем для моделей 2 – 4

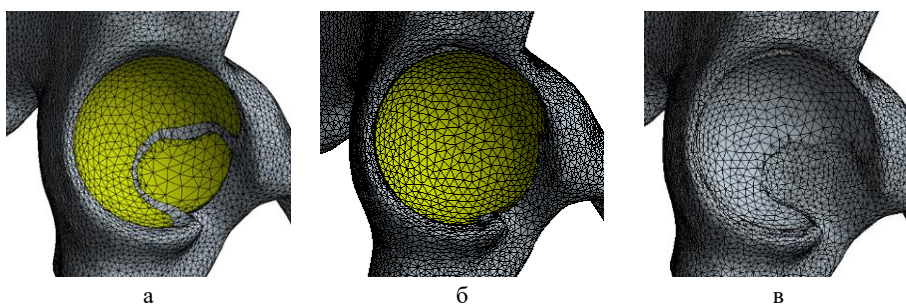


Рис. 6. Скінчено-елементні схеми зони вертлюжної западини для різних моделей: а – модель 2; б – модель 3; в – модель 4.

Фізико-механічні параметри матеріалів для моделей 2 – 4, наведено в табл. 1 – 2.

Таблиця 2

Параметри матеріалів ендопротеза

Найменування	E , МПа	$[\sigma]$, МПа	μ
Нержавіюча сталь Х18Н9Т	230000	580	0,3
Титановий сплав ВТ5	106000	800	0,3
СВМПЭ марки “Хирулен”	500	30	0,3

В моделях 2 – 4 враховано безфрикційний контакт “поверхня-поверхня” між голівкою ендопротеза кульшового суглоба і вкладишем ацетабулярного компонента, фрикційний контакт між металевим корпусом і вкладишем, а також контакт з сумісним переміщенням контактуючих поверхонь кісткових тканин при їх взаємодії між собою. В моделях 2 – 3 контактну взаємодію між металевим корпусом та кістковими тканинами дна вертлюжної западини враховано як фрикційний контакт (коефіцієнт

тертя дорівнює 0,2), а в моделі 4 – як контакт з сумісним переміщенням контактуючих поверхонь.

Моделі 2 і 3 призначено для дослідження НДС елементів кульшового суглоба на початковій стадії після операції з урахуванням відповідно присутності або відсутності на дні вертлюжної западини фрагментів субхондральної тканини.

Модель 4 призначена для аналізу НДС елементів кульшового суглоба на стадії повного загоєння після встановлення ендопротеза.

3. Результати досліджень

З використанням скінченно-елементної моделі 1 дано оцінку НДС елементів кульшового суглоба та проведено детальний аналіз контактної взаємодії кульшової западини з головкою стегнової кістки. Результати наведено на рис. 7.

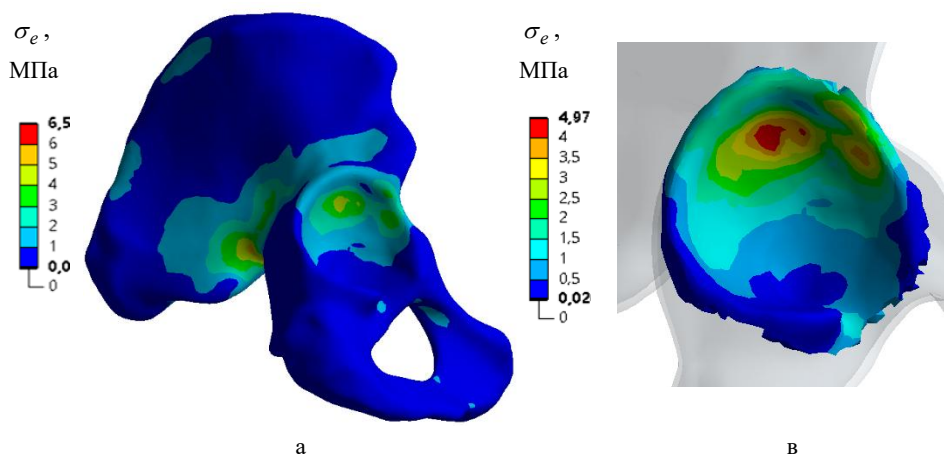


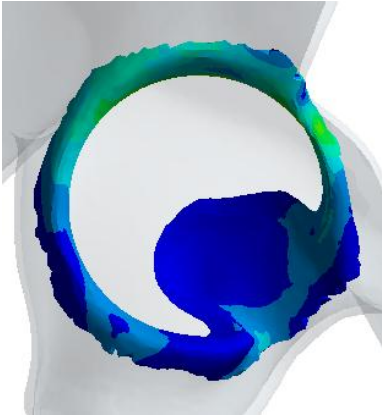
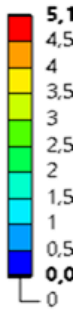
Рис. 7. НДС елементів субхондральної тканини кульшового суглоба (модель 1): а – загальний вид; б – зона вертлюжної западини.

Встановлено, що значення максимальних еквівалентних напружень як в субхондральній, так і в спонгіозній тканинах в зоні контактної взаємодії головки стегнової кістки з вертлюжною западиною дорівнюють відповідно 5 МПа та 0,3 МПа, що значно нижче допустимих напружень.

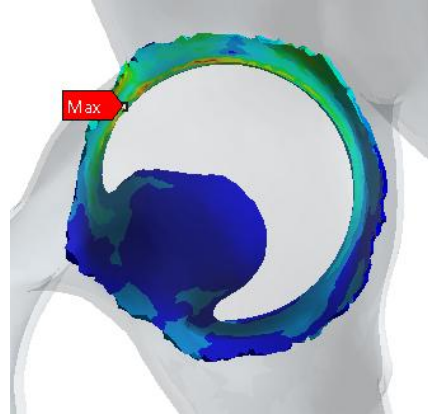
Результати досліджень з використанням моделей 2 – 4 наведено на рис. 8, де показано НДС елементів кісткових тканин в зоні вертлюжної западини при експлуатаційному навантаженні на початковій стадії після операції з урахуванням присутності (модель 2) або відсутності (модель 3) на дні вертлюжної западини фрагментів субхондральної тканини, а також на стадії повного загоєння після операції з урахуванням великої адгезії, що відбулася (модель 4).

Встановлено, що наявність фрагментів субхондральної тканини на дні вертлюжної западини є кращим варіантом ніж їх відсутність з точки зору менших напружень в елементах субхондральної тканини при стоянні людини на двох ногах на початковій стадії після операції. Показано, що на стадії повного загоєння після операції НДС елементів кісткових тканин кульшового суглоба при розглянутому навантаженні наближається до НДС здорового суглоба.

σ_e , МПа



а

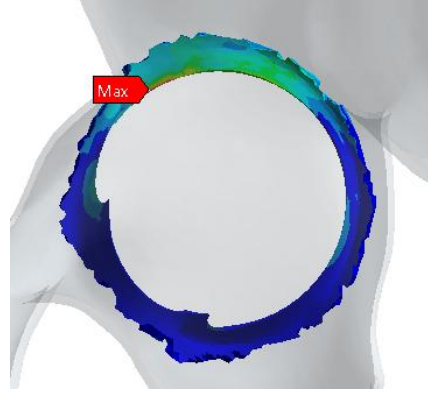


б

σ_e , МПа

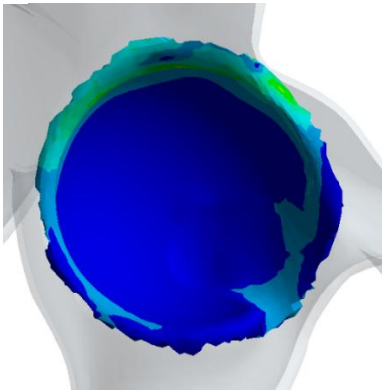
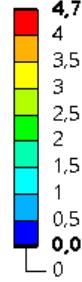


в

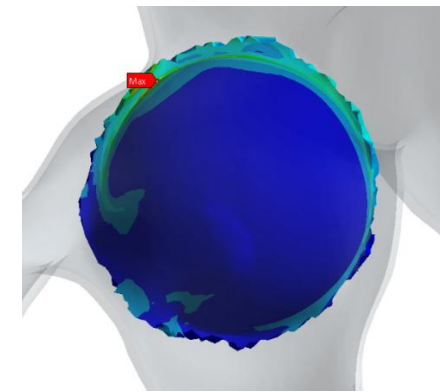


г

σ_e , МПа



д



е

Рис. 8. НДС елементів субхондральної тканини кульшового суглоба в зоні вертлюжної западини: а і б – (модель 2); в і г – (модель 3); д і е – (модель 4); а, в, д – вид з боку головки ендопротеза; б, г, е – вид з боку тазової кістки.

Висновки

Розроблено алгоритм побудови 3D геометричної моделі кульшового суглоба людини з використанням даних комп'ютерної томографії. Розроблено скінченно-елементну модель для дослідження напружень в елементах здорового кульшового суглоба при стоянні людини на двох ногах. Розроблено скінченно-елементні моделі для оцінки міцності елементів кульшового суглоба на різних стадіях після операції тотального ендопротезування з використанням безцементного ацетабулярного компонента, запресованого методом щільної посадки “Press-fit” у вертлюжну западину, яка немає дефектів. В цих моделях враховано безфрикційний контакт “поверхня-поверхня” між голівкою ендопротеза кульшового суглоба і вкладишем ацетабулярного компонента, фрикційний контакт між металевим корпусом і вкладишем, а також контакт з сумісним переміщенням контактуючих поверхонь кісткових тканин при їх взаємодії між собою. На початковій стадії після операції контактну взаємодію між металевим корпусом та кістковими тканинами дна вертлюжної западини враховано як фрикційний контакт, а на стадії повного загоєння з урахуванням великої адгезії, що відбулася, – як контакт з сумісним переміщенням контактуючих поверхонь.

Результати роботи будуть використані в подальшому при розробці рекомендацій з вибору конструкцій ацетабулярних компонентів, які забезпечать стабільну роботу ендопротеза кульшового суглоба.

1. Exploring Recent Trends and Innovations in Total Hip Arthroplasty (2025) <https://orthospinenews.com/2025/06/23/exploring-recent-trends-and-innovations-in-total-hip-arthroplasty/>
2. О. Є. Лоскутов, О. Є. Олійник, О. О. Лоскутов, Д. А. Синегубов, Розвиток національного ендопротезування суглобів (результати 30-річних досліджень), *Трансплантація та штучні органи*, № 2 (03), 37–50 (2021). [https://doi.org/10.30702/transpaorg/10_21.2710/0437-50/451.30\(477\)](https://doi.org/10.30702/transpaorg/10_21.2710/0437-50/451.30(477))
3. І. А. Лазарев, В. Ю. Костюк, А. Г. Дєдков, М. В. Скибан, Біомеханічне комп'ютерне моделювання поведінки системи “кістка – фіксатор – ендопротез” при різних видах внутрішньої геміпельвектомії, *Травма*, 19, № 6, 28–36 (2018). <https://doi.org/10.22141/1608-1706.6.19.2018.152218>
4. С. Є. Бондаренко, Ендопротезування в разі наслідків травм кульшової западини та проксимального відділу стегнової кістки: дис. ... д-ра мед. наук, 382 (2018). https://sytenko.org.ua/wp-content/uploads/thesis/Bondarenko_SE_Thesis.pdf.
5. C. Ma, T. Du, X. Niu, Yu. Fan, Biomechanics and mechanobiology of the bone matrix, *Bone Research*, **10** (59) (2022). <https://doi.org/10.1038/s41413-022-00223-y/>
6. S. Plagenhoef, F. G. Evans, T. Abdelnour, Anatomical data for analyzing Human Motion *Research Quarterly for Exercise and sport*, **54** (2), 169–178 (1983).

Прогнозування границі міцності пластиків, виготовлених адитивним методом, за допомогою алгоритмів машинного навчання

О. І. Моргун¹, П.В. Яковчук, С. М. Шукаєв

Національний технічний університет України «КПІ ім. Ігоря Сікорського», Київ, Україна

¹ o.morhun-km@lil.kpi.ua

Аддитивне виробництво, зокрема 3D-друк, відкриває унікальні можливості для створення деталей складної геометрії. Механічні характеристики таких виробів суттєво залежать від параметрів процесу: висоти шару, орієнтації та швидкості друку, температури екструзії та умов постобробки. Це зумовлює необхідність розробки моделей для прогнозування взаємозв'язків між параметрами виготовлення та властивостями матеріалу. Традиційні методи оцінки базуються на натурних випробуваннях та статистичному аналізі, що за умови великої кількості змінних факторів та їхньої нелінійної взаємодії потребує значних часових і матеріальних витрат. Машинне навчання розширює можливості галузі, дозволяючи ефективно прогнозувати та оптимізувати властивості матеріалів.

У дослідженні проведено порівняльну оцінку чотирьох моделей машинного навчання – регресії на основі гауссівського процесу, нейронних мереж, методу опорних векторів та ансамблевих методів – для прогнозування границі міцності 3D-друкованих полімерів PLA, ABS та PA6-CF10. Моделі, навчені на базі 557 експериментальних значень, продемонстрували високу точність. Найкращі результати показала регресія гауссівського процесу, забезпечивши найнижчу середньоквадратичну помилку та найвищий коефіцієнт детермінації на тестовій вибірці.

Ключові слова: адитивне виробництво, 3-Д друк, механічні властивості, параметри друку, машинне навчання, полімерні композиційні матеріали

Вступ. Адитивні технології, зокрема 3-Д друк деталей із полімерних матеріалів, останніми роками набули значного поширення в машинобудуванні, авіаційній галузі, медицині та виробництві функціональних прототипів. Одним із найбільш доступних і поширених методів є пошарове наплавлення матеріалу (FDM), яке забезпечує можливість виготовлення виробів складної геометрії при відносно низькій собівартості та мінімальних відходах матеріалу [1,2].

Разом з тим механічні властивості деталей, виготовлених методом FDM, суттєво залежать від режимів друку та умов формування структури матеріалу. На границю міцності виробів впливають такі параметри друку, як температура сопла, висота шару, швидкість друку, щільність заповнення, орієнтація зразка відносно площини друку, ширина екструзії та інші параметри. Крім того, пошарова природа формування деталей зумовлює анізотропію властивостей виробів [3,4].

Традиційне визначення впливу параметрів друку на механічні характеристики базується на натурних випробуваннях та статистичному аналізі експериментальних даних. Однак за великої кількості змінних факторів та їх нелінійної взаємодії такий підхід потребує великого обсягу експериментальних досліджень [5].

У зв'язку з цим перспективним напрямом є застосування методів машинного навчання, які здатні виявляти складні багатофакторні залежності між параметрами друку та механічними характеристиками виробів без явного задання аналітичної форми функції відгуку. Огляд сучасних досліджень свідчить про зростання

ефективності алгоритмів машинного навчання у задачах прогнозування властивостей матеріалів і оптимізації процесів адитивного виробництва [6-9]. Зокрема показано, що такі моделі можуть забезпечувати високу точність прогнозування границі міцності 3D-друкованих деталей [10].

Метою даної роботи є порівняльний аналіз моделей машинного навчання для прогнозування границі міцності 3D-друкованих полімерів PLA, ABS та PA6-CF10. Для цього досліджено моделі регресії гауссівського процесу, штучної нейронної мережі, ансамблевого методу та методу опорних векторів.

1. Створення набору даних для машинного навчання

Для створення моделей машинного навчання та їх порівняльного аналізу було створено датасет, який включає результати випробувань на розтяг зразків з поліаміду PA6-CF10 (армованого вуглецевим волокном з масовою часткою 10%), виконаних авторами, та результати випробувань зразків з PLA та ABS, взятих з літературних джерел.

Шість партій зразків (сумарно 52 зразки) з PA6-CF10 були надруковані на 3D принтері Bambu Lab P1S. Геометричні розміри зразка (Рисунок 1) відповідають стандарту ДСТУ EN ISO 527-2:2018.

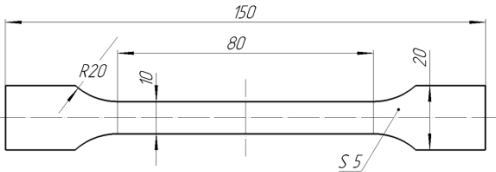


Рис. 1. Геометричні розміри зразка для випробувань на розтяг

Фіксовані та змінні параметри друку наведено в Таблиці 1. Випробування на розтяг було проведено на універсальній випробувальній машині MRM-10T.

Таблиця 1.

Параметри друку зразків з PA6-CF10

Параметр друку	Значення
Площина друку	XY, XZ
Малюнок заповнення	Концентричний
Кількість периметрів	0
Температура сопла, °C	260, 270, 280, 290
Швидкість друку, мм/с	100
Щільність заповнення, %	100
Висота шару друку, мм	0,2
Ширина екструзії, мм	0,4

Середні значення границі міцності та стандартні відхилення для кожної партії зразків наведено у Таблиці 2.

Посилання на випробування інших авторів наведено у Таблиці 3.

Сформований датасет містить 13 предикторів:

- характеристики філаменту: густина, границя міцності, модуль Юнга, максимальне відносне видовження;

- геометричні та орієнтаційні параметри: кут між зусиллям та площиною друку, два растрових кути;
- технологічні параметри друку: товщина периметрів, температура сопла, щільність заповнення, швидкість друку, товщина шару та ширина екструзії.

Таблиця 2.

Середнє значення границі міцності та її стандартне відхилення

Партія зразків	Границя міцності	
	Середнє значення, МПа	Стандартне відхилення, МПа
XY, T=290 °C	65,71	2,96
XY, T=280 °C	62,6	4,66
XZ, T=280 °C	55,67	2,54
XY, T=270 °C	61,38	2,11
XZ, T=260 °C	57,16	1,86
XY, T=260 °C	56,53	3,89

Таблиця 3.

Метадані

Матеріал	Джерело	Автор	Рік
ABS	[11]	Panico et al.	2025
PLA	[12]	Gao et al.	2022
ABS	[13]	Özkül et al.	2025
PLA	[14]	Wang et al.	2024
PLA	[15]	Tang et al.	2020
PLA	[16]	Wang et al.	2020
PLA	[17]	Salim et al.	2019
ABS	[17]	Salim et al.	2019
PLA	[18]	Yao et al.	2020
PLA	[19]	Fernandes	2016
PLA	[20]	Khosravani et al.	2022
PLA	[21]	Biglete et al.	2021

За функцію відгуку обрано границю міцності надрукованого зразка. Остаточна вибірка складається з 557 експериментальних значень, отриманих за різних параметрів друку. Діапазони варіювання предикторів та значень відгуку наведено в Таблиці 4.

Оскільки значення предикторів не є одного порядку, то для спрощення створення більш якісної моделі машинного навчання ці значення було нормалізовано за наступним принципом:

$$X_{norm} = \frac{X - X_{min}}{X_{max} - X_{min}},$$

де X – фактичне значення предиктора; X_{min} – мінімальне значення цього предиктора для всього датасету; X_{max} – максимальне значення цього предиктора для всього датасету.

Наступним етапом була рандомізація порядку даних для усунення систематичних похибок, пов'язаних із групуванням значень за джерелами запозичення, та покращення репрезентативності вибірки.

Після рандомізації датасет було розділено на тренувальну та тестову вибірки. Перші 501 значення використовувалися для навчання моделей машинного навчання, тобто для встановлення залежності між предикторами та функцією відгуку. Решта 56 значень (приблизно 10 % від загального обсягу датасету) формували тестову вибірку, яка використовувалася для оцінки точності та адекватності створених моделей.

Таблиця 4.

Межі варіювання значень предикторів та відгуку

<i>Предиктор</i>		<i>Межі варіювання значень</i>
Характеристики філаменту	Густина філаменту, кг/м ³	1050...1250
	Модуль Юнга філаменту, МПа	3000...5800
	Границя міцності філаменту, МПа	40...60
	Максимальне відносне видовження філаменту, мм/мм	0,07...0,5
Параметри друку	Кут прикладання навантаження до площини друку, °	0...90
	Растровий кут 1, °	0...45
	Растровий кут 2, °	-45...90
	Товщина периметрів, мм	0...3
	Температура сопла, °C	190...290
	Щільність заповнення, %	20...100
	Швидкість друку, мм/с	10...100
	Висота шару друку, мм	0,05...0,4
	Ширина екструзії, мм	0,2...0,8
<i>Відгук</i>		
Границя міцності зразка, МПа		8,256...67,84

Для підвищення надійності навчання тренувальну вибірку було додатково розділено на 5 частин для проведення п'ятикратної крос-валідації. За цим підходом модель послідовно навчалася на чотирьох підвбірках та перевірялася на п'ятій, після чого процедура повторювалася для всіх можливих комбінацій. Такий підхід дозволяє зменшити ризик перенавчання моделі та забезпечити більш об'єктивну оцінку її узагальнювальної здатності за критерієм мінімального значення середньоквадратичної похибки прогнозування функції відгуку.

2. Опис моделей машинного навчання

Методи ML поділяють на навчання з учителем, без учителя та з підкріпленням. Навчання з учителем зазвичай застосовується для таких завдань, як регресія та класифікація. Популярні алгоритми з учителем включають ансамблі дерев рішень та методи опорних векторів, відомі своєю стійкістю та точністю обробки структурованих даних. Водночас штучні нейронні мережі (ANN) ефективно виявляють складні нелінійні зв'язки у великих масивах даних. Загалом, ML надає потужні інструменти для прийняття рішень на основі даних, зокрема і у контексті оптимізації параметрів 3D-друку [6].

Для прогнозування границі міцності 3D-друкованих пластиків у роботі використано чотири сучасні алгоритми машинного навчання: Вибір алгоритмів зумовлений їхньою популярністю, відносною простотою, здатністю описувати нелінійні багатофакторні залежності та забезпечувати високу точність прогнозу.

Регресія гауссівського процесу (GPR) – це непараметрична ймовірнісна модель, у якій залежність між вхідними параметрами та цільовою змінною описується як випадковий процес із заданою коваріаційною функцією. Перевагою підходу є висока точність на малих і середніх вибірках, а також можливість одночасно отримувати прогноз і оцінку його невизначеності.

Штучна нейронна мережа (ANN) є багатошаровою системою взаємопов'язаних нейронів. У процесі навчання мережа автоматично коригує вагові коефіцієнти зв'язків між нейронами, формуючи складну нелінійну модель залежності між вхідними та вихідними параметрами.

Ансамблева модель базується на об'єднанні декількох базових алгоритмів дерева рішень у єдину систему прогнозування. У роботі використано підхід, де підсумковий прогноз формується як комбінація результатів окремих моделей дерев рішень. Така стратегія мінімізує ризик перенавчання, підвищує стійкість до шумів у даних та покращує узагальнювальну здатність моделі.

Метод опорних векторів (SVM) є ефективним алгоритмом, що у задачах регресії будує функцію, яка апроксимує експериментальні дані з мінімальною похибкою. Завдяки використанню ядерних функцій цей метод дозволяє моделювати складні нелінійні залежності між параметрами друку та механічними властивостями виробів.

Для об'єктивного порівняння обрані моделі навчалися на ідентичному наборі даних з використанням методу байєсівської оптимізації гіперпараметрів (параметрів моделей). Завдяки використанню байєсівської оптимізації для тренування моделей значно зменшується кількість ітерацій, необхідних для знаходження оптимальних значень гіперпараметрів порівняно з іншими методами оптимізації.

3. Результати розрахунків

Точність прогнозування моделей порівнювалася за допомогою таких показників, як коефіцієнт детермінації (R^2) та середньоквадратична похибка (RMSE) (Таблиця 5).

Таблиця 5.

Порівняння середньоквадратичних похибок та коефіцієнтів детермінації для тренувальних та тестових вибірок

Модель	RMSE (тренувальна вибірка)	RMSE (тестова вибірка)	R^2 (тренувальна вибірка)	R^2 (тестова вибірка)
Регресія гауссівського процесу	2,9654	2,1158	0,95934	0,9771
Нейронна мережа	5,1072	2,1605	0,87939	0,97612
Метод опорних векторів	3,5305	2,3552	0,94236	0,97162
Ансамблева модель	3,3524	2,9318	0,94279	0,96335

На рис. 2 наведено графіки емпіричного розподілу відносної похибки передбачення границі міцності для досліджуваних моделей. Найточніші моделі характеризуються графіками, що розташовані найближче до нуля і мають найменше стандартне відхилення.

Усі розглянуті алгоритми машинного навчання продемонстрували прийнятну точність прогнозування границі міцності 3D-друкованих пластиків, що підтверджується високими значеннями R^2 як на тренувальній, так і на тестовій вибірках. Метод регресії гауссівського процесу виявився найбільш точним серед досліджених моделей (Рисунок 2), показавши найвищий коефіцієнт детермінації та найменшу середньоквадратичну похибку на тестовій вибірці. Порівняння отриманих результатів дозволяє ранжувати досліджені алгоритми за точністю прогнозування у

такому порядку: регресія гауссівського процесу → нейронна мережа → метод опорних векторів → ансамблева модель.

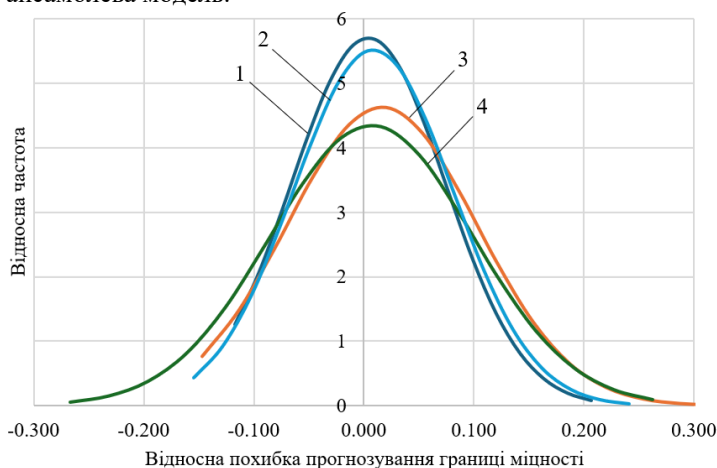


Рис. 2. Графіки емпіричного розподілу відносної похибки передбачення моделей прогнозування границі міцності: 1 – регресія гауссівського процесу; 2 – нейронна мережа; 3 – метод опорних векторів; 4 – ансамблева модель.

Висновки. У роботі виконано порівняльний аналіз чотирьох моделей машинного навчання – регресії на основі гауссівського процесу, нейронних мереж, методу опорних векторів та ансамблевих методів – для прогнозування границі міцності 3D-друкованих полімерів PLA, ABS та PA6-CF10.

Створено базу даних із 557 значень, що включає власні експериментальні результати та дані з літературних джерел. Сформований датасет містить 13 предикторів (4 характеристики філаменту та 9 параметрів друку). Під час підготовки датасету було виконано стандартні для задач машинного навчання процедури попередньої обробки даних, зокрема нормалізацію предикторів і рандомізацію порядку записів. Навчання моделей відбувалося з використанням байєсівської оптимізації гіперпараметрів та п'ятикратної крос-валідації.

Усі розглянуті алгоритми продемонстрували високу прогнозну здатність. Коефіцієнт детермінації (R^2) та середньоквадратична помилка (менше ніж 5%) свідчать про адекватність моделей як на тренувальній, так і на тестовій вибірках (Таблиця 5). За точністю прогнозування алгоритми розподілилися так: GPR > NN > SVM > ансамблеві методи.

1. Ngo, Tuan D., Alireza Kashani, Gabriele Imbalzano, Kate T.Q. Nguyen, i David Hui. «Additive Manufacturing (3D Printing): A Review of Materials, Methods, Applications and Challenges». *Composites Part B: Engineering* 143 (2018. чер.): 172—96. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2018.02.012>.
2. Rajan, Kumaresan, Mahendran Samykano, Kumaran Kadirgama, Wan Sharuzi Wan Harun, i Md. Mustafizur Rahman. «Fused Deposition Modeling: Process, Materials, Parameters, Properties, and Applications». *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 120, вип. 3—4 (2022. трав.): 1531—70. <https://doi.org/10.1007/s00170-022-08860-7>.

3. Mishra, Vishal, Sushant Negi, Simanchal Kar, Anup Kumar Sharma, Yadav Narendra Kumar Rajbahadur, i Avinash Kumar. «Recent Advances in Fused Deposition Modeling Based Additive Manufacturing of Thermoplastic Composite Structures: A Review». *Journal of Thermoplastic Composite Materials* 36, вип. 7 (2023. лип.): 3094—132. <https://doi.org/10.1177/08927057221102857>.
4. Zohdi, Nima, i Richard (Chunhui) Yang. «Material Anisotropy in Additively Manufactured Polymers and Polymer Composites: A Review». *Polymers* 13, вип. 19 (2021. верес.): 3368. <https://doi.org/10.3390/polym13193368>.
5. Sola, Antonella, Wei Juene Chong, Dejana Pejak Simunec, Yuncang Li, Adrian Trinchi, Ilias (Louis) Kyrtzis, i Cuie Wen. «Open Challenges in Tensile Testing of Additively Manufactured Polymers: A Literature Survey and a Case Study in Fused Filament Fabrication». *Polymer Testing* 117 (2023. січ.): 107859. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2022.107859>.
6. Aktepe, Elif, i Uçman Ergün. «Machine Learning Approaches for FDM-Based 3D Printing: A Literature Review». *Applied Sciences* 15, вип. 18 (2025. верес.): 10001. <https://doi.org/10.3390/app151810001>.
7. Zhang, Xijun, Dianming Chu, Xinyue Zhao, Chenyu Gao, Lingxiao Lu, Yan He, i Wenjuan Bai. «Machine Learning-Driven 3D Printing: A Review». *Applied Materials Today* 39 (2024. серп.): 102306. <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2024.102306>.
8. Goh, G. D., S. L. Sing, i W. Y. Yeong. «A Review on Machine Learning in 3D Printing: Applications, Potential, and Challenges». *Artificial Intelligence Review* 54, вип. 1 (2021. січ.): 63—94. <https://doi.org/10.1007/s10462-020-09876-9>.
9. Rojek, Izabela, Dariusz Mikołajewski, Marcin Kempański, Krzysztof Galas, i Adrianna Piszcz. «Emerging Applications of Machine Learning in 3D Printing». *Applied Sciences* 15, вип. 4 (2025. лют.): 1781. <https://doi.org/10.3390/app15041781>.
10. Jayasudha, Murugan, Muniyandy Elangovan, Miroslav Mahdal, i Jayaraju Priyadarshini. «Accurate Estimation of Tensile Strength of 3D Printed Parts Using Machine Learning Algorithms». *Processes* 10, вип. 6 (2022. чер.): 1158. <https://doi.org/10.3390/pr10061158>.
11. Panico, A., Corvi, A., Collini, L., & Sciancalepore, C. (2025). Multi objective optimization of FDM 3D printing parameters set via design of experiments and machine learning algorithms. *Scientific Reports*, 15(1), 16753. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-01016-z>
12. Gao, G., Xu, F., & Xu, J. (2022). Parametric Optimization of FDM Process for Improving Mechanical Strengths Using Taguchi Method and Response Surface Method: A Comparative Investigation. *Machines*, 10(9), 750. <https://doi.org/10.3390/machines10090750>
13. Özkül, M., Kuncan, F., & Ulkir, O. (2025). Predicting Mechanical Properties of FDM-Produced Parts Using Machine Learning Approaches. *Journal of Applied Polymer Science*, 142(20), e56899. <https://doi.org/10.1002/app.56899>
14. Wang, L., Jiang, J., Dong, Y., Ghita, O., Zhu, Y., & Sucala, V. I. (2024). Machine learning enabled 3D printing parameter settings for desired mechanical properties. *Virtual and Physical Prototyping*, 19(1), e2425825. <https://doi.org/10.1080/17452759.2024.2425825>

15. Tang, C., Liu, J., Yang, Y., Liu, Y., Jiang, S., & Hao, W. (2020). Effect of process parameters on mechanical properties of 3D printed PLA lattice structures. *Composites Part C: Open Access*, 3, 100076. <https://doi.org/10.1016/j.jcomc.2020.100076>
16. Wang, S., Ma, Y., Deng, Z., Zhang, S., & Cai, J. (2020). Effects of fused deposition modeling process parameters on tensile, dynamic mechanical properties of 3D printed polylactic acid materials. *Polymer Testing*, 86, 106483. <https://doi.org/10.1016/j.polymertesting.2020.106483>
17. Salim, M. A., Termiti, Z. H., & Saad, A. Md. (2019). Mechanical Properties on ABS/PLA Materials for Geospatial Imaging Printed Product using 3D Printer Technology. *Y Reference Module in Materials Science and Materials Engineering* (C. B9780128035818113578). Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.11357-8>
18. Yao, T., Ye, J., Deng, Z., Zhang, K., Ma, Y., & Ouyang, H. (2020). Tensile failure strength and separation angle of FDM 3D printing PLA material: Experimental and theoretical analyses. *Composites Part B: Engineering*, 188, 107894. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2020.107894>
19. Fernandes, J. F. M. (2016). Estudo da influência de parâmetros de impressão 3D nas propriedades mecânicas do PLA. https://scholar.tecnico.ulisboa.pt/records/svR9kDBwL_dVWaq-LZZmRqANM7-shZuF7rYk
20. Khosravani, M. R., Berto, F., Ayatollahi, M. R., & Reinicke, T. (2022). Characterization of 3D-printed PLA parts with different raster orientations and printing speeds. *Scientific Reports*, 12(1), 1016. <https://doi.org/10.1038/s41598-022-05005-4>
21. Bialete, E. R., Manuel, M. C. E., Alcance, R. M. E., Canlas, J. P. A., Chico, T. J. B., Sanqui, J. P., Dela Cruz, J. C., & Verdadero, M. S. (2020). Characterization of the Tensile Strength of FDM-Printed Parts Made from Polylactic Acid Filament using 33 Full-Factorial Design of Experiment. 2020 IEEE 12th International Conference on Humanoid, Nanotechnology, Information Technology, Communication and Control, Environment, and Management (HNICEM), 1—6. <https://doi.org/10.1109/HNICEM51456.2020.9400089>

Моделювання швидкості росту втомних тріщин у пластинах 7075-T6 при асиметричному навантаженні

А.В. Плащинська

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

plaschynska.alla@gmail.com

Розглядається задача прогнозування швидкості росту тріщини втоми в тонкій пластині з алюмінієвого сплаву 7075-T6 за умов одновісного асиметричного багатоциклового навантаження розтягу-стиску. Запропоновано чисельний підхід, що поєднує концепції механіки руйнування, механіки неперервного пошкодження та концепцію еквівалентних напружень для асиметричних циклів навантаження. Накопичення пошкоджень у матеріалі пластини розглядається як механізм росту тріщини втоми. Модель тріщини враховує наявність кінцевої пластичної зони, довжина якої визначається на основі модифікованої моделі Дагдейла. Запропонований ітераційний алгоритм дозволяє моделювати дискретний характер росту тріщини втоми. Передбачається, що зростання тріщини на довжину циклічної пластичної зони відбувається за умови досягнення функцією пошкодження критичного значення, яке дорівнює одиниці. Проведено валідацію моделі шляхом порівняння результатів розрахунків швидкості тріщини втоми з експериментальними даними для різних коефіцієнтів асиметрії циклу навантаження. Отримано задовільне узгодження між чисельними та експериментальними результатами в межах фактору 2, що підтверджує придатність запропонованого підходу для прогнозування кінетики тріщин втоми.

Ключові слова: втома, тонка пластина, швидкість росту тріщини, накопичення пошкоджень, асиметричний цикл, еквівалентні напруження, циклічна пластична зона.

Вступ

Проблема побудови моделей і розв'язання задач розповсюдження тріщин втоми в тонких пластинах з високоміцних алюмінієвих сплавів, які широко застосовуються в авіаційних і транспортних конструкціях та перебувають під одночасною дією статичних та циклічних навантажень, є актуальною і важливою.

У сучасній механіці втомного руйнування можна виділити два основні підходи до аналізу процесів втомного руйнування. Перший підхід має макроскопічний та феноменологічний характер. Конструкційні матеріали розглядаються як суцільні середовища, а процеси, що призводять до руйнування, описуються за допомогою критеріїв тривалої міцності або довговічності [1-3].

Другий підхід ґрунтується на структурному аналізі процесів зародження втомної тріщини та подальшого росту тріщини в матеріалі конструктивного елемента до остаточного руйнування. Цій темі присвячено велику кількість теоретичних та експериментальних досліджень [4-6].

Підходи, засновані на концепціях механіки пошкоджень, виявилися особливо ефективними для опису процесів зародження та росту втомних тріщин у конструкційних елементах [7-9]. Вони дають змогу врахувати двостадійний характер втомного руйнування та оцінювати вплив асиметрії циклу напружень та виду напруженого стану.

Метою роботи є побудова чисельної моделі кінетики росту тріщини втоми в тонких ізотропних прямокутних пластинах за умов асиметричного багатоциклового одновісного навантаження розтягу-стиску на основі теоретичного підходу, що поєднує енергетичну концепцію механіки руйнування та концепції механіки неперервного пошкодження.

1. Постановка задачі. Початкові співвідношення

1.1. Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є процес росту тріщини втоми нормального відриву в тонкій ізотропній пластині з лінійно-пружного матеріалу при одновісному багатоцикловому асиметричному навантаженні.

1.2. Геометрія та навантаження пластини. Розглядається тонка прямокутна (висотою h , шириною W) пластина з центральною тріщиною нормального відриву початкової напівдовжини l_0 . До країв пластини прикладене одновісне стаціонарне багатоциклове асиметричне навантаження розтягу-стиску $\tilde{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \sigma_m + \sigma_a \sin(2\pi t); \quad \sigma_{\max} = (\sigma_m + \sigma_a) < \sigma_Y, \quad (1.1)$$

де σ_m – середнє напруження циклу; σ_a – амплітуда циклічного напруження; σ_Y – межа текучості матеріалу; n – число циклів навантаження або дискретний час ($n = ft$); t – фізичний час; $f \geq 10$ Гц – частота навантаження. Береги тріщини вільні від навантаження. Оскільки максимальне напруження в циклі $\sigma_{\max}$ не перевищує межі текучості матеріалу σ_Y , основний масив пластин деформується лінійно-пружно, а процес втомного руйнування внаслідок втоми має квазікрихкий характер.

Для моделювання процесу розповсюдження тріщини застосовуються наступні концепції та вихідні співвідношення.

1.3. Концепція еквівалентних напружень за умов асиметричного навантаження. Для врахування асиметрії циклу навантаження застосовується концепція еквівалентних напружень, згідно з якою асиметричний цикл навантаження (1.1) зводиться до еквівалентного за часом до руйнування n_R симетричного циклу у вигляді [8].

$$\tilde{\sigma} = (\sigma_a)_{eqv} \sin(2\pi t), \quad (\sigma_a)_{eqv} = \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right) \right]^{-\eta} \sigma_a, \quad (1.2)$$

де $(\sigma_a)_{eqv}$ – амплітуда еквівалентного напруження симетричного циклу; σ_B – межа короткочасної міцності матеріалу пластини; η – коефіцієнт чутливості матеріалу пластин до асиметрії циклу навантаження.

1.4. Модель кінцевої зони тріщини втоми. Тріщина втоми розглядається як гострокінцева щілина з кінцевою зоною, де зосереджені реверсивні зміни пластичної деформації. Згідно модифікованої моделі Дагдейла [10], у вістрія тріщини втоми в напівциклах навантаження формується монотонна пластична зона, напруження в якій обмежені границею текучості матеріалу σ_Y . У напівциклах розвантаження всередині первинної області пластичних деформацій відбувається реверсивна пластична деформація матеріалу і утворюється циклічна (реверсивна) пластична зона, довжина якої визначається розмахом напружень у циклі $\Delta\tilde{\sigma} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$, а напруження

вздовж її довжини змінюються від $-\sigma_Y$ до $+\sigma_Y$. Кінетика зростання тріщини втоми залежить від еволюції циклічної пластичної зони [11].

1.5. Розподіл напружень в околі вістря тріщини. Розподіл напружень $\sigma_{eqv}(x, n_i)$ вздовж лінії тріщини по осі $0x$ визначається з розв'язку граничної задачі теорії пружності для пластини з центральною тріщиною нормального відриву для кожної нової поточної довжини тріщини $l(n_i)$ і задається співвідношеннями [8, 12]

$$(\sigma_{yy})_{eqv}(x, n_i) = \begin{cases} 0; & |x| < l(n_i); \\ 2\sigma_Y; & l(n_i) \leq |x| \leq l(n_i) + \lambda(l(n_i)); \\ \frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{l(n_i)}{x - l(n_i)}} f\left(\frac{h}{w}, \frac{l(n_i)}{w}\right); & |x| > l(n_i) + \lambda(l(n_i)), \end{cases} \quad (1.3)$$

де поточна циклічна пластична зона $\lambda(l(n_i))$ визначається з рівняння [10]

$$\lambda(l(n_i)) = \frac{1}{8} \left[\frac{\pi}{2} \frac{(\sigma_a)_{eqv}}{\sigma_Y} f\left(\frac{h}{W}, \frac{l(n_i)}{W}\right) \right]^2 l(n_i). \quad (1.4)$$

Коригувальна функція $f\left(\frac{h}{W}, \frac{l(n_i)}{W}\right)$ враховує вплив граничних умов та визначається шляхом апроксимації множини k числових розв'язків пружної задачі для тріщин різної довжини $l_0 \leq l(n_i) \leq l(n)$.

1.6. Еволюційне рівняння. Процес накопичення пошкоджень $\omega(x, n)$ внаслідок втоми розглядається як рушійна сила для зростання тріщини втоми та задається еволюційним степеневим рівнянням у виді

$$\frac{d\omega(x, n)}{dn} = D \left[\frac{(\sigma_{yy})_{eqv}(x, n)}{1 - \omega(x, n)} \right]^q \quad (1.5)$$

де $\omega(x, n)$ – скалярна функція пошкодження; D і q – константи матеріалу. В (1.5) прийнято, що накопичення пошкоджень відбувається головним чином у напівциклах розтягу [6, 13].

Початкові та граничні умови мають вигляд:

$$\omega(x, n) = \begin{cases} 0, & \forall x, & n = n_0 = 0 & (a) \\ 1, & x = x_0 = l_0 + \lambda(l_0), & n = n_* = n_1 & (б) \\ \omega(x_j, n_i), & x = x_j = l(n_i) + \lambda(l(n_i)), & n = n_i & (в) \\ 1, & x = x_j = l(n_i) + \lambda(l(n_i)), & n = n_{R_i} & (г) \end{cases} \quad (1.6)$$

де $i = 1, \dots, N, j = i, \dots, N$, $x_j = l(n_i) + \lambda(l(n_i))$ – координати вузлових точок на лінії тріщини. Умова (а) в (1.8) задає початкові умови, (б) – задає тривалість інкубаційної стадії, умова (в) задає рівень пошкодження в точці x_j на момент часу n_i , умова (г) задає умову локального руйнування на фронті тріщини. В умові (в) враховується рівень накопиченого пошкодження вздовж лінії тріщини.

Задача полягає в розвитку чисельної моделі процесу руйнування внаслідок втоми тонкостінних елементів конструкцій, та апробації її на задачах прогнозування швидкості поширення тріщини втоми у тонких прямокутних пластинах з алюмінієвого сплаву 7075-T6 за умов одновісного асиметричного розтягу-стиску.

2. Основні визначальні рівняння

Застосовуючи чисельний алгоритм [9] до розв'язання системи рівнянь (1.1)-(1.6) отримаємо інтегральне рівняння розповсюдження тріщини втоми у вигляді суперпозиції рівнянь для N дискретних інтервалів часу $n_i \leq n \leq n_{i+1}$

$$\sum_{i=0}^N \int_{\omega(n, x_j)}^1 [1 - \omega(n, x_j)]^q d\omega = D \sum_{i=0}^N \int_{n_i}^{n_{i+1}} \left((\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{l(n_i)}{2(x_j - l(n_i))}} \cdot f\left(\frac{h}{W}; \frac{l(n_i)}{W}\right) \right)^q dn, \quad (2.1)$$

$i = 0, N; \quad j = i, N,$

яке містить інкубаційну стадію і стадію розповсюдження тріщини.

2.1. Інкубаційна стадія. Інкубаційна стадія відповідає періоду навантаження, коли матеріал пластини накопичує пошкодження, але не руйнується. Рівняння (2.1) при умовах (1.8а, б), коли за дискретний проміжок часу $n_0 \leq n \leq n_1$ пошкодження змінюється в межах $0 \leq \omega(n, x_j) \leq 1$, має вигляд

$$\int_0^1 [1 - \omega(n, x_0)]^q d\omega = D \int_0^{n_1} \left((\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{l(n_0)}{2(x_0 - l(n_0))}} \cdot f\left(\frac{h}{W}; \frac{l(n_0)}{W}\right) \right)^q dn. \quad (2.2)$$

Інтегруванням (2.2) отримуємо співвідношення

$$n_1 = \left((1+q)D \left[(\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{l(n_0)}{2(x_0 - l(n_0))}} \cdot f\left(\frac{h}{W}; \frac{l(n_0)}{W}\right) \right]^q \right)^{-1}, \quad (2.3)$$

де n_1 – тривалість інкубаційної стадії.

2.2. Стадія розповсюдження тріщини втоми. На стадії розповсюдження тріщини втоми напружений стан визначається для кожної нової довжини тріщини $l(n_i)$. Тріщина розповсюджується стрибками, а момент кожного наступного стрибка тріщини в точці x_j на проміжках часу $n_i \leq n \leq n_{i+1}$ визначається інтегруванням рівняння (2.1) при виконанні умов (2.1в, г) за рекурентною формулою

$$n_{i+1} = n_i + \frac{[1 - \omega(n_i, x_j)]^{q+1}}{(1+q)D \left[(\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{l(n_i)}{2(x_j - l(n_i))}} \cdot f\left(\frac{h}{W}; \frac{l(n_i)}{W}\right) \right]^q}, \quad (2.4)$$

при $i = 1, \dots, N$ та $j = i$.

Рівень накопиченого пошкодження за час $n_i \leq n \leq n_{i+1}$ на лінії тріщини в точках x_j , визначається з рівняння

$$\int_{\omega(n_i, x_j)}^{\omega(n_{i+1}, x_j)} [1 - \omega(n, x_j)]^q d\omega = D \int_{n_i}^{n_{i+1}} \left((\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{l(n_i)}{2(x_j - l(n_i))}} \cdot f\left(\frac{h}{W}; \frac{l(n_i)}{W}\right) \right)^q dn. \quad (2.5)$$

Інтегруванням (2.5) одержимо співвідношення

$$\omega(n_{i+1}, x_j) = 1 - \left[[1 - \omega(n_i, x_j)]^{q+1} - (1+q)D \left[(\sigma_a)_{eqv} \sqrt{\frac{l(n_i)}{2(x_j - l(n_i))}} \cdot f\left(\frac{h}{W}; \frac{l(n_i)}{W}\right) \right]^q (n_{i+1} - n_i) \right]^{\frac{1}{1+q}}, \quad (2.6)$$

$$i = 0, \dots, N, \quad j = i+1, \dots, N.$$

яке дозволяє врахувати історію накопичення пошкоджень вздовж лінії тріщини втоми.

Швидкість тріщини визначаємо на кожному інтервалі $[n_i, n_{i+1}]$ з кусочно-заданої функції

$$V_{cal} = \frac{dl}{dn} \Big|_i = \frac{l_{i+1} - l_i}{n_{i+1} - n_i}, \quad i = 0, \dots, N-1 \quad (2.7)$$

Для побудови кінетичної діаграми поширення тріщини втоми визначаємо еквівалентний ефективний коефіцієнт інтенсивності напружень зі співвідношення

$$\Delta K_{eff}(l(n_i)) = (\sigma_a)_{eqv} \sqrt{2\pi l(n_i)} f\left(\frac{h}{W}; \frac{l(n_i)}{W}\right), \quad (2.8)$$

де корегувальна функція побудована з чисельного розв'язку методом колокацій [12]

$$f\left(\frac{h}{W}; \frac{l}{W}\right) = 1,0106 - 0,1996\left(\frac{2l}{W}\right) + 1,829\left(\frac{2l}{W}\right)^2 - 3,068\left(\frac{2l}{W}\right)^3 + 3,2197\left(\frac{2l}{W}\right)^4 \quad (2.9)$$

2.3. Методика визначення функцій і констант моделі. Основні визначальні рівняння моделі розповсюдження тріщин втоми в тонких ізотропних пластинах містить дві групи матеріальних констант, які підлягають визначенню з експерименту.

Перша група матеріальних констант містить значення границі текучості σ_Y й межі короточасної міцності σ_B . Значення σ_Y та σ_B визначаємо з діаграми розтягу « $\sigma - \varepsilon$ », яка будується за результатами стандартних випробувань гладких циліндричних зразків матеріалу на короточасну міцність.

Друга група матеріальних констант - коефіцієнти D і q та η . Коефіцієнти D та q характеризують опір матеріалу руйнуванню від втоми та визначаються за результатами стандартних випробувань гладких циліндричних зразків матеріалу на втому за умов симетричного циклу навантаження шляхом мінімізації функціоналу

$$\Phi(D, q) = \sum_{j=1}^s \left\{ n_{Rj}(\sigma_{aj}) - \left[(1+q)D(\sigma_{aj})^q \right]^{-1} \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (2.10)$$

де σ_{aj} , n_{Rj} – набір дискретних значень амплітуд циклічних напружень і відповідних їм чисел циклів до руйнування.

Показник степені η характеризує чутливість матеріалу до рівня асиметрії циклу напружень і визначається за результатами обробки даних стандартних випробувань гладких циліндричних зразків на втому при різних значеннях середнього напруження σ_m . Задача визначення величини η зведена до мінімізації функціонала

$$\Phi\left[\left[\frac{\sigma_m}{\sigma_B}\right], \eta\right] = \sum_{i=1}^k \left\{ \left[\frac{\sigma_{ai}}{\sigma_n}\right] - \left[\cos\left(\frac{\sigma_{mi}}{\sigma_B}\right)^\eta\right] \right\}^2 \rightarrow \min, \quad (2.11)$$

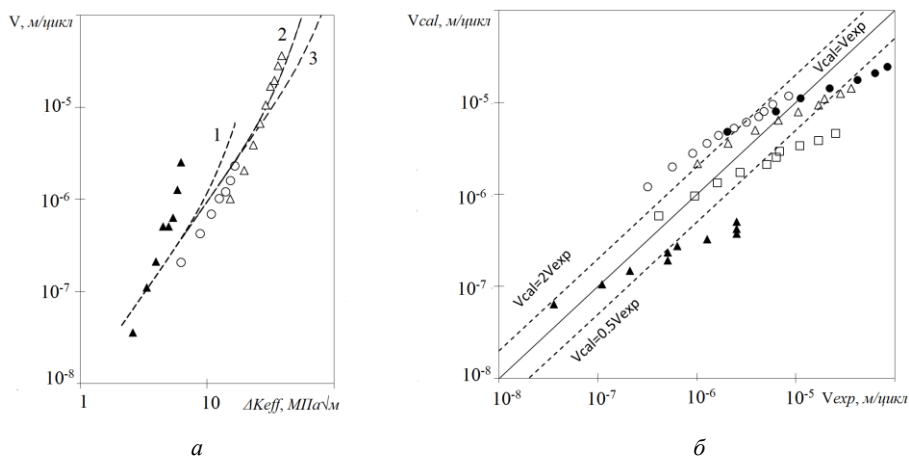
який відповідає умові найкращого узгодження експериментальних даних з лінеаризованою граничною діаграмою.

3. Розрахунок кінетики росту тріщин втоми у пластинах кінцевих розмірів

Розв'язується задача розрахунку швидкості тріщин втоми нормального відриву в тонких пластинах кінцевих розмірів $h=0.891\text{м}$, $W=0.305\text{м}$, $\frac{h}{W}=2.92$ з початковою тріщиною $2l_0=0.005$ при одновісному асиметричному розтягу-стиску. Пластина виготовлена з алюмінієвого сплаву 7075-T6, який широко використовується в авіаційній і космічній техніці. Значення матеріальних констант $\sigma_y=523\text{МПа}$, $\sigma_B=571\text{МПа}$ та коефіцієнти $D=10^{-28}(\text{МПа}^q \cdot \text{цикл})^{-1}$, $q=9$, $\eta=1.88$ визначені за методикою, викладеної в розділі 2.3 на основі експериментальних даних, запозичених з [14].

На фіг.1 представлено порівняння експериментальних [13] і чисельних даних для швидкості росту втомної тріщини. На фіг. 1(а) наведено кінетичні діаграми $V_{cal} = f(\Delta K_{eff})$, побудовані для різних значень коефіцієнтів асиметрії циклу: $R=0.8$ (лінія 1, ▲); $R=-0.33$, (лінія 2, ○); $R=-0.8$, (лінія 3, Δ). Тут і далі результати розрахунків за моделлю нанесені штрих-пунктирними лініями, маркерами – експериментальні дані. Розрахункові кінетичні діаграми мають виражений нелінійний характер, що обумовлено врахуванням еволюції циклічної пластичної зони та процесів накопичення пошкоджень. Отримані результати демонструють, що зі збільшенням R швидкість росту тріщини зростає. Найкраща відповідність між розрахунковими та експериментальними даними спостерігається на інкубаційній стадії та стадії стабільного росту тріщини (логарифмічне відхилення в межах $|\Delta| \leq 0.3$). У передруйнівній області розбіжності збільшуються (логарифмічне відхилення не перевищує $|\Delta| \leq 0.85$). Це свідчить про здатність моделі коректно описувати основні закономірності кінетики втомного руйнування.

На фіг. 1(б) наведено порівняння експериментально визначених швидкостей V_{exp} і чисельно розрахованих швидкостей V_{cal} росту тріщини для різних коефіцієнтів асиметрії циклу навантаження: $R = -1$, ($\bullet, \circ$); $R = -0.8$ (Δ); $R = 0$ ($\square$); $R = 0.8$ ($\blacktriangle$). Суцільна лінія $V_{cal} = V_{exp}$ відповідає умові ідеального збігу. Як видно, більшість точок розташована в межах факторної зони $0.5V_{exp} \leq V_{cal} \leq 2V_{exp}$ (штрихові лінії), що свідчить про задовільну прогностичну здатність моделі.



Фіг.1. Порівняння експериментальних [13] і чисельних даних для швидкості росту втомної тріщини:

а) кінетична діаграма росту тріщини втомі в пластині з 7075-T6 при $R = 0.8$, $\sigma_a = 19$ МПа, $\sigma_m = 172$ МПа, (лінія 1, $\blacktriangle$); $R = -0.33$, $\sigma_a = 69$ МПа, $\sigma_m = 34$ МПа, (лінія 2, $\circ$); $R = -0.8$, $\sigma_a = 138$ МПа, $\sigma_m = 17$ МПа (лінія 3, Δ).

б) порівняння швидкостей росту тріщини V_{exp} і V_{cal} при: $R = -1$, $\sigma_a = 207$ МПа, $\sigma_m = 0$ ($\bullet, \circ$); $\sigma_a = 103$ МПа, $\sigma_m = 0$, ($\circ$); $R = -0.8$, $\sigma_a = 138$ МПа, $\sigma_m = 17$ МПа (Δ); $R = 0$, $\sigma_a = 69$ МПа, $\sigma_m = 69$ МПа ($\square$); $R = 0.8$, $\sigma_a = 19$ МПа, $\sigma_m = 172$ МПа, ($\blacktriangle$).

Висновок

У роботі запропоновано чисельний підхід до моделювання росту втомних тріщин у тонких пластинах на основі поєднання концепцій механіки неперервного пошкодження та механіки руйнування. Розроблений підхід дозволяє описувати інкубаційну стадію, стабільний і прискорений ріст тріщини в межах єдиної системи рівнянь з урахуванням розвитку пластичної зони в околі тріщини та процесу накопичення пошкоджень. Порівняння результатів чисельного з експериментальними даними показало задовільну відповідність в межах факторної зони 2 для різних коефіцієнтів асиметрії циклу навантаження, що підтверджує придатність моделі для прогнозування кінетики втомного руйнування.

Наукові дослідження, результати яких опубліковано в даній статті, виконано за рахунок коштів бюджетної програми „Підтримка пріоритетних напрямів наукових досліджень” (КПКВК 6541230).

1. P.G. Forrest, *Fatigue of Metals*, Pergamon Press, Oxford–London (1962)
2. J.C. Newman Jr., The merging of fatigue and fracture mechanics concepts: A historical perspective, *Progress in Aerospace Sciences*, **34**(5–6), 347–390 (1998). [https://doi.org/10.1016/S0376-0421\(98\)00006-2](https://doi.org/10.1016/S0376-0421(98)00006-2)
3. V. Golub, Fatigue endurance of thin-walled cylindrical shells under biaxial combined loading, in: H. Altenbach et al. (Eds.), *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods*, Vol. 204 of *Advanced Structured Materials*, Springer, 185–192 (2024). https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_13
4. T.-Y. Wang, S.-F. Gu, J.-Y. Xiao, J. Yang, Experimental verification of the linear relationship between fatigue crack propagation rate and constraint and a new crack propagation criterion, *Advances in Mechanical Engineering*, **18**(3), 1–16 (2026). <https://doi.org/10.1177/16878132261432865>
5. О. Герасимчук, О. Кононченко, Теоретична оцінка втомної довговічності металевих матеріалів за постійного розмаху напружень циклу, *Матеріали науково-технічної конференції «Прогресивна техніка, технологія та інженерна освіта»*, **23**, 45–49 (2023). <https://doi.org/10.20535/2409-7160.2023.XXIII.277133>
6. J.L. Chaboche, A unified constitutive model for cyclic viscoplasticity and damage, *International Journal of Plasticity*, **1**(4), 623–653 (1984).
7. V.P. Golub, A.V. Plashchynska, On the theory of the growth of fatigue mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension–compression, *International Applied Mechanics*, **54**(2), 188–206 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0871-5>
8. V.P. Golub, A.V. Plashchynska, On the theory of the growth of fatigue mode I cracks in thin isotropic plates of finite size under uniaxial tension–compression, *International Applied Mechanics*, **54**(2), 188–206 (2018). <https://doi.org/10.1007/s10778-018-0871-5>
9. V.P. Golub, A.V. Plashchynska, P.Yu. Kobzar, Numerical modelling of fatigue crack propagation kinetics in thin finite-size isotropic plates, *International Applied Mechanics*, **60**(6), 701–709 (2024). <https://doi.org/10.1007/s10778-025-01321-0>
10. J.C. Newman Jr., *FASTAN-II: A Fatigue Crack Growth Structural Analysis Program*, Technical Report TM-104159, NASA (1992).
11. B.O. Chikh et al., Influence of cyclic plastic zone size on the propagation of the fatigue crack in case of 12NC6 steel, *Computational Materials Science*, **43**(4), 1010–1017 (2008).
12. H. Tada, A note on the finite width correction to the stress intensity factor, *Engineering Fracture Mechanics*, **3**(3), 345–347 (1971).
13. C.M. Hudson, J.T. Scardina, *Effect of Stress Ratio on Fatigue Crack Growth in 7075-T6 Aluminum-Alloy Sheet*, NASA TMX-60125, 24 p. (1967).
14. H.J. Grover, W.S. Hyler, P. Kuhn, C.B. Landers, F.N. Hawell, *Axial-Load Fatigue Properties of 24S-T and 75S-T Aluminum Alloys as Determined in Several Laboratories*, Technical Report TN-2928, National Advisory Committee for Aeronautics (1953).

Визначення ефективних в'язкопружних характеристик при позовжньому розтягу двофазового композиту

А. В. Столярова¹, С. М. Гребенюк

Запорізький національний університет, Запоріжжя, Україна

¹ st_av991@ukr.net

Розглядається односпрямований композит з гексагональною схемою армування, що складається з в'язкопружної ізотропної матриці та порожнистих транстропних волокон. У даній роботі розв'язано дві вісесиметричні крайові задачі: про сумісне деформування складеного циліндру (матриця та порожнисте волокно) та однорідного суцільного циліндрів при позовжньому розтягуванні за умов ідеального контакту на міжфазних поверхнях. В'язкопружні властивості як матриці, так і гомогенізованого матеріалу описуються співвідношеннями спадкової теорії Больцмана-Вольтерра. За допомогою використання умов узгодження переміщень, отриманих у результаті розв'язання цих задач, отримуємо миттєвий ефективний позовжній модуль пружності та ефективне ядро релаксації гомогенізованого матеріалу у вигляді функції механічних характеристик компонентів композиційного матеріалу. Проведено чисельні розрахунки, на основі яких проаналізовано вплив об'ємної частки волокон та об'ємної частки порожнини на ефективні в'язкопружні характеристики й кінетику релаксації композита. Запропонований підхід розширює можливості прогнозування поведінки сучасних конструкційних матеріалів.

Ключові слова: композиційний матеріал, напружено-деформований стан, в'язкопружна ізотропна матриця, порожнисте транстропне волокно, гомогенізація, перетворення Лапласа.

Вступ

Значне зростання сфер застосування композиційних матеріалів і підвищення вимог до їх властивостей потребує вдосконалення математичних моделей і методів при створенні та дослідженні композиційних матеріалів. Одним із способів опису поведінки композиційного матеріалу є представлення його у вигляді гомогенізованого матеріалу із «осередненими» (ефективними) механічними характеристиками. Для визначення цих характеристик використовують різні підходи, так поширеним є виокремлення типової комірки композиційного матеріалу і її дослідження в різних умовах деформування.

Сучасна мікромеханіка композитів переходить від спрощених пружних моделей до комплексного врахування реології фаз та складної геометрії армування [1]. Так, для визначення співвідношень для ефективних пружних характеристик композиційного матеріалу, армованого односпрямованими порожнистими волокнами, використано ряди Фур'є [2] та метод представницького об'ємного елемента [3].

Наявність компонентів композиційного матеріалу з в'язкопружними властивостями значно ускладнює отримання аналітичних співвідношень для ефективних механічних характеристик, а часто й унеможлиблює його. Тому отримання вказаних характеристик, особливо у вигляді аналітичних виразів, є актуальною задачею.

У роботі [4] на основі лінійної теорії в'язкопружності та методу

представницького об'ємного елементу отримано ефективні пружні та релаксаційні характеристики волокнистого композиційного матеріалу. Аналітичні вирази для ефективних в'язкопружних характеристик композиційного матеріалу із в'язкопружною матрицею, механічна поведінка якої описується степеневою функцією та трансропними волокнами, представлені у статті [5].

У статті [6] та монографії [7] розглядається процедура гомогенізації композитного матеріалу, армованого односпрямованими волокнами. Матеріал матриці вважається в'язкопружним, а матеріал волокна – трансропним. В'язкопружні властивості описуються спадковою теорією Больцмана-Вольтерра. За допомогою представницького об'ємного елемента отримані співвідношення, що характеризують ефективні в'язкопружні характеристики композиту, які описуються інтегральним оператором, що залежить від пружних констант волокна, пружних констант та параметрів ядра релаксації матриці, а також об'ємної частки кожного компонента в композиті.

Складність розв'язання задач в'язкопружності обумовлює необхідність залучення наближених методів, в тому числі асимптотичних. Так, у статті [8] розглянуто двофазний періодичний в'язкопружний волокнистий композит із ізотропними компонентами. Отримано формули для ефективних властивостей композитів із квадратною та гексагональною схемою армування за допомогою методу двомасштабної асимптотичної гомогенізації. Виконано розрахунок ефективних властивостей нестаріючих лінійних в'язкопружних композитів, що містять довгі циліндричні волокна круглого поперечного перерізу. Робота [9] присвячена розрахунку ефективних властивостей нестаріючих лінійних в'язкопружних композитних матеріалів шляхом розв'язання мікромасштабних періодичних локальних задач за допомогою методу асимптотичної гомогенізації (АНМ).

Застосування методу скінченних елементів при дослідженні мікромеханічної тривимірної моделі полімерних ламінатів, армованих односпрямованими волокнами, матриця яких є в'язкопружною, а волокно – пружним, показано у статті [10]. Також змодельовано наявність тріщин шляхом послаблення жорсткості у певних напрямках. Іншим прикладом застосування методу скінченних елементів до проблеми в'язкопружної гомогенізації в часовій області є робота [11], в якій проведено моделювання для різних регулярних періодичних мікроструктур односпрямованого композиту, армованого короткими та довгими волокнами, та композитів, армованих дискретними включеннями.

Стаття [12] присвячена питанням визначення розміру представницького об'ємного елементу (RVE) для двовимірної мікроструктури з випадково розподіленими циліндричними пружними жорсткими волокнами, вбудованими в пружно-пластичну або пружно-в'язкопластичну матрицю. Для цього застосовувалось поєднання методу поступової гомогенізації зі статистичним аналізом збіжності параметрів.

Існуючі методи визначення ефективних механічних характеристик в'язкопружних композитів орієнтовані переважно на структури із суцільними армувальними елементами, тоді як дослідження аналогічних матеріалів із порожнистими волокнами здебільшого обмежуються пружним аналізом. Необхідність побудови закритих аналітичних співвідношень для в'язкопружних середовищ із такою складною геометрією фаз суттєво ускладнює математичний апарат, що й обумовлює

актуальність узагальнення відомих підходів.

1. Постановка задачі

Розглянемо односпрямований композит з гексагональною схемою армування з в'язкопружними матрицею та транстропними порожнистими волокнами. В'язкопружні властивості як матриці, так і гомогенізованого матеріалу будемо описувати інтегральними операторами спадкової теорії Больцмана-Вольтера. Представимо неоднорідний матеріал однорідним за допомогою методу представницького об'ємного елемента, при цьому гомогенізований матеріал будемо вважати транстропним із площиною ізоотропії, перпендикулярною вісі волокна. Для опису в'язкопружних властивостей транстропного матеріалу необхідно отримати значення п'яти незалежних величин: інтегральні оператори $\tilde{E}_1$ та $\tilde{E}_2$, що моделюють лінійні деформації в'язкопружного композиту, інтегральні оператори $\tilde{G}_{12}$ та $\tilde{G}_{23}$, що моделюють зсувні деформації, а також коефіцієнт Пуассона ν_{12} , яку будемо вважати сталою у часі величиною.

Для отримання $\tilde{E}_1$ для представницького об'ємного елемента розв'яжемо дві вісесиметричні крайові задачі: про сумісне деформування складеного циліндру (матриця, порожнисте волокно) та однорідного суцільного циліндру, що моделює композит, при поздовжньому розтягуванні (див. рис. 1).

Нехай f та g – відповідно об'ємний вміст волокна та порожнини у матеріалі композита. Враховуючи, що область, яку займає матриця в елементарній комірці, і область, яку в ній займає волокно, мають однакову висоту, отримуємо наступні співвідношення:

$$g = \frac{\pi c^2}{\pi b^2} = \frac{c^2}{b^2}, f = \frac{\pi(a^2 - c^2)}{\pi b^2} = \frac{a^2 - c^2}{b^2}. \quad (1)$$

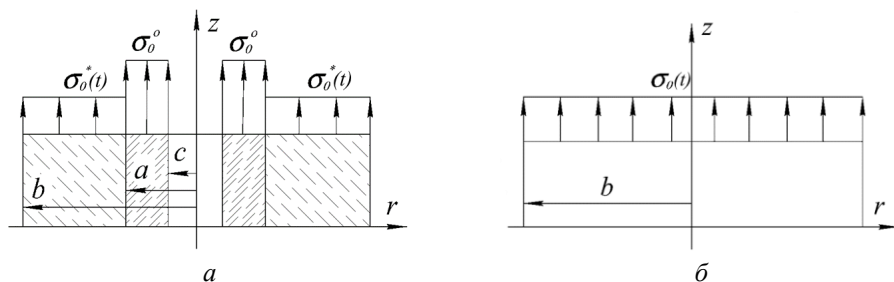


Рис. 1. Поздовжній розтяг: a – сумісне деформування матриці ($a \leq r \leq b$) та порожнистого волокна ($c \leq r \leq a$); b – деформування композита.

2. Моделювання сумісного деформування матриці та порожнистого волокна

Розв'яжемо задачу про сумісний поздовжнє розтягнення в'язкопружної матриці та транстропного волокна. Вважається, що на міжфазних поверхнях виконуються умови ідеального з'єднання. На волокно у напрямку осі діє стале навантаження σ_0^o , відповідно осьове напруження для волокна також є сталою величиною. А осьове напруження матриці визначається як $\sigma_z^* = \sigma_0^*(t)$. Тут і далі символ ^{o} позначає величини, що відносяться до волокна, а символ * – величини, що відносяться до матриці.

Напружено-деформований стан в'язкопружної ізотропної матриці при поздовжньому розтягуванні описується співвідношеннями (2)-(5) [7], а в'язкопружного трансверсально-ізотропного порожнистого волокна – співвідношеннями (6)-(9) [3]:

$$u_r^*(r, t) = A(t) \cdot r + \frac{B(t)}{r}, \quad (2)$$

$$u_z^*(z, t) = \left(\frac{(1 - v^* - 2(v^*)^2)}{1 - v^*} (\tilde{E}^*)^{-1} [\sigma_0^*(t)] - \frac{2v^*}{1 - v^*} A(t) \right) z, \quad (3)$$

$$\sigma_{rr}^*(r, t) = \frac{v^*}{1 - v^*} \sigma_0^*(t) + \frac{\tilde{E}^*[A(t)]}{1 - v^*} - \frac{\tilde{E}^*[B(t)]}{r^2(1 + v^*)}, \quad (4)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^*(r, t) = \frac{v^*}{1 - v^*} \sigma_0^*(t) + \frac{\tilde{E}^*[A(t)]}{1 - v^*} + \frac{\tilde{E}^*[B(t)]}{r^2(1 + v^*)}, \quad (5)$$

$$u_r^\circ(r, t) = C(t) \cdot r + \frac{D(t)}{r}, \quad (6)$$

$$u_z^\circ(z, t) = \frac{1}{1 - v_{23}^\circ} \left(\frac{\sigma_0^\circ(1 - v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ)}{E_1^\circ} - 2C(t)v_{21}^\circ \right) z, \quad (7)$$

$$\sigma_{rr}^\circ(r, t) = E_2^\circ \left(\frac{\sigma_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ(1 - v_{23}^\circ)} + \frac{C(t)}{1 - v_{23}^\circ} - \frac{D(t)}{r^2(1 + v_{23}^\circ)} \right), \quad (8)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^\circ(r, t) = E_2^\circ \left(\frac{\sigma_0^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ(1 - v_{23}^\circ)} + \frac{C(t)}{1 - v_{23}^\circ} + \frac{D(t)}{r^2(1 + v_{23}^\circ)} \right), \quad (9)$$

де $\tilde{E}^*$ – лінійний інтегральний оператор, а $(\tilde{E}^*)^{-1}$ – оператор, обернений до нього, які визначаються співвідношеннями (10) та (11) відповідно.

$$\tilde{E}^*[y(t)] = E^* \left(y(t) - \int_0^t R(t - \tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (10)$$

$$(\tilde{E}^*)^{-1}[y(t)] = \frac{1}{E^*} \left(y(t) - \int_0^t Q(t - \tau) y(\tau) d\tau \right), \quad (11)$$

де $E^* = const$ – миттєвий поздовжній модуль пружності, $R(t)$ – ядро релаксації матеріалу матриці, $Q(t)$ – ядро повзучості матриці.

Невідомі функції $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ та $D(t)$, а також співвідношення між σ_0° та $\sigma_0^*(t)$ знаходяться з умов неперервності радіальних напружень й радіальних та осевих переміщень на межі «матриця-волокно», а також з міркувань, що зовнішня поверхня матриці та внутрішня поверхня порожнистого волокна вільні від радіальних напружень:

$$\sigma_{rr}^\circ(a) = \sigma_{rr}^*(a), u_r^\circ(a) = u_r^*(a), u_z^\circ(h) = u_z^*(h), \quad (12)$$

$$\sigma_{rr}^*(b) = 0, \sigma_{rr}^\circ(c) = 0. \quad (13)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1 - v_{23}^\circ - 2v_{21}^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ(1 - v_{23}^\circ)}, \alpha_2 = \frac{2v_{21}^\circ}{1 - v_{23}^\circ}, \\ \beta_1 &= \frac{1 - v^* - 2(v^*)^2}{1 - v^*}, \beta_2 = \frac{2v^*}{1 - v^*}, \\ \mu_1 &= \frac{E_2^\circ v_{12}^\circ}{E_1^\circ(1 - v_{23}^\circ)}, \mu_2 = \frac{E_2^\circ}{1 - v_{23}^\circ}, \mu_3 = \frac{E_2^\circ}{1 + v_{23}^\circ}.\end{aligned}\quad (14)$$

З урахуванням позначень (14), система рівнянь (12)-(13) набуває вигляду:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_0^\circ \mu_1 + C(t) \mu_2 - D(t) \frac{\mu_3}{a^2} &= \frac{v^*}{1 - v^*} \sigma_0^*(t) + \frac{\tilde{E}^*[A(t)]}{1 - v^*} - \frac{\tilde{E}^*[B(t)]}{a^2(1 + v^*)}, \\ A(t) \cdot a + \frac{B(t)}{a} &= C(t) \cdot a + \frac{D(t)}{a}, \\ \sigma_0^\circ \alpha_1 - C(t) \alpha_2 &= \beta_1 (\tilde{E}^*)^{-1} [\sigma_0^*(t)] - \beta_2 A(t), \\ \sigma_0^\circ \mu_1 + C(t) \mu_2 - D(t) \frac{\mu_3}{c^2} &= 0, \\ \frac{v^*}{1 - v^*} \sigma_0^*(t) + \frac{\tilde{E}^*[A(t)]}{1 - v^*} - \frac{\tilde{E}^*[B(t)]}{b^2(1 + v^*)} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (15)$$

Застосувавши до обох частин третього рівняння системи (15) оператор $\tilde{E}^*$, отримаємо:

$$\beta_1 \sigma_0^*(t) - \beta_2 \tilde{E}^*[A(t)] = \sigma_0^\circ \alpha_1 h(t) - \alpha_2 \tilde{E}^*[C(t)], \quad (16)$$

де $h(t) = \tilde{E}^*[1] = E^* \left(1 - \int_0^t R(t - \tau) y(\tau) d\tau \right)$.

Замінивши третє рівняння системи (15) на рівняння (16), розв'яжемо отриману систему відносно $\tilde{E}^*[A(t)]$, $\tilde{E}^*[B(t)]$, $C(t)$ та $D(t)$. З урахуванням співвідношень (1), знаходимо вирази цих функцій у вигляді:

$$\tilde{E}^*[A(t)] = \sigma_0^*(t)(m_1 m_3 - v^*) + \sigma_0^\circ h(t) m_2 m_3, \quad (17)$$

$$\tilde{E}^*[B(t)] = \sigma_0^*(t) m_1 a^2 + \sigma_0^\circ h(t) m_2 a^2, \quad (18)$$

$$C(t) = \sigma_0^*(t) \frac{m_1 m_4 (f + g)}{\mu_2} + \sigma_0^\circ h(t) \frac{m_2 m_4 (f + g)}{\mu_2} - \sigma_0^\circ \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad (19)$$

$$D(t) = \sigma_0^*(t) a^2 \frac{m_1 m_4 g}{\mu_3} + \sigma_0^\circ h(t) a^2 \frac{m_2 m_4 g}{\mu_3}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \text{де } m_1 &= \frac{1}{(f+g)k_1+k_2} \left(v^* \frac{1+v^*}{1-v^*} k_1 - \beta_1 \right), m_2 = \frac{1}{(f+g)k_1+k_2} \cdot \frac{\alpha_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_4}{\mu_2}, m_3 = (f+g) \frac{1-v^*}{1+v^*}, \\ m_4 &= \frac{1}{f} \left(\frac{m_3}{1-v^*} - \frac{1}{1+v^*} \right), k_1 = \frac{1-v^*}{1+v^*} (\alpha_2 - \beta_2 - \mu_4), k_2 = \alpha_2 - \mu_4, \mu_4 = \frac{g \alpha_2 \mu_2}{(f+g) \mu_3 + g \mu_2}. \end{aligned}$$

Після застосування оберненого оператора $(\tilde{E}^*)^{-1}$ до функцій $\tilde{E}^*[A(t)]$ та $\tilde{E}^*[B(t)]$ знаходимо вирази для функцій $A(t)$ та $B(t)$:

$$A(t) = \tilde{E}^*[\sigma_0^*(t)](m_1 m_3 - v^*) + \sigma_0^\circ m_2 m_3, \quad (21)$$

$$B(t) = \tilde{E}^*[\sigma_0^*(t)] m_1 a^2 + \sigma_0^\circ m_2 a^2. \quad (22)$$

Підставивши отримані вирази (19)-(22) у друге рівняння системи (15), знайдемо співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ та σ_0° . Отримаємо:

$$\begin{aligned} \sigma_0^\circ \left(h(t) m_2 m_4 m_5 - \frac{\mu_1}{\mu_2} - m_2 (m_3 + 1) \right) + \sigma_0^*(t) m_1 m_4 m_5 &= \\ &= (\tilde{E}^*)^{-1} [\sigma_0^*(t)] (m_1 (m_3 + 1) - v^*), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\text{де } m_5 = \frac{f+g}{\mu_2} + \frac{g}{\mu_3}.$$

Враховуючи у рівності (23) вираз для оператору $\tilde{E}^*$, отримаємо співвідношення:

$$\begin{aligned} \tilde{E}^*[\sigma_0^*(t)]m_1m_4m_5 + (v^* - m_1(m_3 + 1))\sigma_0^*(t) = \\ = \tilde{E}^* \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - h(t)m_2m_4m_5 \right] \sigma_0^\circ. \end{aligned} \quad (24)$$

Застосуємо до отриманого інтегрального рівняння відносно функції $\sigma_0^*(t)$ перетворення Лапласа. Для оператора (10) зображення при перетворенні Лапласа має вигляд:

$$\tilde{E}^*[y(t)] \div E^*(\tilde{Y}(p) - \tilde{R}(p)\tilde{Y}(p)) = E^*\tilde{Y}(p)(1 - \tilde{R}(p)), \quad (25)$$

де $\tilde{Y}(p) \div y(t)$, $\tilde{R}(p) \div R(t)$. Знайдемо зображення функції $h(t)$:

$$h(t) = \tilde{E}^*[1] \div \frac{E^*(1 - \tilde{R}(p))}{p}. \quad (26)$$

Застосувавши перетворення Лапласа до рівняння (24), з урахуванням співвідношень (25)-(26), отримуємо алгебраїчне рівняння, що містить $\tilde{S}^*(p)$ – зображення функції $\sigma_0^*(t)$:

$$\begin{aligned} m_1m_4m_5E^*\tilde{S}^*(p)(1 - \tilde{R}(p)) + (v^* - m_1(m_3 + 1))\tilde{S}^*(p) = \\ = E^* \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - m_2m_4m_5E^*(1 - \tilde{R}(p)) \right) (1 - \tilde{R}(p)) \frac{\sigma_0^\circ}{p}, \end{aligned} \quad (27)$$

розв'язавши яке отримаємо:

$$\tilde{S}^*(p) = \frac{E^* \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - m_2m_4m_5E^*(1 - \tilde{R}(p)) \right) (1 - \tilde{R}(p))}{m_1m_4m_5E^*(1 - \tilde{R}(p)) + (v^* - m_1(m_3 + 1))} \cdot \frac{\sigma_0^\circ}{p}. \quad (28)$$

Тоді, з урахуванням (28), співвідношення між $\sigma_0^*(t)$ та σ_0° матиме вигляд:

$$\sigma_0^*(t) = \varphi(t)\sigma_0^\circ, \quad (29)$$

де $\varphi(t)$ є оригіналом функції $\tilde{\Phi}(p)$:

$$\tilde{\Phi}(p) = \frac{E^* \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - m_2m_4m_5E^*(1 - \tilde{R}(p)) \right) (1 - \tilde{R}(p))}{p(m_1m_4m_5E^*(1 - \tilde{R}(p)) + (v^* - m_1(m_3 + 1)))}. \quad (30)$$

3. Гомогенізація композита та визначення ефективного поздовжнього інтегрального оператора жорсткості

Отримавши розв'язок задачі про спільне деформування матриці та порожнистого волокна, розглянемо задачу про поздовжнє розтягнення для циліндричної комірки з однорідного трансропного в'язкопружного матеріалу, що моделює композит. Осьове напруження для цієї комірки визначається як $\sigma_z = \sigma_0(t)$.

Для того, щоб задачі були еквівалентні необхідно, щоб для крайових умов у обох задачах виконувалася рівність:

$$\pi(a^2 - c^2)\sigma_0^\circ + \pi(b^2 - a^2)\sigma_0^*(t) = \pi b^2\sigma_0(t). \quad (31)$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на πb^2 , з урахуванням співвідношень (1) та (29), отримаємо:

$$f\sigma_0^\circ + (1 - f - g)\varphi(t)\sigma_0^\circ = \sigma_0(t). \quad (32)$$

Умовою узгодження для сумісного розв'язування двох сформульованих задач, буде виступати рівність осьових переміщень для довільних значень координати z :

$$u_z(z, t) = u_z^\circ(z, t) = u_z^*(z, t). \quad (33)$$

Осьові переміщення однорідного матеріалу $u_z(z, t)$ визначаються співвідношенням, отриманим при розв'язку аналогічної задачі в [7]:

$$u_z(z, t) = (\tilde{E}_1)^{-1} [\sigma_0(t)] \cdot z, \quad (34)$$

яке, з урахуванням (32), прийме вигляд:

$$u_z(z, t) = (\tilde{E}_1)^{-1} [f\sigma_0^\circ + (1 - f - g)\varphi(t)\sigma_0^\circ] \cdot z. \quad (35)$$

Осьові переміщення волокна, які описувались співвідношенням (7), з урахуванням (14), (19) та (29), описуватимуться наступним чином:

$$u_z^\circ(z, t) = \left(\sigma_0^\circ \alpha_1 - \sigma_0^\circ \alpha_2 \left(\varphi(t) \frac{m_1 m_4 (f + g)}{\mu_2} + h(t) \frac{m_2 m_4 (f + g)}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right) z. \quad (36)$$

Враховуючи виконання першої з умов (33), маємо:

$$\begin{aligned} \sigma_0^\circ \alpha_1 - \sigma_0^\circ \alpha_2 \left(\varphi(t) \frac{m_1 m_4 (f + g)}{\mu_2} + h(t) \frac{m_2 m_4 (f + g)}{\mu_2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = \\ = (\tilde{E}_1)^{-1} [f\sigma_0^\circ + (1 - f - g)\varphi(t)\sigma_0^\circ]. \end{aligned} \quad (37)$$

Застосувавши до обох частин рівності (37) оператор $\tilde{E}_1$, після ділення на ненульову сталу σ_0° , отримуємо:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_1 \left[\alpha_1 - \alpha_2 \varphi(t) \frac{m_1 m_4 (f + g)}{\mu_2} - \alpha_2 h(t) \frac{m_2 m_4 (f + g)}{\mu_2} + \alpha_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \right] = \\ = f + (1 - f - g)\varphi(t). \end{aligned} \quad (38)$$

Рівняння (38) є лінійним інтегральним рівнянням типу згортки відносно невідомого ядра релаксації композиту $R_1(t)$. Скористаємось для його розв'язання перетворенням Лапласа, де $R_1(t) \div \tilde{R}_1(p)$. Зображення для інтегрального оператора $\tilde{E}_1(t)$ запишеться аналогічно до (25):

$$\tilde{E}_1[x(t)] \div E_1 \tilde{X}(p) (1 - \tilde{R}_1(p)). \quad (39)$$

Тоді, з урахуванням (39) та (30), знаходимо зображення рівняння (38), з якого отримуємо:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 F_2(p) - F_1(p)}{E_1 F_2(p)}, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \text{де} \quad F_1(p) = f\mu_2 \left(m_1 m_4 m_5 E^* (1 - \tilde{R}(p)) + (v^* - m_1(m_3 + 1)) \right) + E^* \mu_2 (1 - f - \\ g) \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - m_2 m_4 m_5 E^* (1 - \tilde{R}(p)) \right) (1 - \tilde{R}(p)), \quad F_2(p) = \\ \mu_2 \left(m_1 m_4 m_5 E^* (1 - \tilde{R}(p)) + (v^* - m_1(m_3 + 1)) \right) \left(\alpha_1 - \alpha_2 \frac{m_2 m_4 (f + g)}{\mu_2} E^* (1 - \right. \\ \left. \tilde{R}(p)) + \alpha_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) - \alpha_2 m_1 m_4 (f + g) E^* \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - m_2 m_4 m_5 E^* (1 - \right. \\ \left. \tilde{R}(p)) \right) (1 - \tilde{R}(p)). \end{aligned}$$

Знайдемо миттєвий модуль пружності E_1 . Перепишемо рівняння (38) у початковий момент часу $t = 0$. Тоді, з урахуванням $\tilde{E}_1[x(t)] = E_1 x(0)$, отримуємо:

$$\begin{aligned} E_1 \left(\alpha_1 - \alpha_2 \varphi(0) \frac{m_1 m_4 (f + g)}{\mu_2} - \alpha_2 h(0) \frac{m_2 m_4 (f + g)}{\mu_2} + \alpha_2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) = \\ = f + (1 - f - g)\varphi(0). \end{aligned} \quad (41)$$

Використовуючи те, що для диференційовної функції-оригіналу $\varphi(t)$, яка має зображення $\tilde{\Phi}(p)$, $\lim_{p \rightarrow \infty} p\tilde{\Phi}(p) = \varphi(0)$, знайдемо $\varphi(0)$:

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{E^* \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - m_2 m_4 m_5 E^* (1 - \tilde{R}(p)) \right) (1 - \tilde{R}(p))}{m_1 m_4 m_5 E^* (1 - \tilde{R}(p)) + (v^* - m_1(m_3 + 1))} = \\ &= \frac{E^* \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + m_2(m_3 + 1) - m_2 m_4 m_5 E^* \right)}{m_1 m_4 m_5 E^* + (v^* - m_1(m_3 + 1))}.\end{aligned}\quad (42)$$

Переопозначимо отриманий вираз на k . Тоді, підставивши $h(0) = E^*$ та знайдене значення $k = \varphi(0)$ у (41), отримаємо рівняння, з якого визначаємо E_1 :

$$E_1 = \mu_2 \frac{f + k(1 - f - g)}{\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 (\mu_1 - m_4(f + g)(k m_1 + m_2 E^*))}.\quad (43)$$

Знайдемо оригінал $R_1(t)$ ядра інтегрального оператора $\tilde{E}_1$ у співвідношенні для ефективного модуля пружності першого роду. Введемо наступні позначення:

$$\begin{aligned}x &= x(p) = 1 - \tilde{R}(p), \\ c_1 &= E^* m_4 \left(m_1 m_5 (\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1) - \alpha_2 (f + g) \left(v^* m_2 + m_1 \frac{\mu_1}{\mu_2} \right) \right), \\ c_2 &= -m_2 m_4 m_5 \mu_2 E^* (1 - f - g), \\ c_3 &= E^* (m_1 m_4 m_5 \mu_2 f + (1 - f - g)(\mu_1 + \mu_2 m_2(m_3 + 1))), \\ c_4 &= \mu_2 f (v^* - m_1(m_3 + 1)), \\ x_0 &= \frac{1}{c_1} (m_1(m_3 + 1) - v^*) (\alpha_1 \mu_2 + \alpha_2 \mu_1).\end{aligned}\quad (44)$$

Перепишемо зображення (40) з урахуванням співвідношень (44):

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 (x - x_0) - c_2 x^2 - c_3 x - c_4}{E_1 c_1 (x - x_0)}.\quad (45)$$

Особливими точками зображення $\tilde{R}_1(p)$ є особливі точки функції $R(p)$, а також корені рівняння $x(p) = 1 - \tilde{R}(p) = 0$. Для знаходження оригіналу $R_1(t)$ можна використати теорему обернення для перетворення Лапласа.

Розглянемо випадок експоненціального ядра $R(t) = s_1 e^{s_0 t}$. Отримаємо:

$$\tilde{R}(p) = \frac{s_1}{p - s_0}, \quad x(p) = \frac{p - s_0 - s_1}{p - s_0}.\quad (46)$$

Введемо позначення:

$$\begin{aligned}y_1 &= y_1(p) = p - s_0, \\ y_2 &= y_2(p) = y_1 - s_1.\end{aligned}\quad (47)$$

Вираз (45) набуває вигляду:

$$\tilde{R}_1(p) = \frac{E_1 c_1 y_1 (y_2 - x_0 y_1) - c_2 y_2^2 - c_3 y_2 y_1 - c_4 y_1^2}{E_1 c_1 y_1 (y_2 - x_0 y_1)}.\quad (48)$$

Особливі точки функції (48) знаходимо з рівнянь:

$$\begin{aligned}y_2(p) - y_1(p) x_0 &= 0, \\ y_1(p) &= 0.\end{aligned}\quad (49)$$

Отримуємо два прості полюси:

$$\begin{aligned}p_1 &= s_0 + \frac{s_1}{1 - x_0}, \\ p_2 &= s_0.\end{aligned}\quad (50)$$

Тоді оригінал $R_1(t)$ знайденого зображення перетворення $\tilde{R}_1(p)$ знаходимо у вигляді:

$$R_1(t) = q_1 e^{p_1 t} + q_2 e^{p_2 t}. \quad (51)$$

Значення коефіцієнтів q_1 та q_2 у (51) визначаються наступними співвідношеннями:

$$\begin{aligned} q_1 &= \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=p_1} = -\frac{s_1(c_2 x_0^2 + c_3 x_0 + c_4)}{E_1 c_1 (1 - x_0)^2}, \\ q_2 &= \text{Res } \tilde{R}_1(p) \Big|_{p=s_0} = -\frac{c_2 s_1}{E_1 c_1}. \end{aligned} \quad (52)$$

Таким чином, отримано лінійний інтегральний оператор $\tilde{E}_1$ у вигляді функції механічних характеристик матеріалу та функцій часу, що характеризує поздовжній модуль пружності першого роду для експоненціального ядра релаксації.

4. Результати чисельних розрахунків, верифікація моделі та дослідження реологічної поведінки матеріалу

З метою верифікації запропонованої математичної моделі та прогнозування поведінки композита за реальних умов експлуатації було проведено серію чисельних розрахунків, які дозволяють встановити залежність компонентів оператора $\tilde{E}_1$ від об'ємної частки волокна f та порожнини в ньому g .

Проведено розрахунок для композита з ізотропною матрицею та трансропним волокном. Матеріал в'язкопружної матриці – гума типу 67Л, для якої $E_0 = 4,5$ ГПа, статичний (умовно-рівноважний) поздовжній модуль пружності $E_\infty = 2,34$ ГПа, $\nu = 0,5$, інтегральний оператор

$$\tilde{E}[\varepsilon(t)] = E_0 \left(\varepsilon(t) - \int_0^t \frac{E_0 - E_\infty}{E_0} e^{s_0(t-\tau)} d\tau \right), \quad (53)$$

де $s_0 = -1$. Волокно – поліетилен VHDPE Tenfor SN1A з параметрами $E_1 = 60,4$ ГПа, $E_2 = 4,68$ ГПа, $\nu_{12} = 0,38$, $\nu_{23} = 0,55$.

Необхідно зазначити, що при $g = 0$ отримані значення характеристик оператора $\tilde{E}_1$ повністю співпадають з результатами, отриманими в [7].

Результати розрахунку за відповідними співвідношеннями (43), (50) та (52) при фіксованій об'ємній частці порожнини $g = 0,05$ наведено в таблиці 1.

Таблиця 1.

Значення характеристик оператора $\tilde{E}_1$ при різних значеннях f

	f		
	0,3	0,5	0,7
E_1	21,06	32,24	43,42
p_1	-0,88	-0,93	-0,96
q_1	$0,26 \cdot 10^{-3}$	$0,23 \cdot 10^{-3}$	$0,15 \cdot 10^{-3}$
q_2	0,067	0,030	0,012

Для знайдених параметрів реологічної моделі композита при різних значеннях f побудуємо залежності

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\tilde{E}_1[1]}{E_1} = 1 - \int_0^t (q_1 e^{p_1(t-\tau)} + q_2 e^{s_0(t-\tau)}) d\tau = \\ &= 1 + \frac{q_1}{p_1} + \frac{q_2}{s_0} - \frac{q_1}{p_1} e^{p_1 t} - \frac{q_2}{s_0} e^{s_0 t}. \end{aligned} \tag{54}$$

Результати наведено в таблиці 2 при фіксованій об’ємній частці порожнини $g = 0,05$. Відповідні графіки представлено на рисунку 2.

Таблиця 2.

Значення функції $\varphi(t)$ при різних значеннях f

f	Функції $\varphi(t)$					
	$t = 0,0 \text{ c}$	$t = 0,20 \text{ c}$	$t = 0,40 \text{ c}$	$t = 0,60 \text{ c}$	$t = 0,80 \text{ c}$	$t = 1,00 \text{ c}$
0,3	1,00	0,988	0,978	0,970	0,963	0,958
0,5	1,00	0,994	0,990	0,986	0,983	0,981
0,7	1,00	0,998	0,996	0,994	0,993	0,992

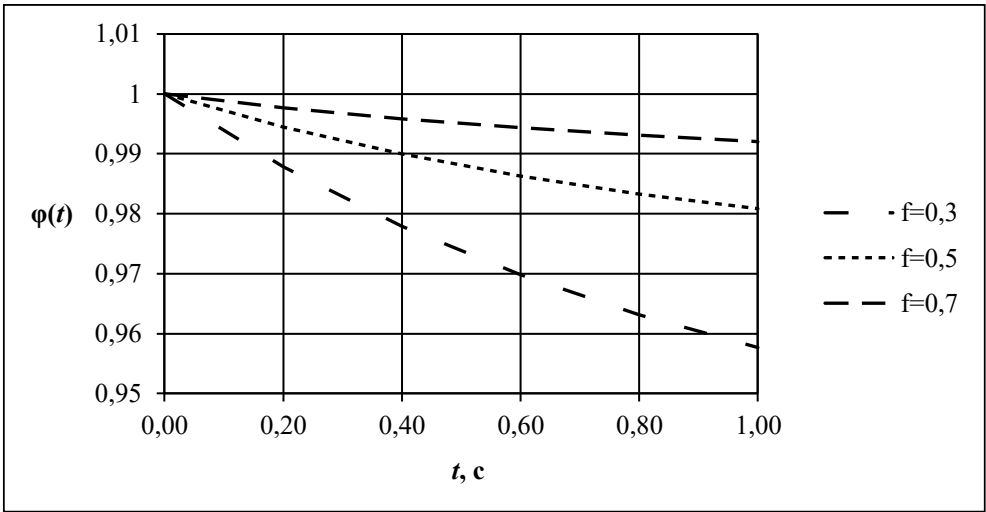


Рис. 2. Часові залежності реологічних характеристик композиту при фіксованій об’ємній частці порожнини g .

Аналіз отриманих результатів свідчить, що збільшення параметра f від 0,3 до 0,7 (при фіксованій об’ємній частці порожнини $g = 0,05$) призводить до зростання миттєвого модуля пружності E_1 більш ніж удвічі (з 21,06 ГПа до 43,42 ГПа). Водночас спостерігається суттєва стабілізація в’язкопружної поведінки: відносний спад функції релаксації $\varphi(t)$ уповільнюється – з 4,2 % до 0,8 % за першу секунду деформування, що вказує на значний опір релаксацийним процесам та стабілізуючий ефект армуючої фази. Така величина функції $\varphi(t)$ обумовлена тим, що при даному виді деформування основні сили навантаження приймають волокна, тому реологічні властивості матриці проявляються не так суттєво, як при інших видах деформування.

Побудуємо графіки залежностей характеристик композиту від об’ємної частки порожнини g при фіксованих значеннях об’ємної частки волокна $f = 0,3$. Відповідні розрахунки наведено в таблицях 3 та 4, візуальне представлення – на рисунку 3.

Таблиця 3.

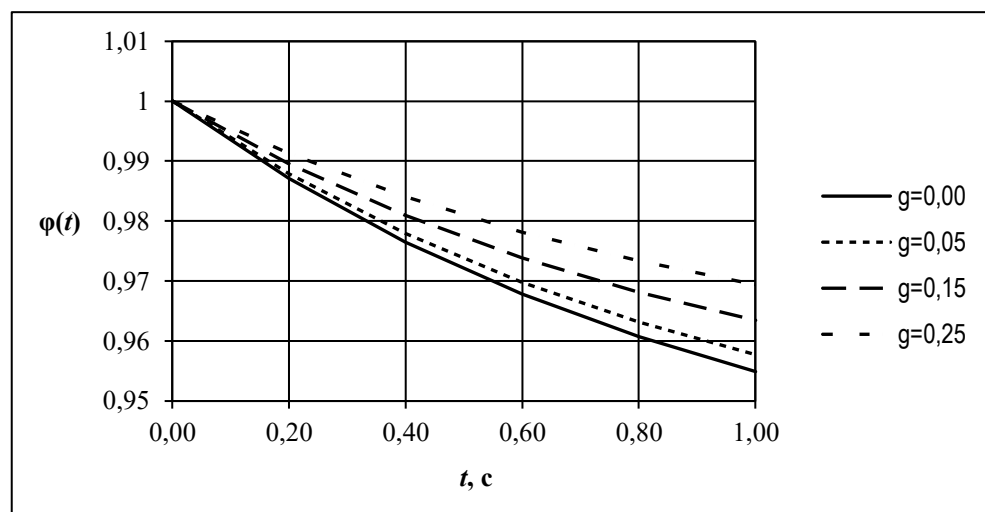
Значення характеристик оператора $\tilde{E}_1$ при різних значеннях g

	g					
	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
E_1	21,29	21,06	20,83	20,61	20,38	20,16
p_1	-0,92	-0,88	-0,86	-0,84	-0,83	-0,82
q_1	$0,288 \cdot 10^{-3}$	$0,259 \cdot 10^{-3}$	$0,238 \cdot 10^{-3}$	$0,222 \cdot 10^{-3}$	$0,209 \cdot 10^{-3}$	$0,199 \cdot 10^{-3}$
q_2	0,071	0,067	0,062	0,058	0,053	0,048

Таблиця 4.

Значення функції $\varphi(t)$ при різних значеннях g

g	Функції $\varphi(t)$					
	$t = 0,0$ с	$t = 0,20$ с	$t = 0,40$ с	$t = 0,60$ с	$t = 0,80$ с	$t = 1,00$ с
0,00	1,00	0,987	0,976	0,968	0,961	0,955
0,05	1,00	0,988	0,978	0,970	0,963	0,958
0,10	1,00	0,989	0,979	0,972	0,966	0,961
0,15	1,00	0,990	0,981	0,974	0,968	0,963
0,20	1,00	0,990	0,982	0,976	0,971	0,966
0,25	1,00	0,991	0,984	0,978	0,973	0,969

Рис. 3. Часові залежності реологічних характеристик композиту при фіксованій об'ємній частці волокна f .

Аналіз чисельних результатів, наведених у табл. 3 та табл. 4, дозволяє оцінити вплив внутрішньої порожнистості армуючої фази на макроскопічні властивості системи. Зростання параметру g від 0 (суцільне волокно) до 0,25 (тонкостінне волокно) очікувано знижує миттєвий модуль пружності матеріалу E_1 на 5,3 % (з 21,29 ГПа до 20,16 ГПа) внаслідок зменшення ефективної площі перерізу армуючої фази. Водночас збільшення параметра g чинить стабілізуючий вплив на кінетику релаксації композита. Так, за першу секунду деформування

відносний спад функції $\varphi(t)$ для суцільного волокна ($g = 0$) становить 4,5 %, тоді як для порожнистого волокна з $g = 0,25$ цей спад уповільнюється до 3,1 %. Таке уповільнення відносної релаксації системи зумовлене перерозподілом локальних напружень між високов'язкою гумовою матрицею та жорсткішим пружним каркасом порожнистих волокон.

Висновки

У роботі запропоновано та теоретично обґрунтовано нову структурно-аналітичну модель лінійної в'язкопружності для односпрямованого композиційного матеріалу з гексагональною схемою армування транстропними порожнистими волокнами. На основі проведених аналітичних викладок розроблено ефективний математичний апарат гомогенізації такого неоднорідного середовища за допомогою методу представницького об'ємного елемента. Шляхом сумісного розв'язання відповідних вісесиметричних крайових задач для складеного та суцільного циліндрів і застосування апарату інтегральних операторів спадкової теорії Больцмана-Вольтера отримано аналітичні вирази для миттєвого ефективного поздовжнього модуля пружності та ефективного ядра релаксації матеріалу у вигляді функції механічних характеристик компонентів композиційного матеріалу та часу.

Завдяки дослідженню впливу геометричних параметрів фаз встановлено, що збільшення об'ємної частки порожнистих волокон зумовлює суттєве зростання миттєвого модуля пружності матеріалу та одночасно уповільнює відносний спад функції релаксації, стабілізуючи в'язкопружну поведінку композита. Водночас визначено, що зростання внутрішньої порожнистості армуючих елементів призводить до деякого зниження початкової жорсткості системи, проте викликає зворотний ефект у часі, уповільнюючи швидкість релаксаційних процесів у матеріалі.

Верифікацію моделі проведено шляхом граничного переходу до випадку армування суцільними волокнами. Отримані чисельні результати повністю збігаються з відомими в літературі розв'язками, що підтверджує коректність та достовірність розробленого математичного апарату та дозволяє рекомендувати запропоновану модель для проектування та оптимізації конструкційних елементів із порожнистими волокнистими елементами.

1. S.I. Kundalwal, Review on micromechanics of nano- and micro-fiber reinforced composites, *Polymer Composites*, **39**(12), 4243–4274 (2018). <https://doi.org/10.1002/pc.24569>
2. G. Wang, W. Tu, M.-J. Pindera, Tailoring the moduli of composites using hollow reinforcement, *Composite Structures*, **160**, 838–853 (2017). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.060>
3. А.В. Столярова, *Ефективні механічні характеристики композиційних матеріалів із транстропними порожнистими волокнами*, Видавничий дім «Гельветика», Херсон (2021).
4. Y. Chen, Z. Zhao, D. Li et. al., Constitutive modeling for linear viscoelastic fiber-reinforced composites, *Composite Structures*, **263**, 113679 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2021.113679>
5. E.J. Barbero, R. Luciano, Micromechanical formulas for the relaxation tensor of linear viscoelastic composites with transversely isotropic fibers, *International Journal of Solids and*

- Structures*, **32**(13), 1859–1872 (1995). [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(94\)00233-M](https://doi.org/10.1016/0020-7683(94)00233-M)
6. S. Grebenyuk, M. Klymenko, O. Titova, A. Boguslavskaya, Effective longitudinal elastic modulus of the composite with viscoelastic matrix and transtropic fiber, *20th International Scientific Conference: Mechanika 2015 - Proceedings*, 96–100 (2015).
7. М.І. Клименко, С.М. Гребенюк, С.І. Гоменюк, *Ефективні механічні характеристики в'язкопружних композитів*, Видавничий дім «Гельветика», Херсон (2019).
8. R. Rodríguez-Ramos, J.A. Otero, O.L. Cruz-González et. al., Computation of the relaxation effective moduli for fibrous viscoelastic composites using the asymptotic homogenization method, *International Journal of Solids and Structures*, **190**, 281–290 (2019). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.11.014>
9. O.L. Cruz-González, R. Rodríguez-Ramos, J.A. Otero et. al., On the effective behavior of viscoelastic composites in three dimensions, *International Journal of Engineering Science*, **157**, 103377 (2020). <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2020.103377>
10. Y. Zhang, Z. Xia, F. Ellyin, Nonlinear viscoelastic micromechanical analysis of fibre-reinforced polymer laminates with damage evolution, *International Journal of Solids and Structures*, **42**(2), 591–604 (2005). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.06.021>
11. T.D. Pallicity, T. Böhlke, Effective viscoelastic behavior of polymer composites with regular periodic microstructures, *International Journal of Solids and Structures*, **216**, 167–181 (2021). <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2021.01.016>
12. T.H. Hoang, M. Guerich, J. Yvonnet, Determining the size of RVE for nonlinear random composites in an incremental computational homogenization framework, *Journal of Engineering Mechanics - ASCE*, **142**(5), 04016018 (2016). [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001057](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001057)

Вплив тертя на поширення крайової тріщини в круговому диску під рухомих контактним навантаженням

Г. П. Марченко¹, І. А. Рудавська

Фізико-механічний інститут ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів, Україна

¹ h.p.marchenko@gmail.com

Ключові слова: круговий диск, крайова тріщина, контактне навантаження, кочення, тертя, сингулярне інтегральне рівняння, коефіцієнти інтенсивності напружень, залізничне колесо.

Нові розв'язки контактних задач про напружений стан або коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) для кругових дисків з тріщинами під дією різних зовнішніх навантажень мають самодостатнє значення серед задач математичної теорії тріщин. Разом з тим вони корисні і для проведення теоретично обґрунтованих розрахунків на міцність та довговічність елементів машин, які перебувають в умовах контактної втоми кочення.

Формулювання задачі. Нехай маємо пружний ізотропний круговий диск радіусом R , обмежений контуром L_0 , з центром у початку основної системи координат xOy (рис. 1а). Диск послаблений крайовою прямолінійною тріщиною довільної орієнтації з контуром L , віднесеним до локальної системи координат $x_1O_1y_1$, локальна система пов'язана з основною співвідношенням $z = z_1 e^{i\alpha} - R$, α – кут нахилу осі O_1x_1 до Ox . В центрі диска також розташуємо полюс полярної системи координат (r, φ) , коли $z = r e^{i\varphi}$.

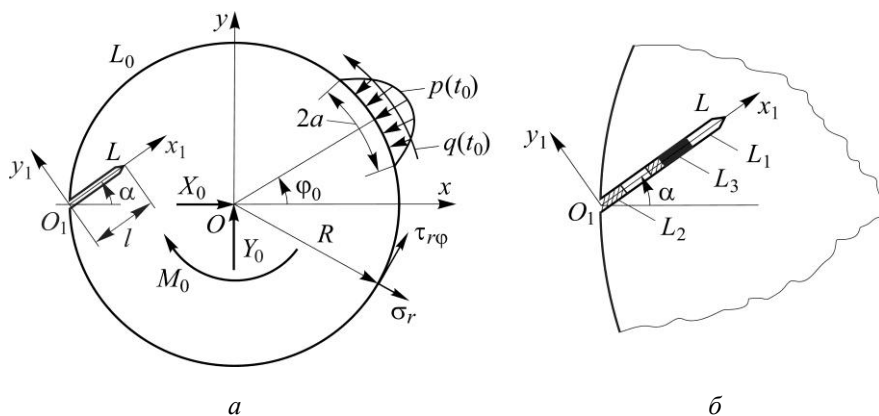


Рис. 1. Крайова прямолінійна тріщина у круговому диску під дією модельного контактного навантаження: а – загальна схема задачі; б – умовна схема взаємодії берегів тріщини.

На ділянці межі диска завдовжки $2a$ діють контактний тиск з довільним розподілом $p(t_0)$ і тангенційні сили (сили тертя ковзання) $q(t_0)$, зв'язані з ним законом Амонтона через коефіцієнт тертя f_s ($t_0 \in L_0$). Причому сили тертя направлені у додатному напрямку відносно полярної системи координат. Контактне навантаження зрівноважується прикладеними у центрі диска зосередженими силами X_0 , Y_0 і моментом M_0 . Розташування контактного навантаження відносно тріщини задає кут φ_0 , що відповідає центру ділянки контакту (ЦДК) і змінюється від 0° до 360° . Кутові

межі ділянки контакту визначають кути φ_1 і φ_2 , зв'язаними з ЦДК співвідношенням $\varphi_0 = (\varphi_1 + \varphi_2) / 2$.

Таким чином, крайові умови задачі на межі диска матимуть вигляд

$$\sigma_r + i\tau_{r\phi} = \begin{cases} (-1 + if_s)p(t_0), & \text{якщо } \phi \in [\varphi_1, \varphi_2] \\ 0, & \text{якщо } \phi \notin [\varphi_1, \varphi_2]; \quad t_0 \in Re^{i\phi}. \end{cases} \quad (1)$$

Береги тріщини, вільні від зовнішніх зусиль, за певних розташувань контактного навантаження (за певних φ_0) можуть контактувати. Отже, для загального випадку взаємодії берегів тріщини (розкриття її берегів, проковзування з тертям, зчеплення) крайові умови задачі такі:

$$N^\pm(t) + iT^\pm(t) = 0, \quad t \in L_1; \quad (2)$$

$$v^+(t) - v^-(t) = 0, \quad t \in L_2; \quad (3)$$

$$T^\pm(t) = f_c \operatorname{sign}[T(t)] |N(t)|, \quad t \in L_2; \quad (4)$$

$$u^+(t) - u^-(t) + i[v^+(t) - v^-(t)] = 0, \quad t \in L_3. \quad (5)$$

У формулах (2)–(5) контур тріщини L складається зі сукупності ділянок L_1 , на яких тріщина відкрита, L_2 , на яких контактуючі береги тріщини проковзують з тертям, та L_3 , де вони зчеплені (рис. 1 б). Розміри цих ділянок наперед невідомі та підлягають визначенню під час розв'язання задачі. У формулі (4) величина f_c задає коефіцієнт тертя між берегами тріщини. Через N і T , v і u позначено відповідно нормальні і дотичні складові зусиль на берегах тріщини та переміщень їх берегів у локальній системі координат $x_1O_1y_1$. При цьому верхні індекси відповідають граничним значенням функцій на контурі L за прямування до верхнього (+) та нижнього (–) берегів тріщини. Крім того, на ділянках зчеплення берегів тріщини L_3 має виконуватися умова

$$|T(t)| < f_c |N(t)|, \quad t \in L_3.$$

Рівняння рівноваги диска такі:

$$X_0 + iY_0 = i \int_{L_0} (\sigma_r + i\tau_{r\phi}) dt_0; \quad M_0 = \operatorname{Re} \int_{L_0} (\sigma_r + i\tau_{r\phi}) \bar{t}_0 dt_0. \quad (6)$$

Сингулярні інтегральні рівняння задачі та їх числове розв'язання. Щоб розв'язати задачу, скористаємося принципом суперпозиції напружених станів. Запишемо комплексні потенціали Колосова–Мусхелішвілі $\Phi(z)$ і $\Psi(z)$ у вигляді сум

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z); \quad \Psi(z) = \Psi_0(z) + \Psi_1(z), \quad (7)$$

де функції $\Phi_0(z)$ і $\Psi_0(z)$ описують напружений стан у суцільному диску, викликаний зовнішніми зусиллями (1), (6) [1], а функції $\Phi_1(z)$ і $\Psi_1(z)$ – збурений напружений стан, спричинений тріщиною [2].

Задовольняючи тепер за допомогою потенціалів (7) та з урахуванням формул (1), (3), (5) крайові умови (2), (4), отримуємо систему сингулярних інтегральних рівнянь першого роду з ядром Коші для невідомих $g'_1(t)$ і $g'_2(t)$:

$$\operatorname{Re} D(\tau) = \pi \operatorname{Re} P(\tau), \quad \tau \in L_1; \quad (8)$$

$$\operatorname{Im} D(\tau) + \rho \operatorname{Re} D(\tau) = \pi [\operatorname{Im} P(\tau) + \rho \operatorname{Re} P(\tau)], \quad \tau \in L_1 \cup L_2. \quad (9)$$

У лівих частинах цих рівнянь функція

$$D(\tau) = \int_{L_1} [R(t, \tau) + S(t, \tau)] g'_1(t) dt + i \int_{L_2} [R(t, \tau) - S(t, \tau)] g'_2(t) dt,$$

де невідомі

$$g'_1(t) = \frac{2G}{1+\kappa} \frac{d}{dt} [v^+(t) - v^-(t)]; \quad g'_2(t) = -\frac{2G}{1+\kappa} \frac{d}{dt} [u^+(t) - u^-(t)]$$

визначають похідні від стрибків нормальних і дотичних переміщень на контрі тріщини, G – модуль зсуву, κ – стала Мусхелішвілі. Для плоского напруженого стану (тонкий диск) $\kappa = (3 - \mu) / (1 + \mu)$, μ – коефіцієнт Пуассона. Коефіцієнт ρ у формулі (9) набуває значень

$$\rho = \begin{cases} 0, & \tau \in L_1 \\ f_c \operatorname{sign}[T(\tau)], & \tau \in L_2, \end{cases}$$

а ядра $R(t, \tau)$ і $S(t, \tau)$ рівнянь (8), (9) визначають за результатами монографії [2]. Праві частини цих рівнянь задають діюче на диск зовнішнє навантаження через функцію

$$P(\tau) = -\left\{ 2 \operatorname{Re} \Phi_0(H) + e^{-2i\alpha} \left[H \overline{\Phi'_0(H)} + \overline{\Psi_0(H)} \right] \right\},$$

де $H = \tau e^{i\alpha} - R$.

Систему сингулярних інтегральних рівнянь (8), (9) розв'язуємо числовим методом механічних квадратур [2]. КІН у вершині тріщини шукаємо на основі розв'язку системи за відомою формулою [3], яку у наших позначеннях запишемо так:

$$K_I - i K_{II} = - \lim_{t \rightarrow l} \left[\sqrt{2\pi|t-l|} (g'_1(t) + i g'_2(t)) \right].$$

При цьому за наявності контакту біля вершини тріщини у разі проковзування берегів $K_I = 0$, а за зчеплення – $K_I = K_{II} = 0$.

Залишилось тільки знайти межі контактуючих ділянок тріщини під дією заданого контактного навантаження, в тому числі ділянок зчеплення. Для цього застосовуємо метод послідовних наближень [4].

Крайова похила тріщина поперечного зсуву в круговому диску: числові результати. Розрахунки для крайової похилої тріщини в круговому диску проводили на прикладі локомотивного колеса діаметром $2R = 1050$ мм. За модельне контактне навантаження вибрали сталий тиск інтенсивності p за наявності сил тертя $f_s p$. Довжину ділянки контакту колеса з рейкою $2a$ прийняли рівною 13 мм. Коефіцієнт тертя між колесом і рейкою в суху погоду $f_s = 0,3$ [5], коефіцієнт тертя $f_c = 0,3$, коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$. Розглянуто три фіксовані довжини тріщини: $l = 1$ мм ($l/R = 0,002$), $l = 5$ мм ($l/R = 0,01$) та $l = 10$ мм ($l/R = 0,2$). Кут орієнтації тріщини $\alpha = -60^\circ$, що відповідає характерному (пологову) куту поширення поверхневих тріщин у тілах кочення [4, 6].

Цикл навантаження під час коченні колеса по рейці моделювали переміщенням заданого контактного навантаження вздовж контуру диска у напрямі, протилежному напрямку кочення. Отже, одному оберту колеса відповідає одне проходження контактної навантаження над тріщиною, коли КІН, як буде доведено, виявляються найбільшими.

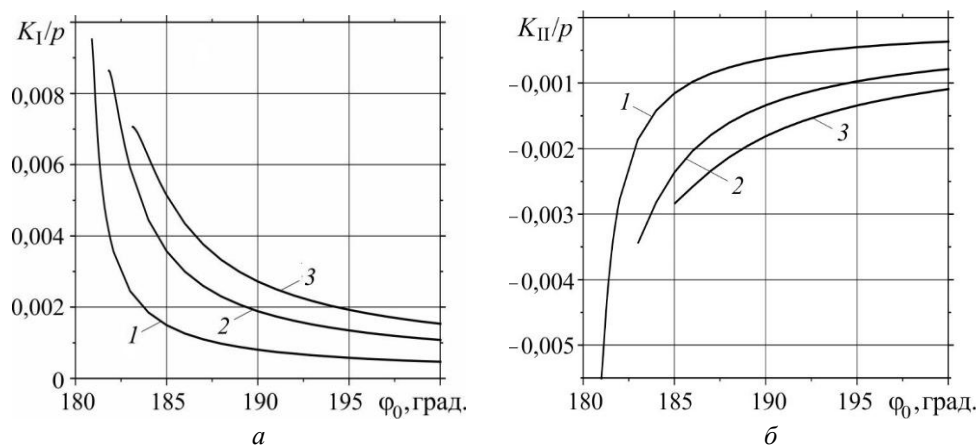


Рис. 2. Зміна безрозмірних КІН K_I/p (а) і K_{II}/p (б) у вершині тріщини залежно від розташування контактної навантаження: 1 – $l = 1$ мм; 2 – $l = 5$ мм; 3 – $l = 10$ мм.

Обчислено значення безрозмірних КІН K_I/p (рис. 2а) і K_{II}/p (рис. 2б) у вершині тріщини залежно від розташування контактної навантаження (кута ϕ_0), коли тріщина відкрита, а ЦДК знаходиться у третьому квадранті біля її гирла ($\phi_0 = 180^\circ$). Бачимо, що КІН K_I і K_{II} інтенсивно змінюються, коли ЦДК перебуває недалеко від гирла тріщини, а з наближенням ЦДК до гирла досягають своїх найбільших значень: додатних за величиною для K_I і від'ємних – для K_{II} . При цьому що менша довжина відкритої тріщини, тим ці значення більші. З віддаленням ЦДК від гирла КІН монотонно спадають (K_{II} за абсолютною величиною), коли вершина тріщини починає поступово виходити із зони впливу контактної навантаження.

Це можна пояснити так. Під час переміщення контактної навантаження вершина тріщини перебуває переважно у зоні стиску. Цілком очевидно, що її розкриття відбувається насамперед за рахунок діючих на ділянці контакту дотичних зусиль (сил тертя). З того моменту, коли ЦДК минає гирло тріщини, залишаючи його трохи позаду себе, сили тертя миттєво розкривають тріщину. Їх вплив, судячи з рис. 2, максимальний за умови якомога ближчого розташування ЦДК до гирла тріщини. Потім – з віддаленням ЦДК від гирла тріщини – вплив сил тертя поступово згасає, повністю зникаючи за достатньої віддалі від гирла.

Проте найбільш небезпечний варіант взаємодії колеса з рейкою в циклі кочення все ж таки спостерігається, коли тріщина поблизу ділянки контакту повністю закрита. Зрозуміло, що для тріщини із зімкнутими біля вершини берегами коефіцієнт інтенсивності K_I – на відміну від отриманого перед цим результату – з фізичних міркувань нульовий.

На рис. 3 можна простежити за зміною безрозмірних K_{II}/p , коли ділянка контакту спочатку «найжджає» на гирло тріщини, а потім минає його. Бачимо, що КІН K_{II}

найбільші, коли ЦДК розташований дуже близько до гирла тріщини. Причому значення $K_{II,max}$ і $K_{II,min}$ досягаються, коли ЦДК перебуває як справа, так і зліва від гирла. Із ростом довжини тріщини різниця між цими значеннями (розмах ΔK_{II}) збільшується. А оскільки для закритої тріщини $K_I = 0$, то тут спостерігається ефект її прямолінійного росту.

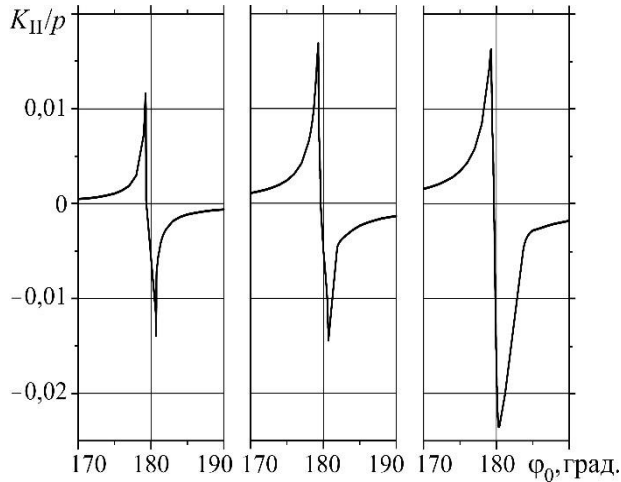


Рис. 3. Зміна безрозмірних КІН K_{II}/p у вершині тріщини залежно від розташування контактного навантаження: $a - l = 1$ мм; $b - l = 5$ мм; $c - l = 10$ мм.

Підсумовуючи отримані результати, констатуємо, що основний вплив модельного контактного навантаження на відносно невелику тріщину в циклі кочення реалізується, коли воно діє безпосередньо біля її гирла ($175^\circ < \varphi_0 < 185^\circ$). При цьому тут найбільші КІН K_{II} значно перевищують максимуми K_I (порів. рис. 2а і 3). І саме тому похила тріщина стає особливо небезпечною на зсув.

Отже, поверхнева полого тріщина в умовах дії стискальних напружень спочатку поширюється прямолінійно в глиб матеріалу шляхом зсуву. Потім вона, викривляючи свою траєкторію, може вийти на поверхню або з'єднатися з іншою поверхневою тріщиною [6]. Тоді на ободі колеса утворюється контактнo-втомне пошкодження типу вищербина у вигляді ямки викришування (пітингу).

Крайова радіальна тріщина нормального розриву в круговому диску: числові результати. Розрахунки для крайової радіальної тріщини ($\alpha = 0^\circ$; див. рис. 1а) проводили на прикладі вагонного колеса діаметром $2R = 920$ мм (за стандартом En). Модельне контактне навантаження таке саме, як у попередньому прикладі. Довжина ділянки контакту $2a = 13$ мм. Коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,3$. Коефіцієнту тертя надавали значень $f_s = 0; 0,1; 0,3$ та $0,5$, характерних для технічної пари колесо – рейка за різних умов експлуатації [5].

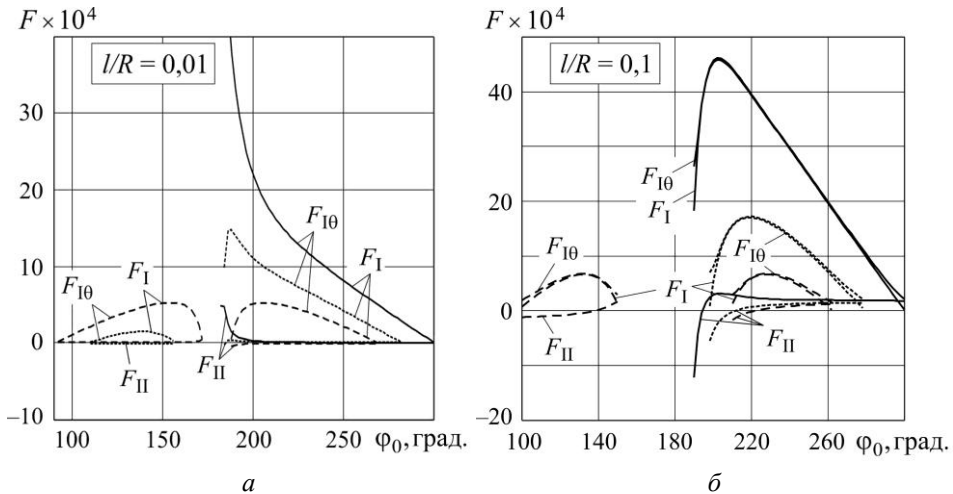


Рис. 4. Зміна безрозмірних КІН $F_{I,II} = K_{I,II} / p\sqrt{\pi R}$ та $F_{I0} = K_{I0} / p\sqrt{\pi R}$ ($R = 460$ мм) залежно від розташування контактної навантаження: а – $l/R = 0,01$; б – $l/R = 0,1$. Суцільні криві – $f_s = 0,3$; пунктирні – $f_s = 0,1$; штрихові – $f_s = 0$.

Насамперед досліджували такі комбінації параметрів ϕ_0 , l/R та f_s , за яких тріщина розкрита ($K_I > 0$) та схильна розвиватися шляхом нормального розриву. Для відносно невеликої тріщини ($l/R = 0,01 \dots 0,1$) коефіцієнти F_{II} близькі до нуля і майже не впливають на F_{I0} , які на рис. 4 практично збігаються з F_I . Отже, за таких обставин можливий майже прямолінійний ріст тріщини за механізмом нормального розриву. Цьому сприяє і те, що за переміщення контактної навантаження біля гирла тріщини (найбільш небезпечний період у циклі кочення) лінія тріщини майже перпендикулярна напрямку діючих в контактні сили тертя. Для порівняння лінія похилої (пологої) тріщини, яку досліджували вище, навпаки близька до цього напрямку, що сприяє її росту за зсувним механізмом.

За фіксованих довжин тріщини та різних комбінацій параметрів f_s і ϕ_0 , які забезпечують її розкриття, були встановлені такі розміщення контактної навантаження ($\phi_0 = \phi_0^*$), за яких досягаються максимальні значення КІН мішаного типу

$$K_{I0} = \cos^3 \frac{\theta^*}{2} \left(K_I - 3K_{II} \operatorname{tg} \frac{\theta^*}{2} \right); \quad \theta^* = 2 \arctg \frac{K_I - \sqrt{K_I^2 + 8K_{II}^2}}{4K_{II}},$$

а саме:

$$K_{I0}^* = \max K_{I0}(\phi_0, l/R, f) = K_{I0}(\phi_0^*, l/R, f), \quad (10)$$

при повному обході модельним контактним навантаженням контуру диска ($0^\circ \leq \phi_0 \leq 360^\circ$).

Слід зауважити, що згідно з σ_θ -критерієм [7] саме коефіцієнти K_{I0} контролюють ріст розривної тріщини за складного напруженого стану. Таким чином визначаємо комбінації параметрів ϕ_0 , l/R , f , найсприятливіші для поширення радіальної крайової тріщини розривом за кочення.

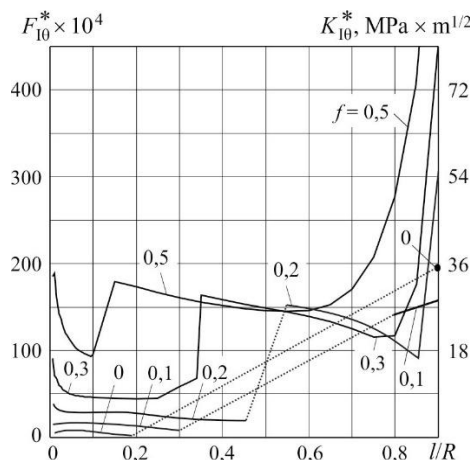


Рис. 5. Залежність максимальних КІН мішаного типу $F_{10}^* = K_{10}^* / p\sqrt{\pi R}$ ($R = 460$ мм) та K_{10}^* для $p = 1500$ МПа від розміру тріщини для різних коефіцієнтів тертя f_s .

Згідно з (10) побудовано криві залежностей максимальних КІН F_{10}^* і відповідних їм K_{10}^* (для сталого тиску $p = 1500$ МПа) від відносної довжини тріщини l/R для різних коефіцієнтів тертя $f_s = 0 \dots 0,5$ (рис. 5). За нульового або невеликих коефіцієнтів тертя в контакті кочення ($f_s = 0 \dots 0,2$) спостерігаємо проміжний діапазон зміни відносних довжин некоротких тріщин (умовно виділений за допомогою пунктиру), коли береги тріщин біля їх вершин зімкнуті, оскільки перебувають в полі стискальних напружень. Тому для цього діапазону ріст тріщин за розривним механізмом неможливий. Проте за великих коефіцієнтів тертя ($f_s = 0,3; 0,5$), коли сили тертя значні і тим самим дуже сприяють розкриттю тріщини, цей діапазон зникає.

Посилення тертя між тілами кочення, як правило, веде до суттєвого збільшення максимальних КІН мішаного типу K_{10}^* . Цікаво, що для великих коефіцієнтів тертя ($f_s = 0,3; 0,5$) з підростанням відносних довжин тріщин, починаючи з найменшої ($l/R = 0,01$), коефіцієнти K_{10}^* спочатку спадають, і тільки після цього настає етап, коли вони швидко (стрибоподібно) починають зростати до своїх локальних максимумів. А найбільші КІН K_{10}^* отримуємо, очевидно, для довгих тріщин і особливо з наближенням відносних довжин тріщин до їх кінцевого значення 0,9. Це пояснюється тим, що вершини таких тріщин зближуються з центром диску.

Треба зазначити, що вищерблювання поверхні кочення тут відбувається інакше, ніж у попередньому прикладі. Спочатку поверхнева радіальна тріщина, що утворилася на поверхні кочення, росте майже прямолінійно в гліб матеріалу за механізмом нормального розриву. І тільки після цього на деякій глибині можливе її перетинання з підповерхневою тріщиною, що призводить до відокремлення фрагментів матеріалу поверхні у вигляді лусочок [8], тобто вищербина формується шляхом відшаровування.

Висновки. На прикладах залізничних коліс проілюстровано трибологічний аспект пошкоджень поверхонь кочення. Показано, що діючі на ділянці контакту сили тертя ковзання є головним чинником формувань контактнo-втомних пошкоджень цих поверхонь. Доведено, що основний вплив модельного контактного навантаження на поверхневі тріщини невеликого розміру реалізується, коли воно діє безпосередньо біля

тріщин. А їх орієнтація відносно напрямку дії сил тертя значною мірою визначає домінуючий механізм руйнування.

Слід зауважити, що отримані результати корелюють з класичними для контактної втоми кочення результатами Кіра і Брайанта [6, 8], які в рамках підходу Герца моделювали тіло кочення півплощиною (півпростором). Такий самий підхід (без врахування геометрії тіла кочення) застосовувався нами раніше [4].

1. В.В. Панасюк і М.Й. Теплий, *Деякі контактні задачі теорії пружності*, Наук. думка, Київ (1975).
2. В.В. Панасюк, М. П. Саврук и А.П. Дацышин, *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках*, Наук. думка, Киев, 1976.
3. М.П. Саврук, *Двумерные задачи упругости для тел с трещинами*, Наук. думка, Киев (1981).
4. O. Datsyshyn and V. Panasyuk, *Structural integrity assessment of engineering components under cyclic contact*, Springer, Cham, (2020). <https://doi.org/10.1007/978-3-030-23069-2>
5. D.F. Moore, *Principles and Applications of Tribology*, Pergamon Press (1975). <https://doi.org/10.1016/C2013-0-02605-9>
6. L.M. Keer and M. D.Bryant, A pitting model for rolling contact fatigue, *Trans. ASME: J. Lubric. Technol.*, **105**(2), 198–205 (1983). <https://doi.org/10.1115/1.3254565>
7. В.В. Панасюк, *Предельное равновесие хрупких тел с трещинами*, Наук. думка, Киев (1968).
8. L.M. Keer, M.D. Bryant, and G. K. Haritos, Subsurface and surface cracking due to Hertzian contact, *Trans. ASME: J. Lubric. Technol.*, **104**(3), 347–351 (1982). <https://doi.org/10.1115/1.3253217>

Контрольоване моделювання контактних елементів для мінімізації обчислювальних похибок і часу розрахунку

В.В. Сатокін¹

Державне підприємство "Конструкторське бюро "Південне" ім. М.К. Янгеля

¹ ofasle@gmail.com

Автором пропонується принципово інший підхід до скінченно-елементного моделювання конструкцій, в яких буде відбуватись контактна взаємодія. Для повної відповідності контактуючи об'єкти об'єднуються в один, потім між ними будується поверхня розмежування, потім будуються окремі об'єми, які залишаються об'єднаними. Роки проведених розрахунків і порівняння з реальністю показали, що при скінченно-елементному моделюванні зазорів між контактуючими об'єктами (поверхнями) не повинно бути – зазор треба робити нульовим. Після побудови сітки скінченних елементів проводиться розділення об'ємів шляхом копіювання одного з них в будь-який бік і переміщення назад. Це дозволяє створити окремі об'єми, які мають повне співпадіння по сітці скінченних елементів в області контакту, якій згодом і будується.

Ключові слова: контактні елементи, регулярні сітки, структурні сітки, фізична відповідність.

Вступ

Сучасний розвиток техніки дозволив, в межах адекватної оцінки, при скінченно-елементному моделюванні нехтувати кількістю скінченних елементів в моделі і відповідно тривалістю часу розрахунків.

В гонитві за максимальною деталізацією контактної взаємодії основне покладання відбувається на мінімізацію розмірів елементів. Що призводить до непомірного збільшення часу розрахунку і втрати контролю точності і сходження.

Побудова регулярних і структурованих сіток скінченних елементів типу «цеглина» покращує моделювання і сходження контактної взаємодії, але залишає багато питань по фізичній відповідності моделі і реальній конструкції. Скінченно-елементне створення вільних сіток з тетраедрів при моделюванні контактних взаємодій значно погіршує сходження, збільшує час розрахунку і зменшує відповідність з реальними напружено-деформованими станами.

Автором пропонується принципово інший підхід до скінченно-елементного моделювання конструкцій, в яких буде відбуватись контактна взаємодія.

1. Постановка завдання

Державним підприємством «Конструкторське бюро «Південне» було поставлене завдання по розробці і створенню моделювання контактної взаємодії в комплексі скінченно-елементного аналізу ANSYS, яке було б максимально відповідне до реальної експлуатації конструкції.

2. Досліджувані моделі

Розглянемо напружено-деформований стан з контактною взаємодією на прикладі циліндра у отворі, показаного на рисунку 1.

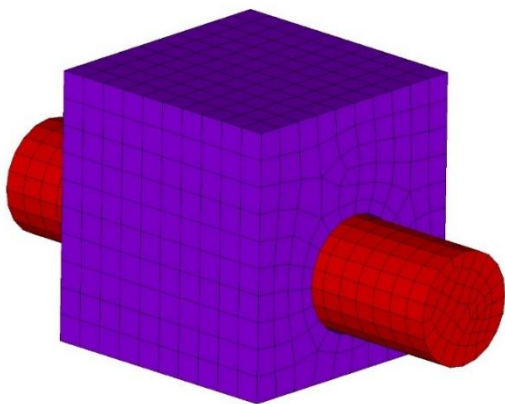


Рис. 1 – Скінченно-елементна модель об'єкта досліджень.

Роки проведених розрахунків і порівняння з реальністю показали, що при скінченно елементному моделюванні зазорів між контактуючими об'єктами (поверхнями) не повинно бути – зазор треба робити нульовим. Це досягається використанням геометричних розмірів без урахування допусків на збирання конструкції. Для повної відповідності контактуючі об'єкти об'єднуються в один, потім між ними будується поверхня розмежування, потім будуються окремі об'єми, які залишаються об'єднаними.

Після побудови сітки скінченних елементів проводиться розділення об'ємів шляхом копіювання одного з них в будь-який бік і переміщення назад. Це дозволяє створити окремі об'єми, які мають повне співпадіння по сітці скінченних елементів в області контакту, якій згодом і будується.

На рисунку 2 показані досліджувані розрахункові моделі з зазором і без.

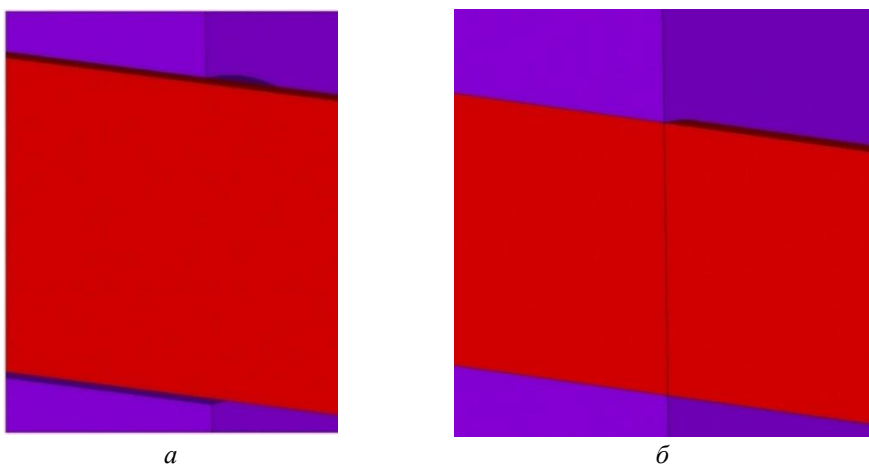


Рис.2 – Модель з зазором – а, та без зазору – б.

Для аналізу напружено-деформованого стану (НДС) використовувалась половина моделі, з накладанням відповідних граничних умов. Куб був закріплений по верхній грані. На бічні грані циліндру прикладались сили, діючи вертикально вниз.

Навантаження, розміри, властивості матеріалів однакові.

Масштабний фактор відображення однаковий.

В моделі використовувались скінченні елементи типу «цеглина» і контактні елементи типу «TARGE» та «CONTA».

3. Аналіз результатів

На рисунках 3 і 4 показаний напружено-деформований стан досліджуваної конструкції.

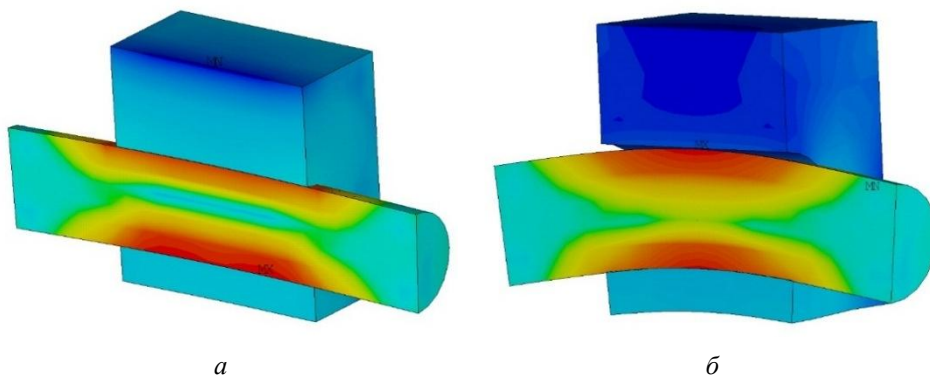


Рис. 3 – НДС моделі з зазором – *a*, та без зазору – *б*.

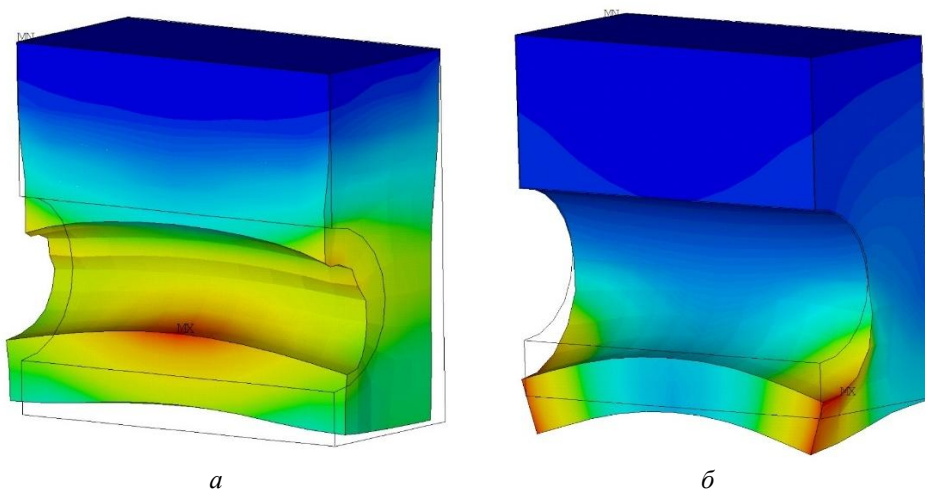


Рис. 4 – Переміщення в моделі з зазором – *a*, та без зазору – *б*. Масштабний фактор 10. Контуром показаний початковий стан.

Як бачимо з аналізу і порівняння НДС на рисунках 3 і 4 саме моделювання «без зазору» відповідає реальному НДС в досліджуваній конструкції. Тоді як моделювання контактної взаємодії «з зазором» ні.

При наявності декількох контактних взаємодій в будь-якій досліджуваній конструкції моделювання «з зазором» ще більше спотворює НДС і результати дослідження. При використанні не елементів типу «цеглина», а елементів типу «тетраedr» ситуація стане набагато гірше, адже контактні поверхні створені гранями елементів будуть мати безліч не відповідних особливостей.

Розглянемо НДС для двох варіантів побудови скінченно-елементної моделі досліджуваної конструкції «без зазору».

В перший будемо, як два окремі об'єми зі скінченних елементів типу «тетраедр».

В другий з елементів типу «цеглина» і конструкції, побудованої по запропонованій автором схемі з попереднім об'єднанням в один об'єм і наступним розділенням на два, вже після побудови скінченних елементів.

На рисунках 5 і 6 показані побудовані контактні елементи досліджуваної конструкції без зазору для варіантів елементів «тетраедр» і «цеглина».

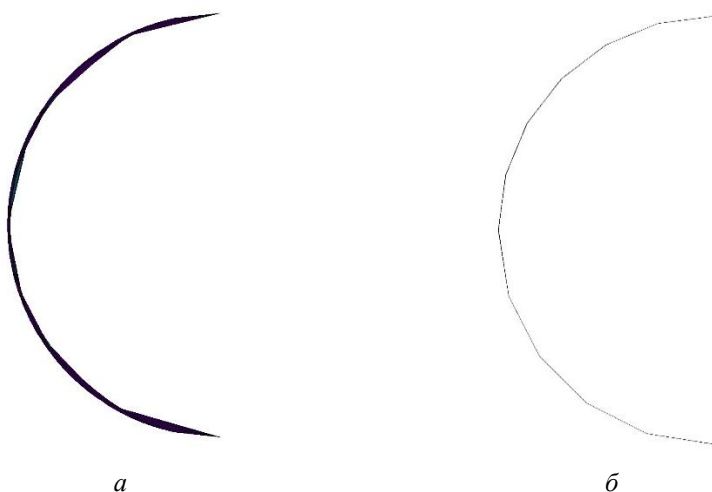


Рис. 5 – Контактні елементи в моделі з елементів типу «тетраедр» – а, та типу «цеглина» – б.

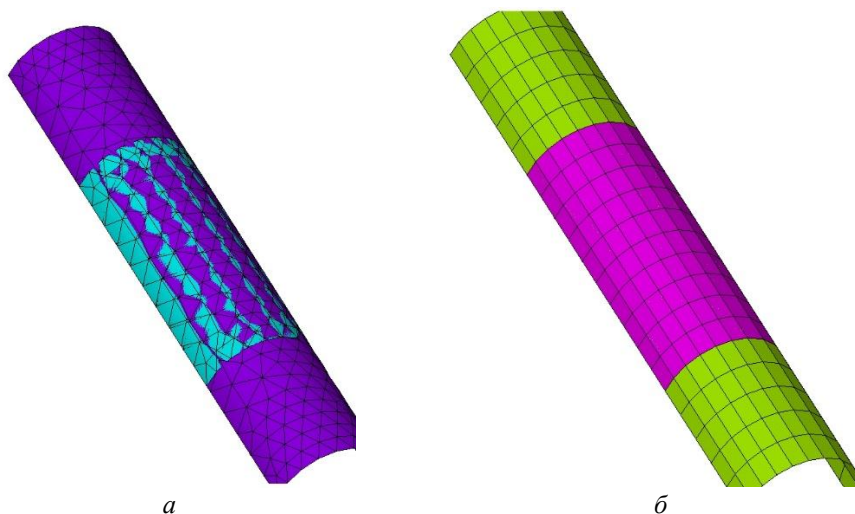


Рис. 6 – Контактні елементи в моделі з елементів типу «тетраедр» – а, та типу «цеглина» – б.

Як бачимо на рисунку 5а і 6а переріз створених контактних елементів при використанні в конструкції елементів типу «тетраедр» призводить до змішування вузлів контактуючих поверхонь, на відміну від контактних елементів на рисунках 5б і 6б, створених при використанні в конструкції елементів типу «цеглина» і по запропонованій автором схемі.

Аналіз побудованих контактних елементів, показаних на рисунках 5 і 6, показує, що використання запропонованої автором схеми побудови скінченно-елементних моделей з наявними контактними взаємодіями дозволяє створити контактуючі поверхні, які максимально відповідають реальній (натурній) контактній взаємодії.

На рисунках 7 – 9 показаний напружено-деформований стан досліджуваних конструкцій без зазору для варіантів елементів «тетраedr» і «цеглина».

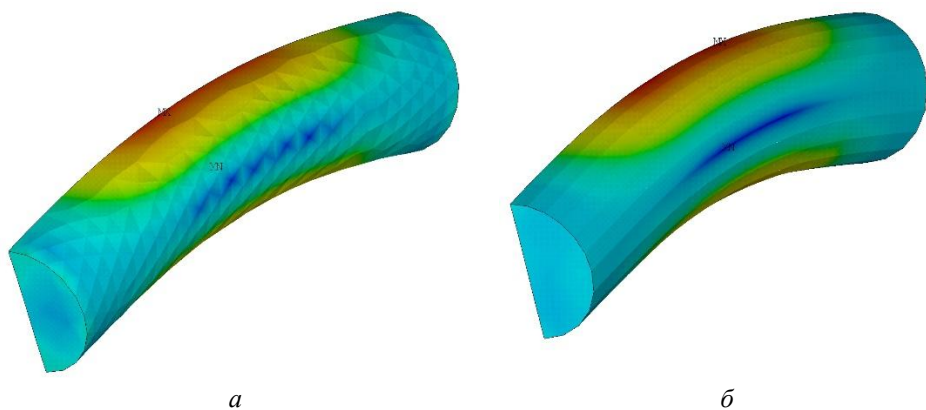


Рис. 7 – Напруження за Мізесом в моделі з елементів типу «тетраedr» – а, і типу «цеглина» – б.

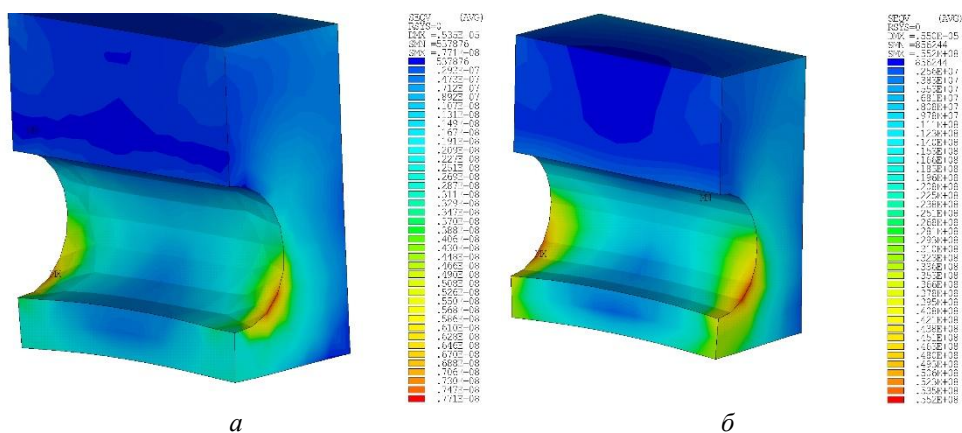


Рис. 8 – Напруження за Мізесом в моделі з елементів типу «тетраedr» – а, і типу «цеглина» – б.

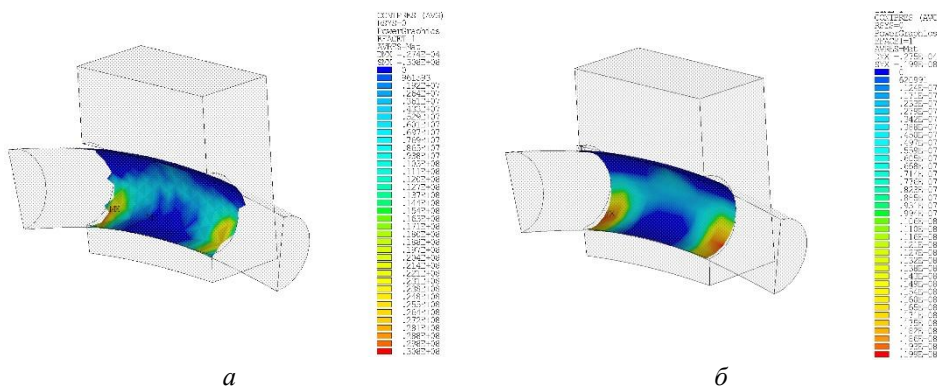


Рис. 9 – Контактний тиск в моделі з елементів типу «тетраedr» – а, та типу «цеглина» – б.

Аналіз НДС, наведеного на рисунках 7 – 9, показує суттєву різницю в рівнях еквівалентних напружень і контактного тиску при використанні скінченних елементів типу «тетраedr» та «цеглина», що призводить до різної контактної взаємодії.

Саме тому так важливо будувати скінченно-елементні моделі не тільки з елементів типу «цеглина», а і так, щоб модель була «регулярною».

Висновки

Запропонований автором підхід дозволяє повністю контролювати моделювання контактної взаємодії, а також значно зменшити кількість скінченних елементів і, відповідно, час проведення розрахунку.

Ба більше, роки застосування запропонованого підходу вказують на максимальну відповідність віртуального моделювання з реальним напружено-деформованим станом, та натурною поведінкою різноманітних конструкції при їх експлуатації.

Двобічні оцінки граничних навантажень за згину циліндричної оболонки з поздовжніми колінеарними тріщинами

М. В. Маковійчук¹, Т. М. Даляк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, лабораторія моделювання демпфуючих систем, Івано-Франківськ, Україна

¹ makoviy@ua.fm

Розглядається напружений стан та гранична рівновага ізотропної пологої циліндричної оболонки, ослабленої двома поздовжніми колінеарними наскрізними тріщинами, здатними до закриття за дії згинального навантаження. Закриття тріщини враховувалося на основі моделі контакту країв тріщини вздовж лінії в одній з лицьових поверхонь оболонки. Сформульовано крайову задачу для рівнянь теорії пологих оболонок із взаємопов'язаними граничними умовами на контурах дефектів. Розв'язок задачі побудовано з використанням методу сингулярних інтегральних рівнянь та числової схеми квадратур. Для оцінки граничного стану оболонки використано локальний та інтегральний енергетичні критерії лінійної механіки руйнування. Ці критерії встановлюють нижню та верхню межі критичного навантаження, що відповідають початку стабільного підростання тріщини та подальшому лавиноподібному руйнуванню оболонки. Побудовано залежності граничних навантажень від безрозмірних параметрів відстані між дефектами та кривизни оболонки.

Ключові слова: циліндрична оболонка, колінеарні тріщини, закриття тріщин, згин, граничне навантаження, критерії руйнування

Вступ

Розвиток методології оцінки граничного навантаження для задач розрахунку оболонкових конструкцій з тріщиноподібними дефектами на міцність є актуальним завданням сучасної механіки руйнування. Через нерівномірний розподіл напружень по товщині оболонки поблизу вершин тріщини процес поширення тріщини може складатися з кількох етапів (початок, стійке підростання, лавиноподібне поширення) і його слід описувати, використовуючи різні критерії руйнування [1]. На даний час достатньо вивченими є задачі з оцінки міцності за локальним та інтегральним критеріями руйнування в основному для пластин [1, 2]. Метою даної роботи є дослідження граничної рівноваги пологої циліндричної оболонки з двома поздовжніми колінеарними тріщинами, здатними до закриття унаслідок згину за локальним та інтегральним енергетичними критеріями механіки руйнування.

1. Постановка та інтегральне рівняння задачі

Розглянемо ізотропну циліндричну оболонку, радіуса R і завтовшки $2h$ з двома наскрізними колінеарними розрізами завдовжки $2l$, які розташовані вздовж твірної циліндра на відстані $2d$ між їхніми центрами. До країв тріщин прикладено самозрівноважене рівномірно розподілене згинне навантаження $m = \text{const}$; решта поверхонь оболонки вільні від напружень. Дослідимо вплив розташування тріщин та контакту їх берегів унаслідок згину на напружено-деформований стан і граничну рівновагу оболонки.

Закриття дефектів унаслідок деформації згину описуємо на основі моделі контакту країв тріщини вздовж лінії в одній з лицьових поверхонь оболонки [3]. З урахуванням симетрії об'єкта та навантаження відносно лінії тріщин такий підхід призводить до крайової задачі для рівнянь теорії пологих оболонок із взаємозв'язаними умовами розтягу-згину на контурах дефектів [4]:

$$\Delta \Delta \varphi - \frac{B}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \Delta \Delta w + \frac{1}{DR} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 / L; \quad (1)$$

$$[u_y] = h[\theta_y] \geq 0, \quad M_y = -m + hN_y \operatorname{sgn}[\theta_y], \quad N_y \leq 0, \quad x \in L; \quad (2)$$

$$N_x = N_{xy} = N_y = 0, \quad M_x = M_{xy} = M_y = 0, \quad Q_x^* = Q_y^* = 0, \quad (x, y) \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Тут φ – функція напружень, w – прогин оболонки; $B = 2Eh$, $D = 2Eh^3/(3(1-\nu^2))$, E і ν – модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона її матеріалу; $[u_y]$ – розкриття тріщин, $[\theta_y]$ – розрив кута повороту нормалі на берегах розрізів; N_x, N_{xy}, N_y – зусилля, M_x, M_{xy}, M_y – моменти, Q_x^*, Q_y^* – узагальнені поперечні сили; $L = (-l - 2d, l - 2d) \cup (-l, l)$ – сукупність розрізів у системі координат з віссю абсцис вздовж лінії розрізів та центром посередині правого з них.

Розв'язок задачі (1)–(3) будували методом сингулярних інтегральних рівнянь. Враховуючи, що дефекти перебувають в однакових умовах, зусилля та моменти на лінії правої тріщини виразимо через похідні від функцій стрибка [5, 6]:

$$N_y(x, 0) = \frac{B}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{11}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{13}(\xi, x) a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi, \quad (4)$$

$$M_y(x, 0) = \frac{Ba}{4\pi} \int_{-l}^l \left\{ \tilde{K}_{31}(\xi, x) [u_y]'(\xi) - \tilde{K}_{33}(\xi, x) a[\theta_y]'(\xi) \right\} d\xi.$$

Тут ядра інтегральних подань виражаються через функції Кельвіна $\ker(\dots)$, $\operatorname{kei}(\dots)$.

$$\tilde{K}_{ij}(\xi, x) = K_{ij}(\xi - x) + K_{ij}(\xi + x + 2d), \quad i, j = 1, 3;$$

$$K_{11}(z) = \gamma \operatorname{sgn} z \left(B_1 \operatorname{kei}' \frac{\gamma |z|}{2} - B_2 \ker' \frac{\gamma |z|}{2} \right) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}\gamma}{4} \left[(B_3 + B_4) \left(\ker'' \frac{\gamma |z|}{2} - \operatorname{kei} \frac{\gamma |z|}{2} \right) + (B_4 - B_3) \left(\operatorname{kei}'' \frac{\gamma |z|}{2} + \ker \frac{\gamma |z|}{2} \right) \right],$$

$$K_{13}(z) = K_{31}(z) = -\nu \gamma \operatorname{sgn} z \left(B_1 \ker' \frac{\gamma |z|}{2} - B_2 \operatorname{kei}' \frac{\gamma |z|}{2} \right) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}(1-\nu)\gamma}{4} \left((B_4 - B_3) \ker'' \frac{\gamma |z|}{2} - (B_3 + B_4) \operatorname{kei}'' \frac{\gamma |z|}{2} \right) -$$

$$- \frac{\sqrt{2}(1+\nu)\gamma}{4} \left((B_3 + B_4) \ker \frac{\gamma |z|}{2} + (B_4 - B_3) \operatorname{kei} \frac{\gamma |z|}{2} \right),$$

$$K_{33}(z) = (1 - \nu^2) \gamma \operatorname{sgn} z \left(B_1 \operatorname{kei}' \frac{\gamma |z|}{2} - B_2 \operatorname{ker}' \frac{\gamma |z|}{2} \right) + \\ + \frac{\sqrt{2}(1 - \nu)^2 \gamma}{4} \left((B_3 + B_4) \operatorname{ker}'' \frac{\gamma |z|}{2} + (B_4 - B_3) \operatorname{kei}'' \frac{\gamma |z|}{2} \right) + \\ + \frac{\sqrt{2}(1 + \nu)^2 \gamma}{4} \left((B_4 - B_3) \operatorname{ker} \frac{\gamma |z|}{2} - (B_3 + B_4) \operatorname{kei} \frac{\gamma |z|}{2} \right),$$

$$B_1 = \sin \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4}, \quad B_2 = \cos \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4}, \\ B_3 = \sin \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4} \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4}, \quad B_4 = \cos \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}\gamma z}{4};$$

$$z = \xi - x, \quad a = h / \sqrt{3(1 - \nu^2)}, \quad \gamma = 1 / \sqrt{Ra} = \left(3(1 - \nu^2) \right)^{1/4} / \sqrt{Rh}.$$

Підставимо вирази (4) в крайові умови (2) на правому розрізі. Виключаючи функцію $[u_y]$ і враховуючи, що $\operatorname{sgn}[\theta_y] = -\operatorname{sgn} m$, дістаємо сингулярне інтегральне рівняння для знаходження знакосталого за припущенням стрибка повороту нормалі з додатковою умовою на кінцях розрізу:

$$\frac{D}{4\pi} \int_{-l}^l K(\xi, x) [\theta_y]'(\xi) d\xi = m, \quad x \in (-l, l); \quad [\theta_y](\pm l) = 0. \quad (5)$$

$$K(\xi, x) = 3(1 - \nu^2) \tilde{K}_{11}(\xi, x) + 2 \operatorname{sgn} m \sqrt{3(1 - \nu^2)} \tilde{K}_{13}(\xi, x) + \tilde{K}_{33}(\xi, x).$$

За знайденим розв'язком $[\theta_y](x)$ та першою із формул (2) визначали розкриття тріщин $[u_y](x)$, а за граничними виразами [5, 6]:

$$K_N^\pm = \mp \frac{B}{4\sqrt{\pi l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [u_y]'(x), \\ K_M^\pm = \pm (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4\sqrt{\pi l}} \lim_{x \rightarrow \pm l} \sqrt{l^2 - x^2} [\theta_y]'(x). \quad (6)$$

обчислювали коефіцієнти інтенсивності зусиль K_N та моментів K_M у внутрішніх та зовнішніх вершинах тріщин.

2. Критерії руйнування

Для аналізу граничного стану оболонки використано локальний та інтегральний енергетичні критерії лінійної механіки руйнування. Вважаємо, що спочатку при певному нижчому критичному значенні навантаження відбувається стале підростання тріщин в найбільш напруженій зоні, яке оцінюємо за локальним енергетичним критерієм лінійної механіки руйнування [1, 2]

$$\max_z G(z) = 2\gamma_*, \Rightarrow \frac{1}{4h^2E} \left(K_N^2 + (3 + \kappa) K_N \frac{|K_M|}{h} + 3\kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right) = 2\gamma_*. \quad (7)$$

Потім, початковий, за припущенням, прямий фронт тріщини стає криволінійним і рівномірно напруженим. При досягненні верхнього значення руйнівного навантаження тріщина розповсюджується лавиноподібно по всій товщині оболонки. Для опису такого нестійкого поширення тріщини використовуємо інтегральний енергетичний критерій [6]:

$$\frac{1}{2h} \int_{-h}^h G(z) dz = 2\gamma_*, \Rightarrow \frac{1}{4h^2 E} \left[K_N^2 + \kappa \left(\frac{K_M}{h} \right)^2 \right] = 2\gamma_*. \quad (8)$$

У формулах (7), (8) $G(z)$ – потік енергії у вершину тріщини, γ_* – питома поверхнева енергія матеріалу, $\kappa = 3(1+\nu)/(3+\nu)$.

Підставивши знайдені значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль та моментів (6) у критерії (7), (8) отримали нижню та верхню оцінки граничних навантажень, при яких настане розповсюдження тріщин для внутрішніх та зовнішніх вершин відповідно.

3. Аналіз результатів

Числовий розв'язок крайової задачі (5) побудували при $\nu = 0,3$ методом механічних квадратур [5]. Для фіксованих значень параметра кривини оболонки $\lambda = \gamma l = \left(3(1-\nu^2) \right)^{1/4} l / \sqrt{Rh}$ змінювали безрозмірний параметр взаємного розташування дефектів: $\rho = l/d$.

Нижче на рисунку подано результати дослідження граничної рівноваги циліндричної оболонки з двома поздовжніми колінеарними тріщинами. Безрозмірні граничні навантаження $\tilde{m}_* = |m_*|/m^0$ ($m^0 = 2h^2 \sqrt{2E\gamma_*/(\pi l)}$), отримані за локальним критерієм (7) подано на рисунку зліва (а), а за інтегральним критерієм (8) – справа (б); суцільні лінії відповідають ближнім, а штрихові – дальнім вершинам. При $m > 0$ береги змикаються у внутрішній (лінії з темними маркерами), а при $m < 0$ – у зовнішній лицьовій поверхні оболонки (світлі маркери).

Як видно з рисунка, верхня оцінка граничного навантаження за інтегральним критерієм приблизно вдвічі перевищує величину нижньої оцінки за локальним критерієм. Для випадку закриття тріщин на внутрішній поверхні оболонки маємо найнижчий рівень руйнівних навантажень і спостерігається немонотонна залежність навантаження від параметра ρ для ближніх вершин дефектів. Також у цьому разі для великих λ виявлено діапазон ρ де більш небезпечними будуть дальні вершини тріщин (штрихові лінії лежать нижче від суцільних). Натомість, у випадку контакту берегів у зовнішній поверхні завжди небезпечними є ближні вершини розрізів.

Для $\lambda = 0$ маємо результати для пластини з двома колінеарними тріщинами (лінії на рисунку, де світлі і темні маркери чергуються, оскільки у цьому разі результати для різних знаків навантаження співпадають). Результати обчислені за інтегральним критерієм (рис. б) при $\rho = 0$ співпадають з отриманими раніше для однієї поздовжньої тріщини в циліндричній оболонці [7], а в окремому випадку ($\rho = 0, \lambda = 0$) – для тріщини в пластині [1, 2]. Аналогічні дослідження граничної рівноваги за локальним та інтегральним критеріями руйнування для сферичної оболонки було проведено у роботі [8].

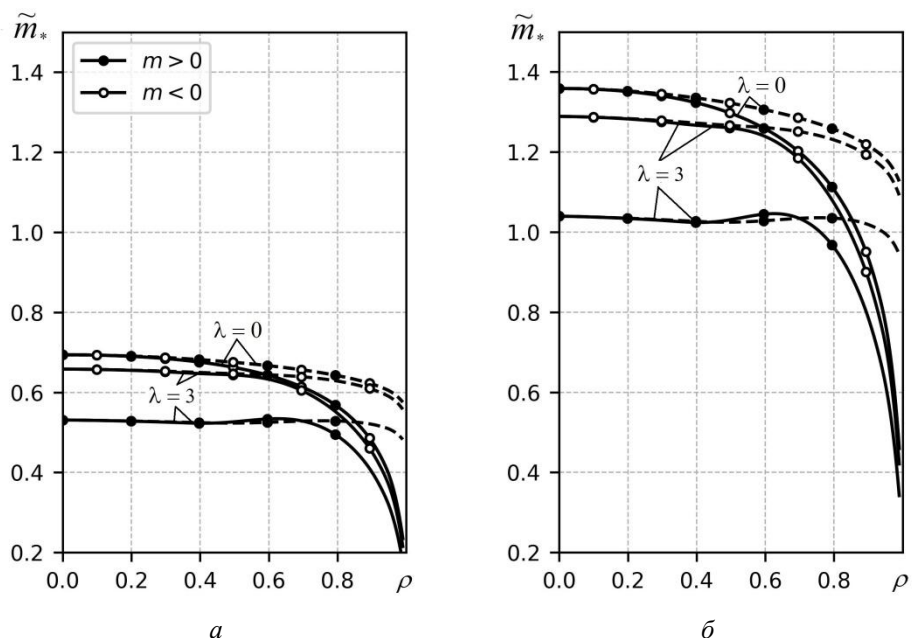


Рис. 1. Руйнівні навантаження для циліндричної оболонки з поздовжніми колінеарними тріщинами: а – за локальним критерієм (7); б – за інтегральним критерієм (8).

Висновки

Руйнівне навантаження згину для циліндричної оболонки з двома поздовжніми колінеарними тріщинами у більшості випадків є меншим порівняно з пластиною (окрім малих значень параметра кривини λ у разі $m < 0$).

За умови закриття тріщин у внутрішній поверхні ($m > 0$) руйнівний момент немонотонно залежить від параметра віддалі між дефектами, і небезпечними, при цьому, можуть бути зовнішні вершини дефектів.

Встановлено, що нижня оцінка граничного навантаження за локальним критерієм дає приблизно в два рази менші значення порівняно з верхньою оцінкою за інтегральним критерієм.

1. І. Шацький, Двобічні оцінки граничного навантаження згину для пластини з прямолінійною тріщиною, *Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій*: зб. наук. праць 5-ї Міжнар. конф. Під заг. ред. В. В. Панасюка. Фіз.-мех. ін.-т ім. Г.В.Карпенка НАН України, Львів, 425–430 (2014).
2. I. Shatskyi, T. Dalyak, M. Makoviichuk, and V. Perepichka, A tactic of two-side estimates of limiting bending loads for plates with contact cracks, *Procedia Structural Integrity*, 59, 246–252 (2024). <https://doi.org/10.1016/j.prostr.2024.04.035>
3. І. П. Шацький, Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками, *Доп. АН УРСР. Сер. А*, № 2, 26–29 (1991).
4. І. Шацький, М. Маковійчук, Закриття колінеарних тріщин при згині пологих циліндричних оболонок, *Машинознавство*, № 11–12, 27–30 (2011).

5. В. В. Панасюк, М. П. Саврук, А. П. Дацьшин. *Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках*, Наукова думка, Київ (1976).
6. В. А. Осадчук, *Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами*, Наукова думка, Київ (1985).
7. Шацький І. П. Закриття поздовжньої тріщини в пологій циліндричній панелі під час її згину. *Фізико-хімічна механіка матеріалів*. 2005. Т. 41. № 2. С. 45–48.
8. M. V. Makoviichuk, I. P. Shatskyi, Analysis of the limit equilibrium of a bent spherical shell with collinear cracks according to local and integral failure criteria, *Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Physics and Mathematics*, 2, 132–135 (2023). <https://doi.org/10.17721/1812-5409.2023/2.21>

Аналіз термдеформаційного профілю багат шарового наплавленого металу Inconel 718

О.В. Яровицин^а, М.О. Черв'яков^{а1}, І.Р. Волосатов^а, Г.Д. Хрущов^а, В.А. Пестов^а,
О.В. Завгородній^б

^аІнститут електрозварювання ім. С.О. Патона НАН України, м. Київ, Україна

^бТОВ «МУЛЬТІФЛЕКС», м. Запоріжжя, Україна

¹cherviakov@paton.kiev.ua

Проаналізовано три види багат шарового наплавленого металу нікелевого сплаву Inconel 718, отриманого аргонодуговим наплавлянням неплавким електродом із подаванням присадного дроту та мікроплазмовим порошковим наплавлянням. Шляхом випробувань на поздовжній статичний розтяг мініатюрних плоских пропорційних зразків із наплавленого металу, отриманого зі зварних заготовок багат шарової наплавки типу «вертикальна стінка» без подальшої термічної обробки (структурний стан “as-built” за ISO/ASTM 52900), встановлено температурні інтервали зниженої пластичності та оцінено ймовірність утворення в них гарячих тріщин за механізмом “solid-state cracking”. Зазначені інтервали зниженої пластичності пов'язуються в наплавленому металі Inconel 718 як зі збільшенням домішки азоту (оکیل 1100 °C) так і з переважним вмістом карбідних фаз в міждендритних проміжках порівняно з фазами Лавеса (750°C-800 °C). Показано, що для високоякісних присадних матеріалів з низьким вмістом домішок кисню та азоту при мікроплазмовому порошковому наплавленні найбільшу потенційну небезпеку утворення гарячих тріщин становить температурний інтервал 750–800 °C, у якому фіксуються найнижчі значення критичної деформації руйнування $\varepsilon_{кр} \approx 3,5-6,5 \%$.

Ключові слова: сплав Inconel 718, наплавлений метал, повздовжній статичний розтяг, температура, механічні властивості, схильність до утворення гарячих тріщин

Вступ

Відомо, що нікелевий сплав Inconel 718 (табл. 1) широко використовується у світі як жаростійкий та дисковий жароміцний сплав для робочих температур до 650-700°C, Основними проблемами зварюваності сплаву Inconel 718 є гарячі тріщини кристалізаційного та ліквацийного типу [1-3]. Гарячі тріщини ліквацийного типу переважно обумовлені формуванням у міждендритних проміжках й на границях зерен збагачених Nb зон та формуванням в них високих концентрацій фаз Лавеса, які в першу чергу оплавляється при повторному нагріві [1-3]. Не зважаючи на обмежену зварюваність, сплав Inconel 718 вважається придатним до застосування у сучасних адитивних технологіях [4-5], зокрема за ISO/ASTM 52900 класифікованих як “direct energy deposition”. Дугові технології адитивного виробництва із застосуванням у якості присадного матеріалу дроту (WAAM), на які також поширюється класифікація “direct energy deposition”, вважаються більш продуктивними та менш дороговартісними порівняно з відповідними технологіями на базі променевих процесів [6]. В нашій країні альтернативою технологіям WAAM є розвиток мікроплазмового порошкового наплавляння, що застосовується для виготовлення 3D-об'єктів з товщиною вирощеної стінки 10-20 мм [7]. З огляду на високу ймовірність виникнення значних напружень і деформацій в процесі послідовного перебігу

зварювальних термодетформаційних циклів при такому багатошаровому наплавленні актуальний інтерес представляє аналіз механічних властивостей наплавленого металу Inconel 718 у структурному стані “as built” за ISO/ASTM 52900 (без наступної термічної обробки) від температури з позицій оцінки ймовірності утворення в ньому гарячих тріщин за механізмом “solid state cracking” [1,3].

Таблиця 1.

Хімічний склад нікелевого сплаву Inconel 718 за специфікацією UNS07718, мас. %

Ni + Co	Cr	Fe	Nb + Ta	Mo	Ti	Al	Co	C	Mn, Si	S, P	B	Cu
50- 55	17- 21	bal,	4,75- 5,50	2,80- 3,30	0,65- 1,15	0,2- 0,8	1,00 max	0,08 max	0,35 max	0,015 max	0,006 max	0,3 max

1. Методологія досліджень

Аргонодуговим наплавленням (АДН), що можна віднести до технологій WAAM [6], та мікроплазмовим порошковим наплавленням (МПН) із використанням присадних порошків двох різних виробників з багатошарового наплавленого металу Inconel 718 підготовлено зварні заготовки типу «вертикальна стінка». Наплавлення виконувалося на торець прямокутної пластини з аустенітної нержавіючої сталі товщиною ~3 мм; довжина кожного наплавленого валика складала ~75 мм. Для АДН використовувалося зварювальне джерело живлення KEMPPI MASTERTIG MLS 3000 разом з приводом переміщення і подачі зварювального дроту АД-228; для МПН – установка МСТ-50, у склад якої входив порошковий дозатор. АДН виконувалося на зварювальному струмі 80-115 А при швидкості наплавлення ~7,5 м/год., швидкість подачі присадного дроту складала $V_{др} \sim 120$ м/год., МПН виконувалося на зварювальному струмі 25-35 А при швидкості наплавлення ~1,2 м/год. та продуктивності наплавлення $G_n \sim 3-4$ г/хв. Особливості морфології часток присадного порошку представлено на рис. 1. З отриманих заготовок після наступного шліфування до товщини ~3,5 мм та капілярного контролю їх бокових поверхонь в повздовжньому напрямку електроерозійною різкою за попередньо відпрацьованою методикою [8] виготовлялися мініатюрні плоскі пропорційні зразки з перерізом робочої частини 2,5×3,5 мм. Після їх доопрацювання чистовим шліфуванням та капілярного контролю вони випробовувалися на статичний розтяг на сервогідравлічній машині MTS 810.50 при $T = 20-1100$ °C. Структурний стан випробуваних зразків – “as built” за ISO/ASTM 52900, тобто без термічної обробки. Для інтерпретації отриманих результатів:

- на мініатюрних плоских пропорційних зразках при $T = 20-1100$ °C оцінювалися механічні властивості основного металу сплаву Inconel 718 в повздовжньому напрямку (пруток Ø51 мм після гарячої прокатки, стан поставки, після термічної обробки: 979°C - 1,5 год.+ охолодження водою; 721°C - 8 год. + охолодження на повітрі зі швидкістю 50 °C/год. до 624 °C та подальша витримка 8 год.);
- у присадних матеріалах (дріт, порошки) за методикою відновного плавлення в потоці газу-носія оцінювався вміст домішок кисню та азоту (табл. 2);
- проводилися дослідження мікроструктури наплавленого металу із застосуванням растрової електронної мікроскопії (РЕМ) та EDX-аналізу; для розпізнавання фазової структури досліджуваних мікрошліфів застосовувалося хімічне травлення в розчині кислот (CH_3COOH – 15 мл., HF – 20 мл., H_2SO_4 – 16 мл.; HNO_3 – 5 мл.).

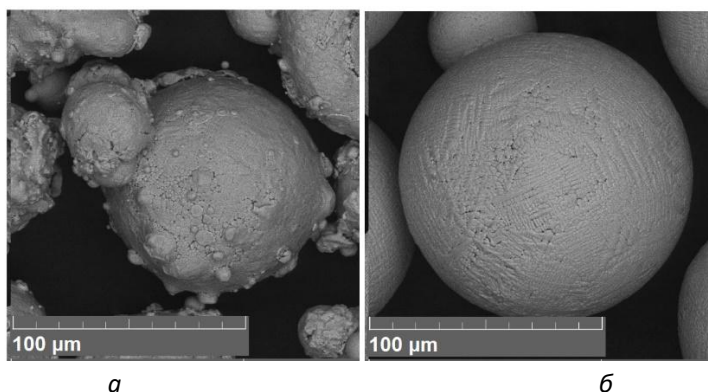


Рис. 1. Морфологія часток присадного порошку сплаву Inconel 718 при PEM у фазовому контрасті BSE: *a* – CARPENTER ADDITIVE, виготовлений за Argon Gas Atomization Process; *б* – ТОВ «Мультіфлекс», виготовлений за Plasma Rotating Electrode Process.

Таблиця 2.

Технологічні характеристики присадних матеріалів зі сплаву Inconel 718

№	Процес наплавлення	Присадний матеріал	Виробник та рік поставки	[O], мас. %	[N], мас. %
1	АДН	дріт Ø1,6 мм	SPECIAL METALS Welding Products Company, 2010	0,0120	0,0070
2	МПН	порошок, фракція 63-106 мкм	CARPENTER ADDITIVE, 2024	0,0124	0,0094
3	МПН	порошок, фракція 53-150 мкм	ТОВ «Мультіфлекс», 2024	0,0080	0,0022

2. Основні результати

Встановлено (рис. 2-а,б), що у структурному стані “as built” (без термічної обробки) при $T \leq 900$ °C наплавлений метал сплаву Inconel 718 за короткочасними механічними властивостями значним чином поступається відповідному основному металу після гомогенізації та подвійного низькотемпературного старіння. Найбільша різниця в їх показниках спостерігається в діапазоні 20-600 °C. Для наплавленого металу сплаву Inconel 718 величина границі міцності σ_B знаходиться на рівні 0,59-0,75, а границя плинності $\sigma_{0,2}$ – на рівні 0,53-0,69 відносно відповідного основного металу. Дані рис. 2-а,б також свідчать, що діапазон $T \leq 700-800$ °C є потенційно сприятливим для ефективного підвищення короткочасних механічних властивостей наплавленого металу сплаву Inconel 718 наступною термічною обробкою. Наплавлений метал сплаву Inconel 718 у структурному стані “as built”, отриманий МПН (рис. 2-в), має 2 температурних інтервали зниженої пластичності: в околі 1100°C з величиною критичної деформації руйнування $\epsilon_{кр} \sim 15\%$; при 750-800°C з $\epsilon_{кр} \sim 3,5-6,5\%$. Застосовані для АДН та МПН присадні матеріали зі сплаву Inconel 718 за вмістом кисню та азоту відповідають сучасному рівню вимог якості: [O, N] < 0,015 мас. % (табл. 2).

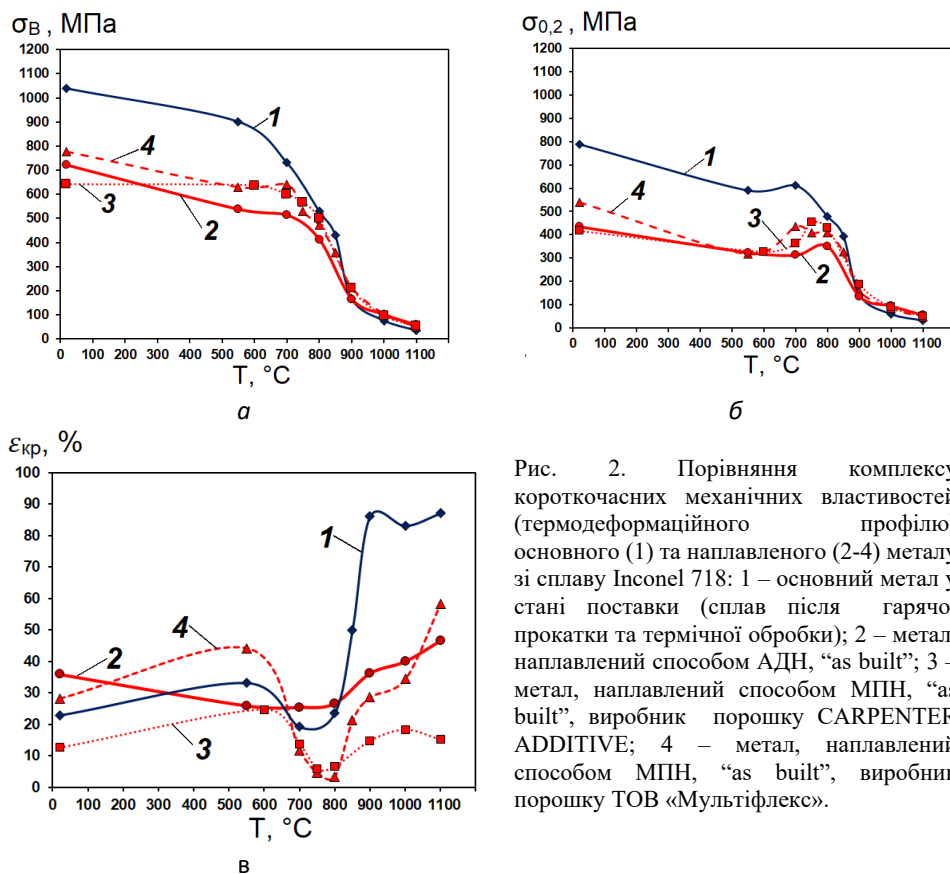


Рис. 2. Порівняння комплексу короткочасних механічних властивостей (термодеформаційного профілю) основного (1) та наплавленого (2-4) металу зі сплаву Inconel 718: 1 – основний метал у стані поставки (сплав після гарячої прокатки та термічної обробки); 2 – метал, наплавлений способом АДН, “as built”; 3 – метал, наплавлений способом МПН, “as built”, виробник порошку CARPENTER ADDITIVE; 4 – метал, наплавлений способом МПН, “as built”, виробник порошку ТОВ «Мультифлекс».

Уточнено, що зменшення вмісту N до рівня 0,002-0,007 мас. % у присадному матеріалі сплаву Inconel 718, що застосовується при АДН або МПН, в околі 1100°C у 3-4 рази підвищує пластичність відповідного наплавленого металу. В підтримку зазначимо про відому модифікацію цього сплаву Inconel 718SPF для забезпечення суперпластичності при високих температурах [9], яка відрізняється обмеженим вмістом азоту $[N] < 0,010$ мас. %. Другий інтервал зниженої пластичності при 750-800 °C, що спостерігається тільки при МПН, з огляду на найменші значення $\epsilon_{кр} \sim 3,5-6,5$ % представляє значно більшу небезпеку з точки зору ймовірності утворення гарячих тріщин за механізмом “solid state cracking”. Дослідження мікроструктури сплаву Inconel 718 растровою РЕМ показали (рис. 3), що вона суттєво відрізняється як між видами наплавленого металу так і порівняно з основним металом.

Основний метал сплаву Inconel 718 має полікристалічну структуру з номером зерна в межах 7-11 (0,030-0,008 мм) за ASTM E112 (див. рис. 3-а,б). Дендритна структура в середині його зерна не спостерігається, що є ознакою додаткової обробки тиском в процесі його виготовлення. Границі зерен основного металу декоровані голчастою δ -фазою з дуже рідкою присутністю карбідних фаз.

Наплавлений метал сплаву Inconel 718 має дендритну структуру (рис. 3-в,г та 3-д,е), характерну для литого матеріалу, з відстанню між осями дендритів в діапазоні 10-50 мкм. За літературними даними [10] в міждендритних проміжках зварних швів

присутні збагачені Nb області та виділення вторинних фаз (Лавеса, евтектики γ /Laves та карбідів).

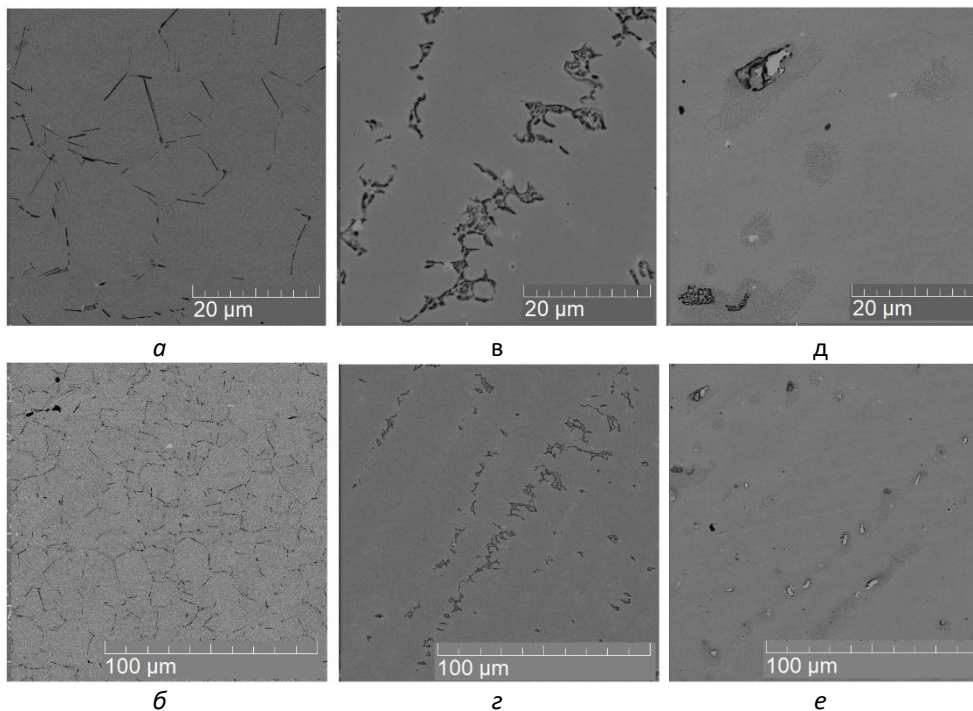


Рис. 3. Особливості мікроструктури основного (а, б) та наплавленого металу у структурному стані “as built” (в-е) сплаву Inconel 718, РЕМ при фазовому контрасті BSE: в, г – метал, наплавлений способом АДН; д, е – метал, наплавлений способом МПН, виробник порошку ТОВ «Мультифлекс».

Встановлено, що в залежності від вибору процесу наплавлення (див. рис. 3-в,г та 3-д,е), зокрема – від виду присадного матеріалу (дріт/порошок), мікроструктура міждендритних проміжків наплавленого металу сплаву Inconel 718 може суттєво відрізнятись. Для АДН в міждендритних проміжках наплавленого металу характерне переважне виділення фаз Лавеса та евтектики γ /Laves (див. рис. 3-в,г). Для МПН – навпаки карбідних фаз (див. рис. 3-д,е).

EDX-аналізом з площі 1 мм² уточнено хімічний склад розглянутих вище 2-х варіантів наплавленого металу сплаву Inconel 718 (табл. 3). Для інтерпретації цих експериментальних даних EDX-аналізом додатково оцінено хімічний склад на поверхні типової дисперсної частки присадного порошку зі сплаву Inconel 718 (табл. 3) та підтверджено, що значних відмінностей у хімічному складі наплавленого металу, отриманого АДН та МПН, не спостерігається. Деяко зменшений вміст Al в наплавленому металі сплаву Inconel 718 на основі даних аналізу поверхні присадного порошку можна пов'язати з його вигоранням в процесі наплавлення.

На завершення EDX-аналізом виконано визначення хімічного складу локальних ділянок та присутніх фаз в міждендритних проміжках наплавленого металу сплаву Inconel 718 (рис. 4, табл. 4), отриманого АДН та МПН. Його результати підтвердили

попередню візуальну ідентифікацію типових складових дендритної структури наплавленого металу сплаву Inconel 718 та показали наступне. Для наплавленого металу Inconel 718, отриманого АДН, де інтервал зниження пластичності при 600-850 °С не спостерігається (див. рис. 2-в), в міждендритних проміжках переважно присутні фази Лавеса або евтектики γ /Laves (Sp-m 3-4 табл. 4.1 усереднено: 49,5 % Ni – 16,5 % Nb – 15,2 % Cr – 12,9 % Fe – 2,6 % Mo – 2,1 % Ti) порівняно з карбідними фазами на основі Nb (Sp-m 1-2 табл. 4.1 усереднено: 63,8 % Nb – 16,0 % Ni – 6,6 % Ti – 6,5 % Cr – 5,0 % Fe – 1,7 % Mo). Навпаки, в міждендритних проміжках наплавленого металу, отриманого МПН, де інтервал зниження пластичності при 600-850 °С спостерігається (див. рис. 2-в), підтверджена збільшена присутність карбідних фаз на основі Nb (Sp-m 1-2 табл. 4.2 усереднено: 72,9 % Nb – 7,8 % Ti – 6,2 % Ni – 2,1 % Fe – 1,9 % Cr – 1,1 % Al – 1,0 % Co). Також для наплавленого металу Inconel 718, отриманого способом МПН, встановлено орієнтовно в 1,7-2 рази зменшений вміст С на осях дендритів та в зонах міждендритних проміжків (Sp-m 3-6 табл. 4.2) порівняно з наплавленим металом, отриманим АДН.

Таблиця 3.

Середній хімічний склад основного (ОМ), наплавленого (АДН, МПН) та присадного порошку сплаву Inconel 718 за даними EDX-аналізу, мас. %

Зразок	C*	Al	Si	Ti	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Nb	Mo	Ta	W	Total
ОМ	9,19	1,21	0,26	0,96	22,32	0,00	19,75	0,22	50,15	2,83	2,31	0,00	0,00	100,0
АДН	10,33	0,55	0,00	0,95	19,12	0,16	17,49	0,26	51,35	6,17	3,96	0,00	0,00	100,0
МПН	9,69	0,45	0,00	0,98	18,16	0,00	17,69	0,44	51,48	6,79	3,76	0,00	0,26	100,0
порошок	10,04	0,65	0,10	0,87	18,83	0,08	18,55	0,19	52,24	5,21	3,26	0,00	0,00	100,0

Примітка: хімічний склад С визначено якісно, ці показники не входять в загальний баланс хімічних елементів; МПН та порошок – виробник присадного порошку ТОВ «Мультифлекс»

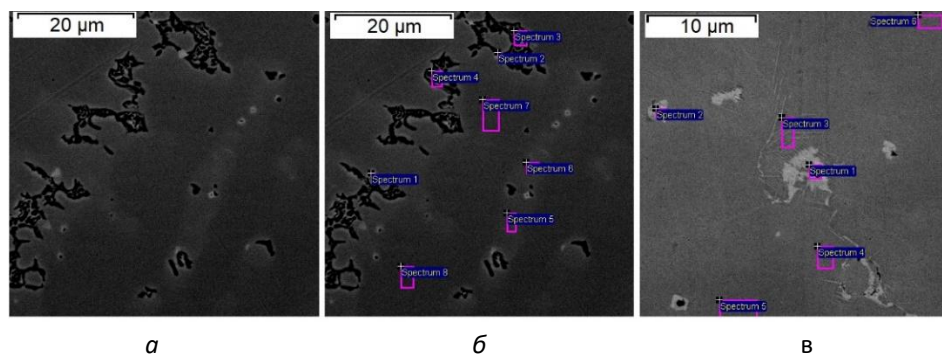


Рис. 4. Застосування EDX-аналізу для визначення хімічного складу типових складових дендритної структури наплавленого металу сплаву Inconel 718: а, б – АДН; в – МПН.

Додатково слід відмітити, що незважаючи на дещо підвищений вміст Nb у наплавленому металі сплаву Inconel 718, отриманому способом МПН, для обох варіантів дослідженого наплавленого металу в їх міждендритних проміжках зберігається збільшена у ~2,1 рази концентрація Nb порівняно з осями дендритів.

Таблиця 4.

Середній хімічний локальних ділянок та фаз дендритної структури наплавленого металу сплаву Inconel 718, отриманого АДН та МПН за даними EDX-аналізу, мас. %

Sp-m	C*	Al	Si	Ti	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Nb	Mo	Ta	W	Total
Таблиця 4.1. Метал, наплавлений АДН (див. рис. 4-а,б)														
Sp-m 1	24,79	0,13	0,11	9,13	5,18	0,00	3,82	0,00	11,35	68,94	1,33	0,00	0,00	100,0
Sp-m 2	23,34	0,26	0,14	4,14	7,76	0,11	6,21	0,00	20,69	58,58	2,11	0,00	0,00	100,0
Sp-m 3	10,91	0,68	0,13	2,17	14,36	0,35	12,35	0,24	46,84	20,01	2,88	0,00	0,00	100,0
Sp-m 4	10,59	0,62	0,09	1,97	16,08	0,26	13,35	0,00	52,21	13,05	2,39	0,00	0,00	100,0
Sp-m 5	9,54	0,60	0,20	1,10	18,05	0,33	15,83	0,30	50,67	8,71	4,22	0,00	0,00	100,0
Sp-m 6	9,47	0,59	0,24	1,36	17,36	0,26	15,42	0,00	51,70	9,37	3,70	0,00	0,00	100,0
Sp-m 7	8,71	0,63	0,09	0,89	19,54	0,13	18,01	0,22	52,08	4,88	3,54	0,00	0,00	100,0
Sp-m 8	9,35	0,65	0,08	0,68	20,10	0,15	18,86	0,27	52,08	3,86	3,26	0,00	0,00	100,0
Таблиця 4.2. Метал, наплавлений МПН (див. рис. 4-в)														
Sp-m 1	16,96	2,15	0,23	6,49	2,41	0,00	3,11	1,03	10,32	72,86	1,41	0,00	0,00	100,0
Sp-m 2	22,68	0,00	0,00	9,09	1,38	0,00	0,99	0,00	2,01	86,54	0,00	0,00	0,00	100,0
Sp-m 3	5,13	0,39	0,00	1,17	14,58	0,00	15,13	0,00	55,64	10,08	3,00	0,00	0,00	100,0
Sp-m 4	5,65	0,34	0,00	0,92	14,68	0,00	14,85	0,00	54,94	10,32	3,61	0,00	0,34	100,0
Sp-m 5	4,75	0,35	0,00	0,84	16,15	0,00	16,71	0,00	58,10	4,82	3,03	0,00	0,00	100,0
Sp-m 6	5,30	0,38	0,00	0,85	16,58	0,53	16,96	0,00	56,94	4,78	3,00	0,00	0,00	100,0

Примітка: * – хімічний склад C визначено якісно, ці показники не входять в загальний баланс хімічних елементів; МПН – виробник присадного порошку ТОВ «Мультифлекс»

На нашу думку вперше встановлені та описані вище відмінності мікроструктури наплавленого металу сплаву Inconel 718, отриманого МПН, обумовлені відомим ефектом зменшення ступеню перегріву зварювальної ванни при введенні в неї дисперсної присадки при плазмовому процесі [11].

Висновки

Термодеформаційний профіль багат шарового наплавленого металу нікелевого жароміцного сплаву Inconel 718, що представляє собою залежності границь міцності, плинності та критичної деформації руйнування у структурному стані “as built” за ISO/ASTM 52900, в діапазоні 20-1100 °C характеризує опірність до утворення гарячих тріщин за механізмом “solid state cracking” й може також засвідчити недостатню якість присадних матеріалів, пов’язаних з вмістом домішок кисню та азоту.

Для забезпечення високої (більше 20 %) пластичності наплавленого металу сплаву Inconel 718 при температурах вище 850-900°C, що сприяє підвищенню опірності до утворення гарячих тріщин, при виробництві присадного порошку для адитивного мікроплазмового порошкового наплавлення доцільно мінімізувати вміст домішок кисню та азоту до рівня ~0,008 мас. % та 0,002 мас. % відповідно.

Вперше встановлено, що ефективним способом кількісного зменшення присутності фаз Лавеса, що за літературними даними обумовлюють високу схильність металу зварного шву та зони термічного впливу сплаву Inconel 718 до утворення кристалізаційних та ліквіаційних гарячих тріщин, є застосування мікроплазмового процесу з введенням у зварювальну ванну присадного порошку.

При такому мікроплазмовому порошковому напавленні в міждендритних проміжках наплавленого металу сплаву Inconel 718 спостерігається переважне формування карбідних фаз на основі NbC та наявність при 750°C-800 °C інтервалу зниженої пластичності з критичною деформацією руйнування ~3,5-6,5 %, що є

потенційно небезпечним з точки зору утворення в умовах підвищеної жорсткості адитивних виробів гарячих тріщин за механізмом “solid state cracking”.

- 1 J. N. DuPont, J. C. Lippold, S. D. Kiser. Welding metallurgy and weldability of nickel-base alloys, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey (2009).
- 2 Jose Tom Tharappel, Jalumedi Babu, Welding processes for Inconel 718 - A brief review, IOP Conf. Ser.: Materials Science and Engineering, **330**: 012082 (2018).
<https://doi.org/10.1088/1757-899X/330/1/012082>
- 3 Tushar Sonar, Visvalingam Balasubramanian, Sudersanan Malarvizhi, Thiruvengatam Venkateswaran, Dhenuvakonda Sivakumar, An overview on welding of Inconel 718 alloy - Effect of welding processes on microstructural evolution and mechanical properties of joints, Materials Characterization, **174**:110997 (2021).
<https://doi.org/10.1016/j.matchar.2021.110997>
- 4 J. N. Ghoussoub, Y. T. Tang, W. J. B. Dick-Cleland, André A. N. Németh, Yilun Gong, D. Graham McCartney, Alan C. F. Cocks, Roger C. Reed, On the influence of alloy composition on the additive manufacturability of Ni-based superalloys, Metallurgical and Materials Transactions A, **53A**, 962–983 (2022).
<https://doi.org/10.1007/s11661-021-06568-z>
- 5 Thiago Roberto Felisardo Cavalcante, Fabio Edson Mariani, Julian Arnaldo Avila Diaz, Additive manufacturing of Inconel 718: A review on microstructures and mechanical properties of DED-LB-processed samples, Journal of Materials Research, **41**, 2–24 (2026). <https://doi.org/10.1557/s43578-025-01663-y>
- 6 Muhammed Rashid, Steeve Sabu, Alwin Kunjachan, Muthumanickam Agilan, Tomson Anjilivelil, Joby Joseph, Advances in wire-arc additive manufacturing of nickel-based superalloys: Heat sources, DfAM principles, material evaluation, process parameters, defect management, corrosion evaluation and post-processing techniques, International Journal of Lightweight Materials and Manufacture, **7**, Iss. 6, 882-913 (2024).
<https://doi.org/10.1016/j.ijlmm.2024.05.009>
- 7 K. Balushok, S. Chygileichyk, I. Petryk, S. Sakhno, R. Kulykovskiy, Developing technology of directed energy deposition of workpieces of parts of aircraft engines from heat-resistant nickel alloys by means of using layer-by-layer microplasma surfacing method, Mechanics and Advanced Technologies, **8**, No. 2, 121–129 (2024).
[https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.2\(101\).296932](https://doi.org/10.20535/2521-1943.2024.8.2(101).296932)
- 8 K. A. Yushchenko, A. V. Yarovitsyn, N. O. Chervyakov, A.V. Zvyagintseva, I. R. Volosatov, G. D. Khrushchov, Evaluation of short-term mechanical properties of a joint of difficult-to-weld nickel high-temperature alloys of ZhS6 type, Paton Welding Journal (2019), No 7, 29-35. <https://doi.org/10.15407/tpwj2019.07.07>
- 9 P. Roamer, C. J. Van Tyne, D. K. Matlock, A. M. Meier, H. Ruble and F. Suarez, Room temperature formability of alloys 625LCF™, 718 and 718SPF™, Superalloys, 1997, 315-329.
- 10 S. G. K. Manikandan, D. Sivakumar, M. Kamaraj, Welding the Inconel 718 Superalloy. Reduction of Micro-segregation and Laves Phases, Elsevier Inc., Amsterdam-Oxford-Cambridge (2019).
- 11 П. В. Гладкий, Е. Ф. Переpletчиков, И. А. Рябцев, Плазменная наплавка, Екотехнологія, Київ (2007).

Modeling of an aircraft wing for studying aeroelastic vibrations

S. V. Filipkovskij¹, E. Polyakov

National Aerospace University "Kharkiv Aviation Institute", Kharkiv, Ukraine

¹ s.filipkovskij@khai.edu

A finite element model with 15 degrees of freedom has been developed for analyzing aircraft wing flutter, taking into account the distribution of elastic, inertial, and aerodynamic forces along the wingspan. The model uses beam elements with cubic Hermite polynomials to approximate bending and linear shape functions to approximate torsion. To take into account the displacement of the centers of mass relative to the elastic axis, the plane motion of inertial elements relative to the elastic axis is considered. Elements of the mass matrix are obtained that relate the degrees of freedom of the beam's bending and torsion. Free vibration calculations using this model yielded a discrepancy with experimental data acceptable for engineering calculations. However, this model uses finite elements of constant cross-section, which is a disadvantage compared to ANSYS finite elements, which can have variable cross-sections. Finite elements of constant cross section with cubic shape functions have been improved. Linear variations in the wing parameters per unit length along the element are programmed. Calculation of the oscillation frequencies of this wing model yielded results that are quite close to experimental data.

Keywords: wing, elastic-mass model, finite element method, vibration mode, natural frequency.

Introduction

Current economic constraints and environmental regulations require the development of more efficient aircraft configurations. The observed trend in aircraft design to reduce aerodynamic drag, as well as fuel consumption and emissions, is to increase wing aspect ratio. However, a thin wing is more flexible and subject to higher deflections under the same operating conditions. This effect can lead to changes in dynamic behavior and aeroelastic response, potentially leading to instability. Therefore, it is important to consider geometric nonlinearities when designing high-aspect-ratio wings, as well as to have accurate computational programs that link aerodynamic and structural models in the presence of nonlinearities.

The requirement to show that the critical flutter speed of the aircraft is above the flight speed range is written in AC 25.629. Main surfaces, such as wings and stabilizers, should be designed to meet the aeroelastic stability criteria for nominal conditions and should be investigated for meeting fail-safe criteria [1].

To study flutter, an elastic-mass model is constructed with two degrees of freedom (DOF), representing the lower modes of the wing's bending and torsional vibrations. A third DOF can be added – the angle of rotation of the aileron or elevator. The eigenmode or function satisfying the boundary conditions is used as the oscillation form [2, 3]. The flutter speed is determined by the stability of oscillations of the wing section, which is located at a distance of $\frac{3}{4}$ of the half-span from the root chord.

The aim of the research is to develop a model with more than three degrees of freedom that will take into account the interaction of aerodynamic forces with the wing structure throughout its span.

Modern studies also use two- or three-DOF models. In [4] the instability mechanism of a flexible plate in three-dimensional uniform flow is investigated in terms of the energy transfer between the plate motion and fluid flow. In [5] closed form analytical criteria for flutter onset are developed including a new necessary dynamic divergence criterion, the results based on a bilinear lift coefficient model.

The objectives of the work are: to develop a finite element model with the smallest possible error in approximating wing oscillations; to create an algorithm and program for calculating free wing oscillations; and to test the program by comparing the calculated frequencies and oscillation modes with experimental data.

For this work, an example of a transport aircraft wing with a half-span of 16.0 m, a root chord length of 4.85 m, a tip chord length of 1.45 m, and a distance from the nose to the elastic axis of 0.37 chords was taken (Fig. 1).

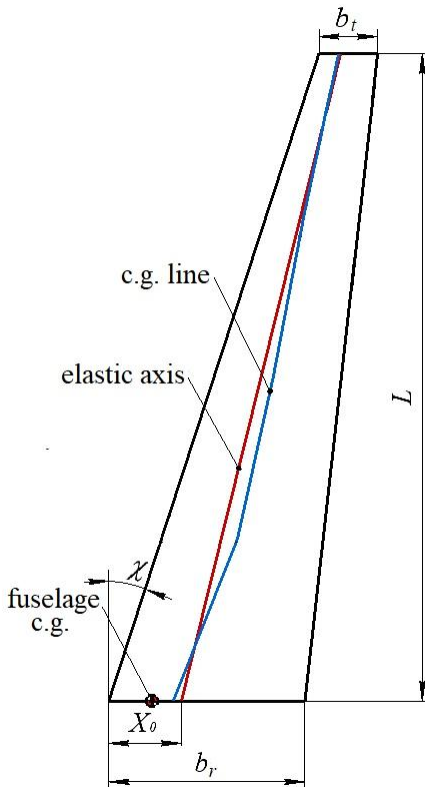


Fig. 1 Wing sketch

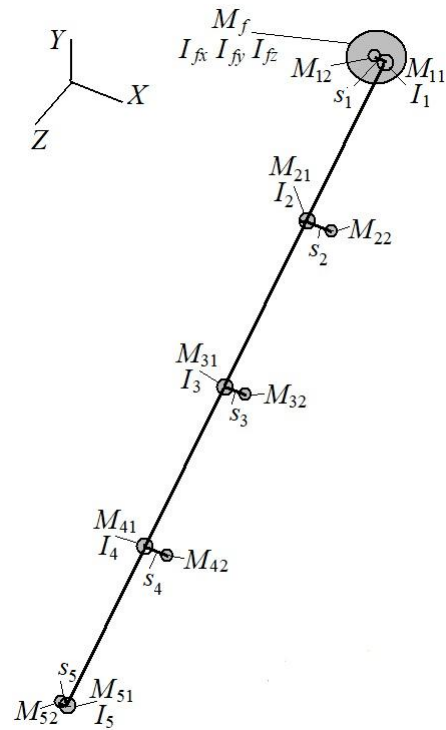


Fig. 2. ANSYS wing beam model

Table 1 shows the stiffness and inertial parameters in five sections of the wing, where Z is the distance from the root, m is the mass per unit length, s is the position of the center of mass relative to the elastic axis ($s > 0$ is the center of mass behind the elastic axis), J is the section moment of inertia per unit length, GJ_p is the torsional rigidity, EI is the bending rigidity in the vertical plane. The directions of the axes are shown in Fig. 2.

Table 1

Inertial parameters of wing sections

Z/L	$m, \text{kg/m}$	s, m	$J, \text{kg}\cdot\text{m}$	$EI, \text{N}\cdot\text{m}^2$	$GJ_p, \text{N}\cdot\text{m}^2$
0.00	200	-0.20	200	$15.0\cdot 10^7$	$8.0\cdot 10^7$
0.25	190	0.40	250	$10.0\cdot 10^7$	$5.0\cdot 10^7$
0.50	120	0.30	100	$3.0\cdot 10^7$	$1.3\cdot 10^7$
0.75	70	0.08	20	$0.65\cdot 10^7$	$0.25\cdot 10^7$
1.00	21	-0.05	3	$0.15\cdot 10^7$	$0.1\cdot 10^7$

1. Wing model in ANSYS package

The ANSYS package is widely used in engineering calculations and has a large library of various finite elements. ANSYS provides the ability to analyze various dynamic processes, but does not have the ability to analyze the stability of vibrations.

An attempt was made to construct a 15-DOF finite element model of the wing in ANSYS to determine the frequencies and modes of free vibrations, which could then be used for flutter studies [6]. The wing was approximated by BEAM188 beam finite elements with quadratic interpolation polynomials (Fig. 2).

The stiffness of each element is equal to the stiffness of the corresponding wing section, and the masses with moments of inertia are concentrated in the cross-sections where the elements are connected. The degrees of freedom are the deflections and rotation angles of the beam cross-sections where the elements are connected. In the wing, the centers of mass of the cross-sections are offset from the elastic axis (Fig. 1). Therefore, instead of a single mass, we place a pair of concentrated masses MASS21 in the cross-sections. We fix one of the masses on a rigid arm relative to an elastic axis to ensure a given position of the center of mass and moment of inertia. The fuselage with the empennage is approximated by the concentrated mass MASS21, which is attached to the wing root chord. The mass of the fuselage with empennage $M_f = 13403 \text{ kg}$, moments of inertia $I_{fx} = 6.1\cdot 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $I_{fy} = 5.7\cdot 10^5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $I_{fz} = 6.0\cdot 10^5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$.

An ANSYS modal analysis yielded the following results: the frequency of the first bending mode is 5.24 Hz, of the second bending mode is 21.8 Hz, and of the first twisting mode is 79.06 Hz. These values differ significantly from the experimental data.

2. Finite element model of constant cross section with beam shape functions

A finite element model of the wing with shape functions for bending in the form of cubic Hermite polynomials has been developed [7].

$$\begin{aligned}
 f_1 &= 1 - \frac{3z^2}{l^2} + \frac{2z^3}{l^3}, \\
 f_2 &= z - \frac{2z^2}{l} + \frac{3z^3}{l^2}, \\
 f_3 &= \frac{3z^2}{l^2} - \frac{2z^3}{l^3}, \\
 f_4 &= -\frac{z^2}{l} + \frac{z^3}{l^2},
 \end{aligned} \tag{1}$$

where l is the length of the element, z is the coordinate along the length.

These polynomials describe the deflection patterns of a beam of constant cross-section under the corresponding end loads. The deflection within the finite element is determined by the formula

$$w = w_i f_1 + \theta_i f_2 + w_j f_3 + \theta_j f_4, \quad (2)$$

where w_i and w_j are the deflections of the left and right ends of the element, θ_i and θ_j are the angles of rotation of the sections of the corresponding ends in the plane of deformation.

For torsion, linear shape functions are taken

$$\begin{aligned} f_5 &= 1 - \frac{z}{l}, \\ f_6 &= \frac{z}{l}, \end{aligned} \quad (3)$$

The twist angle of the wing φ is determined by the formula

$$\varphi = \varphi_i f_5 + \varphi_j f_6, \quad (4)$$

where φ_i and φ_j are the angles of rotation of the left and right ends of the element around the elastic axis of the wing.

These finite elements (Fig. 3) assume a constant cross-section along the length, therefore, in the developed model, the average values of all parameters between the nodal sections of the wing are taken.

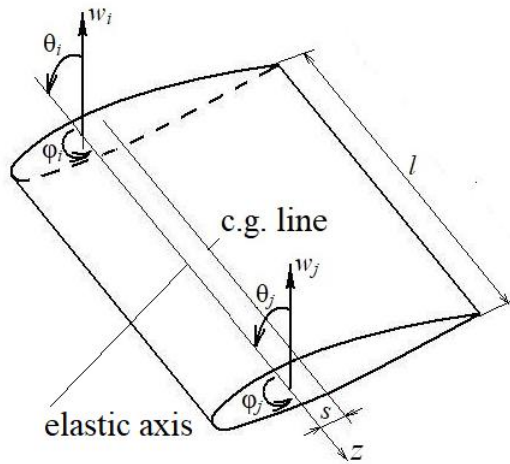


Fig. 3. Wing finite element

To form matrices, the principle of minimum potential energy or the Galerkin's method are usually used [7]. For the problem of free vibrations, it is more convenient to use the Lagrange equations, which in this problem have the form

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{U}}} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = 0 \quad (5)$$

where T is the kinetic energy, Π is the potential energy, $\mathbf{U}$ is the vector of generalized coordinates, $\dot{\mathbf{U}}$ is the vector of generalized velocities of the finite element.

The generalized coordinates and velocities are the nodal displacement values (DOF) and their derivatives, which we will write in the following order for the element with number e

$$\begin{aligned}\mathbf{U}^e &= [w_i^e \ \theta_i^e \ \varphi_i^e \ w_j^e \ \theta_j^e \ \varphi_j^e]^T, \\ \dot{\mathbf{U}}^e &= [\dot{w}_i^e \ \dot{\theta}_i^e \ \dot{\varphi}_i^e \ \dot{w}_j^e \ \dot{\theta}_j^e \ \dot{\varphi}_j^e]^T.\end{aligned}\quad (6)$$

In what follows, we will omit the index of the element e .

The wing profile undergoes a plane motion relative to the intersection point of the elastic axis with the section plane. In this case, the kinetic energy of a wing section of length dz will be

$$T_d = \frac{1}{2}m(\dot{w} + s\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}m\dot{w}^2 + ms\dot{w}\dot{\varphi} + \frac{1}{2}(ms^2 + J)\dot{\varphi}^2. \quad (7)$$

Substituting (2) and (4) into (7) and integrating over the length of the finite element yields an expression for the kinetic energy of the finite element as a function of the nodal velocities

$$T = \int_0^l T_d dz = T(\dot{\mathbf{U}}). \quad (8)$$

We differentiate (8) with respect to the vector of nodal velocities and obtain a system of equations in which the coefficients are elements of the mass matrix.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{U}}} = \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}. \quad (9)$$

The mass matrix of a finite element has the form

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 156m_1 & 22m_1l & 147m_1s & 54m_1 & -13m_1l & 63m_1s \\ 22m_1l & 4m_1l^2 & 21m_1sl & 13m_1l & -3m_1l^2 & 14m_1sl \\ 147m_1s & 21m_1sl & 2m_2 & 63m_1s & -14m_1sl & m_2 \\ 54m_1 & 13m_1l & 63m_1s & 156m_1 & -22m_1l & 147m_1s \\ -13m_1l & -3m_1l^2 & -14m_1sl & -22m_1l & 4m_1l^2 & -21m_1s \\ 63m_1s & 14m_1sl & m_2 & 147m_1s & -21m_1s & 2m_2 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

where $m_1 = ml/420$, $m_2 = (Jl + msl^2)/6$, the values of J , m and s are taken as averages over the length of the finite element.

The potential energy of deformation of a wing element of length dz consists of the potential energies of bending and torsion

$$\Pi_d = \frac{1}{2}\mathbf{EI}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)^2 + \frac{1}{2}GJ_p\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2, \quad (11)$$

We differentiate expressions (1) and (3) with respect to z and substitute them into (2) and (4). Next, we substitute (2) and (4) into (11), integrate over the length of the finite element, and obtain the potential energy of deformation of the finite element as a function of the nodal values

$$\Pi = \int_0^l \Pi_d dz = \Pi(\mathbf{U}). \quad (12)$$

We differentiate (12) with respect to the vector of nodal values and obtain a system of equations in which the coefficients are elements of the stiffness matrix

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{K} \mathbf{U} . \quad (13)$$

According to the assumptions made in deriving formula (11), only normal stresses act during beam bending, and only shear stresses act during rod torsion. Therefore, bending and torsional deformations do not influence each other. The finite element stiffness matrix has the form

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 6k_1 & 3k_1l & 0 & -6k_1 & 3k_1l & 0 \\ 3k_1l & 2k_1l^2 & 0 & -3k_1l & k_1l^2 & 0 \\ 0 & 0 & k_2 & 0 & 0 & -k_2 \\ -6k_1 & -3k_1l & 0 & 6k_1 & -3k_1l & 0 \\ 3k_1l & k_1l^2 & 0 & -3k_1l & 2k_1l^2 & 0 \\ 0 & 0 & -k_2 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

where $k_1 = 2EI/l^3$, $k_2 = GJ_p/l$, the values of EI and GJ_p are taken as averages over the length of the finite element.

We differentiate expression (9) with respect to time, substitute the result together with (13) into equation (5), and sum over all elements. We obtain the equation for free vibrations of the finite element model of the wing

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = 0 . \quad (15)$$

where $\mathbf{M}$ and $\mathbf{K}$ are the global mass and stiffness matrices, $\ddot{\mathbf{U}}$ and $\mathbf{U}$ are the global vectors of nodal accelerations and nodal values.

We solve the eigenvalue problem for equation (15) and obtain the frequencies and modes of free oscillations of the wing model. The frequency of the first bending mode is 2.70 Hz, of the second bending mode is 11.4 Hz, and of the first twisting mode is 17.4 Hz. These values are close to experimental data.

3. Finite element model of variable cross-section with beam shape functions

For more accurate calculations, a finite element model of the wing was constructed, in which the cross-sectional dimensions vary linearly along the length of the elements. In ANSYS terminology, such elements are called conical. The wing's finite element parameters are written using the following formulas. The subscripts i and j denote the left and right ends of the element.

$$\begin{aligned} m &= m_i f_5 + m_j f_6, \\ J &= J_i f_5 + J_j f_6, \\ EI &= EI_i f_5 + EI_j f_6, \\ GJ_p &= GJ_{pi} f_5 + GJ_{pj} f_6. \end{aligned} \quad (16)$$

The value of s varies little along the span compared to the other parameters, so we assume it to be conditionally constant at each nodal section. We repeat the transformations according to formulas (7) – (10) and (11) – (13), replacing the mass and stiffness parameters with variables according to formulas (16). We obtain the mass and stiffness matrices of the conical element.

The elements of the mass matrix are as follows

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= L_1(120m_i + 36m_j), & M_{33} &= L_2(15m_i + 5m_j)s^2 \\
 & & & + L_2(15J_i + 5J_j), \\
 M_{12} &= M_{21} = L_1(15m_i + 7m_j)l, & M_{34} &= M_{43} = L_2(4m_i + 5m_j)s, \\
 M_{13} &= M_{31} = L_2(16m_i + 5m_j)s, & M_{35} &= M_{53} = L_2(-m_i - m_j)sl, \\
 M_{14} &= M_{41} = L_1(27m_i + 27m_j), & M_{36} &= M_{63} = L_2(5m_i + 5m_j)s^2 \\
 & & & + L_2(5J_i + 5J_j), \\
 M_{15} &= M_{51} = L_1(-7m_i - 6m_j)l, & M_{44} &= L_1(36m_i + 120m_j), \\
 M_{16} &= M_{61} = L_2(5m_i + 4m_j)s, & & \\
 M_{22} &= L_1(5m_i + 3m_j)l^2/2, & M_{45} &= M_{54} = L_1(-7m_i - 15m_j)l, \\
 M_{23} &= M_{32} = L_2(2m_i + m_j)sl, & M_{46} &= M_{64} = L_2(5m_i + 16m_j)s, \\
 M_{24} &= M_{42} = L_1(6m_i + 7m_j)l, & M_{55} &= L_1(3m_i + 5m_j)l^2/2, \\
 M_{25} &= M_{52} = L_1(-3m_i - 3m_j)l^2/2, & M_{56} &= M_{65} = L_2(-m_i - 2m_j)sl, \\
 M_{26} &= M_{62} = L_2(m_i + m_j)sl, & M_{66} &= L_2(5m_i + 15m_j)s^2 \\
 & & & + L_2(5J_i + 15J_j),
 \end{aligned} \tag{17}$$

where $L_1 = l/420$, $L_2 = l/60$.

The stiffness matrix has the form

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{6a_i+6a_j}{l^3} & \frac{4a_i+2a_j}{l^2} & 0 & \frac{-6a_i-6a_j}{l^3} & \frac{2a_i+4a_j}{l^2} & 0 \\ \frac{4a_i+2a_j}{l^2} & \frac{3a_i+a_j}{l} & 0 & \frac{-4a_i-2a_j}{l^2} & \frac{a_i+a_j}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b_i+b_j}{2l} & 0 & 0 & \frac{-b_i-b_j}{2l} \\ \frac{-6a_i-6a_j}{l^3} & \frac{-4a_i-2a_j}{l^2} & 0 & \frac{6a_i+6a_j}{l^3} & \frac{-2a_i-4a_j}{l^2} & 0 \\ \frac{2a_i+4a_j}{l^2} & \frac{a_i+a_j}{l} & 0 & \frac{-2a_i-4a_j}{l^2} & \frac{a_i+3a_j}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b_i-b_j}{2l} & 0 & 0 & \frac{b_i+b_j}{2l} \end{bmatrix}, \tag{18}$$

where $a = EI$, $b = GJ_p$.

Solving the eigenvalue problem with matrices (17) and (18) yields the following results. The frequency of the first bending mode is 2.96 Hz, of the second bending mode is 12.4 Hz, and of the first twisting mode is 18.1 Hz. These values are even closer to the experimental data.

Conclusions

Calculations of the frequencies and modes of natural vibrations using ANSYS model yielded significant discrepancies with the experimental results. This is explained by the inappropriate nature of the interpolation polynomials for this problem. In support of this, the book [2] notes that for flutter research it is desirable to use free oscillation modes rather than other functions that satisfy the boundary conditions, even if approximation by such functions yields satisfactory frequencies.

A finite element model of a wing with 15 degrees of freedom was developed from beam elements with cubic shape functions for bending and linear shape functions for torsion. The

displacement of the centers of mass relative to the elastic axis is taken into account by adding inertial elements to the mass matrix, which connect the degrees of freedom of bending and torsion of the beam. Natural vibration calculations using this model yielded a discrepancy with experimental data acceptable for engineering calculations. However, this model uses finite elements of constant cross-section, which is a disadvantage compared to ANSYS finite elements, which can have variable cross-sections.

Finite elements of constant cross section with cubic shape functions have been improved. Linear variations in the wing parameters per unit length along the element are programmed. Calculation of the oscillation frequencies of this wing model yielded results that are quite close to experimental data.

The results of the calculations and experiments are summarized in Table 2, where f_{b1} and f_{b2} are the frequencies of the first and second bending vibration modes, f_{t1} is the frequency of the first torsional vibration mode.

Table 2

Frequencies of free oscillations of the wing model (Hz)

Wing model	f_{b1}	f_{b2}	f_{t1}
FEM ANSYS	5.24	21.8	79.06
FEM Segerlind [5]	2.70	11.4	17.4
FEM developed	2.96	9.41	18.1
Natural experiment	2.9	9.5	19.0

The developed model is designed to analyze flutter taking into account the distribution of elastic, inertial and aerodynamic forces along the wing span.

References

1. *Advisory Circular No 25.629-1B*. U.S. Department of Transportation. Federal Aviation Administration, 2014. 22 p Available at: https://www.faa.gov/documentLibrary/media/Advisory_Circular/AC_25_629-1B.pdf
2. R. L. Bisplinghoff, H. Ashley, & R. L. Halfman, *Aeroelasticity*. 3rd edn. Courier Corporation, NY, (2013).
3. E. H. Dowell, *A modern course in aeroelasticity, Solid mechanics and its applications*. 6th edn, Springer International Publishing, Switzerland, (2015).
4. K. Hiroaki, M. Watanabe, Theoretical study on the instability mechanism of flutter generated on a cantilevered flexible plate in three-dimensional uniform flow. *Acta Mech*, **232**, 2897–2917 (2021). <https://doi.org/10.1007/s00707-021-02979-6>
5. P. A. Meehan, Flutter prediction of its occurrence, amplitude and nonlinear behaviour, *Journal of Sound and Vibration*, **535**, 117117 (2022). <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2022.117117>
6. S. Filipkovskij, E. Polyakov, Development and modal analysis of a discrete model of a wing with engine, *Aerospace Technic and Technology*, **206**, No 4 sup2, 102-109 (2025). <https://doi.org/10.32620/akt.2025.4sup2.11>
7. L. J. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*, 2nd edn, John Wiley and Sons, Inc. NY (1984).

Довготривале деформування нелінійно-в'язкопружних матеріалів з врахуванням виду напруженого стану

О. В. Романов, Д. П. Черноус

Інститут механіки ім. С.П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

scerp@inmech.kiev.ua

Ключові слова: нелінійно-в'язкопружний матеріал, розтяг з крученням, деформація повзучості, кут виду напруженого стану

Вступ. Матеріал елементів промислового обладнання в процесі експлуатації працює переважно в умовах складного напруженого стану і зазнає дію комплексу термомеханічного навантаження. В цих умовах процес довготривалої деформації матеріалу залежить від багатьох факторів: як фізико-механічних властивостей самого матеріалу, температури експлуатації, режиму навантаження а також і виду напруженого стану.

Одним із способів побудови визначальних рівнянь для розрахунку деформацій повзучості, за умов комплексного напруженого стану при простих [7,10] і близьких до простих режимах навантаження, є узагальнення рівнянь одномірної повзучості до складного напруженого стану на основі тензорно-лінійного зв'язку між тензорами напружень і деформацій у вигляді пропорційності їх девіаторів.

Важливим моментом цього підходу є гіпотеза про єдину криву деформації матеріалу. Слід зазначити, що якщо для короткострокового активного навантаження гіпотеза єдиної діаграми деформації у багатьох випадках задовільно або навіть добре підтверджена експериментально як для металевих [5,6,14,15], так і для полімерних матеріалів [2,8], іноді навіть для складних режимів навантаження [2], то у випадку довготривалого навантаження картина виглядає дещо інакше. Аналогії щодо короткострокового навантаження немає, і в більшості випадків експериментальних досліджень цих матеріалів не підтверджується [4,6].

При врахуванні впливу виду напруженого стану на повзучість виникає необхідність включення в визначальні рівняння третього інваріанту девіатора напружень. Одним з параметрів, що характеризують напружений стан і дозволяють врахувати цей вплив є кут виду напруженого стану ψ_σ . У цій роботі вплив третього інваріанту девіатора напруження здійснюється за допомогою функції кута $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ виду напруженого стану.

1. Постановка задачі. Об'єкт дослідження. Вихідні співвідношення. Розглядається повзучість тонкостінних трубчастих елементів (рис.1.1) з нелінійно-в'язкопружних матеріалів в умовах одновісного та двовісного навантаження розтягуванням з крученням. В якості матеріалу трубчастих елементів обрано поліетилен високої щільності та поліетилен низького тиску. На схемі зображені навантаження тонкостінних трубчастих елементів одновісним розтягуванням (а), чистим крученням (б) та розтягуванням з крученням (в).

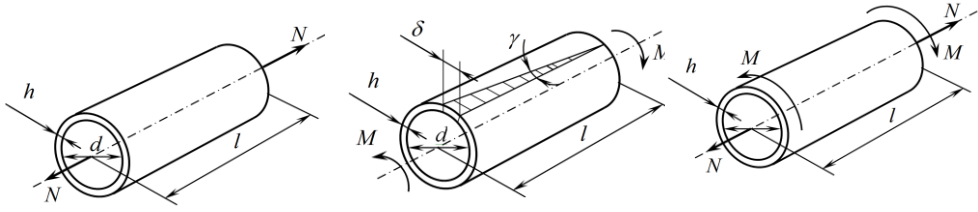


Рис.1.1 Схема навантаження тонкостінних трубчастих елементів одновісним розтягуванням (а), чистим крученням (б) та розтягуванням з крученням (в)

Припустимо деяке тіло з в'язкопружного матеріалу знаходиться в умовах складного напруженого стану та простого режиму навантаження

$$\sigma_{ij}(\tau) = k(\tau)\sigma_{ij}(\tau_0); \quad k \Big|_{\tau_0} = 0 = 1; \quad \tau \in (0, t), \quad (1.1)$$

де σ_{ij} - компоненти тензора напруження; $k(\tau)$ - функція, що задає режим навантаження.

Процес деформування в цих умовах здійснюється за траєкторією малої кривизни, а компоненти деформації пов'язані з компонентами напружень тензорно-лінійним зв'язком у вигляді пропорційності їх девіаторів [1]:

$$e_{ij}(t) = \Lambda[J_1(T_\sigma(t)), J_2(D_\sigma(t)), J_3(D_\sigma(t))]s_{ij}(t), \quad (1.2)$$

де $J_1(T_\sigma(t))$ - перший інваріант тензора напруження, а $J_2(D_\sigma(t)), J_3(D_\sigma(t))$ – відповідно другий і третій інваріанти девіатора напружень; $s_{ij}(t)$ і $e_{ij}(t)$ - відповідно компоненти девіаторів напружень і деформацій, а коефіцієнт пропорційності $\Lambda(\cdot)$, відображає фізико-механічні властивості середовища, його реакцію на термосиловий вплив, і може залежати від усіх трьох інваріантів тензора напружень та температури.

У зв'язку з незначним впливом кульової компоненти тензора напруження $J_1(T_\sigma(t))$ на процес деформування, він не враховується [11]. Відповідно коефіцієнт пропорційності $\Lambda(\cdot)$ записується у вигляді:

$$\Lambda(\cdot) = \Lambda[J_2(D_\sigma(t)), J_3(D_\sigma(t))]. \quad (1.3)$$

Залежно (1.2) компоненти девіаторів напружень та деформацій задаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0; & \sigma_0 &= \frac{1}{3}\sigma_{ii} & \delta_{ij} &= \frac{1}{3}J_1(T_\sigma) \\ e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_0; & \varepsilon_0 &= \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_{ii}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для ізотропних однорідних нелінійно-в'язкопружних матеріалів, для яких процес повзучості супроводжується змінами об'єму ($\varepsilon_v \neq 0$) система визначальних рівнянь виходячи з (1.3), записується у вигляді

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_i[\sigma_i(t), t, \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)]}{\sigma_i(t)} [\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)] + \frac{1}{3}\delta_{ij}\varepsilon_v(t) & (i, j = 1, 3) \\ \varphi_i(\varepsilon_i(t)) = \sigma_i(t) + \lambda_i \int_0^t K_i(t - \tau)\sigma_i(\tau)d\tau \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \lambda_v \int_0^t K_v(t - \tau)\sigma_0(\tau)d\tau, \end{cases} \quad (1.5)$$

У (1.4)-(1.5) σ_i, σ_0 – інтенсивність напруження та середнє напруження відповідно; ε_0 – середня деформація; $\varepsilon_i(\cdot), \varepsilon_v(\cdot)$ – інтенсивність деформації та об'ємна деформація відповідно; $\varphi_v(\cdot), \varphi_i(\cdot)$ – функції, що відображають фізико-механічні властивості ізотропних нелінійно-в'язкопружних середовищ, що задаються залежностями між першими та іншими інваріантами тензорів деформацій та напружень і між іншими інваріантами в'язкопружності Работнова [12]; $K_v(\cdot), K_i(\cdot)$ – функції, що задають ядра об'ємної та зсувної повзучості; λ_v, λ_i – реологічні параметри.

Ядра спадковості в (1.6) задаються дробово-експоненціальними функціями [12]

$$K(t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t - \tau)^{(1-\alpha)n}}{\Gamma[(1-\alpha)(1+n)]}, \quad (1.6)$$

де α, β – параметри ядер, які підлягають експериментальному визначенню; $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функція Ейлера.

Завдання полягає у визначенні функцій $\varphi_v(\cdot)$ і $\varphi_i(\cdot)$, що задають нелінійність в'язкопружних властивостей, параметрів ядер $K_v(\cdot)$ і $K_i(\cdot)$, що враховують історію навантаження, а також конкретизації функції $\Lambda(\cdot)$, зокрема визначення функції $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ з подальшою апробацією побудованих моделей на задачах розрахунку деформацій поздовжньої та зсувної повзучості трубчастих елементів в умовах двовісного навантаження.

2. Методика визначення функцій, параметрів та матеріальних констант моделей повзучості. Базові експерименти.

Як зазначалося вище, одним з параметрів, що характеризує напружений стан і дозволяє врахувати вплив третього інваріанту девіатора напружень є кут виду напруженого стану ψ_σ . В англійській літературі [13,14] кут ψ_σ позначений як "Lode angle". З параметром Надаї-Лоді χ_σ він пов'язаний залежністю [9]

$$\chi_\sigma = -\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\psi_\sigma + \frac{4}{3} \pi \right). \quad (2.1)$$

Значення кута ψ_σ визначається за такою формулою [14]

$$\psi_\sigma = \frac{1}{3} \arccos \frac{27 J_3(D_\sigma)}{2 \sigma_1^3}, \quad (2.2)$$

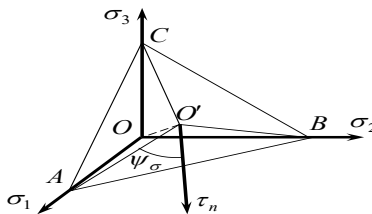


Рис. 2.1

а його графічна інтерпретація (рис. 2.1) показує орієнтацію октаедричного дотичного напруження τ_n в октаедричній площині ABC щодо проекції $A0'$ на цю площину осі максимальної головного напруження σ_1 . В цій інтерпретації одновісному розтягу відповідає $\psi_\sigma = 0$, одновісному стиску $\psi_\sigma = \pi/3$, а чистому скрученню $\psi_\sigma = \pi/6$, а діапазон зміни

цього кута дорівнює $\pi/3$.

Після ряду нескладних перетворень рівняння (1.2), з урахуванням конкретизації (1.5), для коефіцієнта пропорційності $\Lambda(\cdot)$ отримуємо наступне співвідношення

$$\Lambda(\cdot) = \frac{3 \varepsilon_i[\sigma_i(t), t, \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)]}{2 \sigma_i(t)}, \quad (2.3)$$

а залежність між девіаторами деформацій та напружень (1.2) відповідно набуває вигляду

$$e_{ij} = \frac{3 \varepsilon_i[\sigma_i(t), t, \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)]}{2 \sigma_i(t)} s_{ij}(t), \quad (2.4)$$

Суттєву залежність між інтенсивністю деформацій повзучості при $\sigma_i = \text{const}$ від виду напруженого стану передбачається враховувати у фізичному законі $\varepsilon_i[\sigma_i, t, \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)]$ за допомогою функцій кута виду напруженого стану $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ наступним чином

$$\varepsilon_i[\sigma_i, t, \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)] = \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma) \tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t), \quad (2.5)$$

де прийнято, що залежності ε_i від t при $\sigma_i = \text{const}$ для різних видів напруженого стану є подібними щодо залежності $\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)$ для умов одновісного розтягування, коефіцієнт пропорційності $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ не залежить від інтенсивності напружень σ_i і часу t , що підтверджується експериментально (рис. 2.2). на прикладі матеріалів, діаграми деформування яких представлені на рис. 2.2.

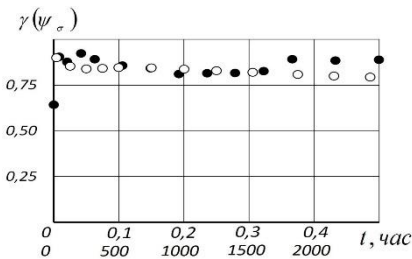


Рис. 2.2. Залежність коефіцієнта пропорційності $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ від часу t для поліетилену високої щільності ($\circ$) та поліетилену низького тиску ($\bullet$)

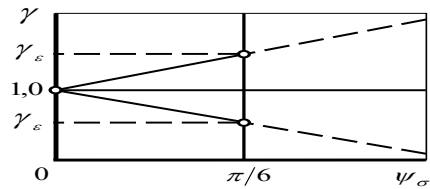


Рис. 2.3. Схема конкретизації функції $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$

Надалі в розрахункових рівняннях функція $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ розглядається як коригуючий коефіцієнт у формі відношення між інтенсивністю деформацій повзучості в умовах чистого крутіння $\tilde{\varepsilon}_i(\cdot)$ та одновісного розтягування $\tilde{\varepsilon}_i(\cdot)$ при фіксованому $\sigma_i = \text{const}$

$$\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma) = \frac{\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)}{\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)}. \quad (2.6)$$

Для умов одновісного розтягування $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ тотожно дорівнює 1, а для чистого кручення визначається експериментально.

Схема інтерпретації відповідних експериментальних даних подано на рис. 2.3. Кут виду ψ_σ змінюється від 0, що відповідає одновісному розтягуванню, до $\pi/6$, що відповідає чистому крученню (табл. 1). Залежність коефіцієнта $\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma)$ від кута виду

напруженого стану ψ_σ визначається для двох класів матеріалів. Для першого класу матеріалів $\bar{\varepsilon}_i(\cdot) > \tilde{\varepsilon}_i(\cdot)$, так що $\gamma_\varepsilon < 1$, а іншого класу матеріалів $\bar{\varepsilon}_i(\cdot) < \tilde{\varepsilon}_i(\cdot)$, так що $\gamma_\varepsilon > 1$.

Для залежності γ від ψ_σ отримуємо відповідне рівняння

$$\gamma_\varepsilon(\psi_\sigma) = 1 \pm \frac{6[1 - \bar{\varepsilon}_i(\sigma_i(t))/\tilde{\varepsilon}_i(\sigma_i(t))\psi_\sigma]}{\pi}, \quad (2.7)$$

у якому знак $(-)$ відповідає першому класу матеріалів, а знак $(+)$ – іншому класу матеріалів.

Система розрахункових рівнянь повзучості для складного напруженого стану у вигляді залежностей між компонентами тензорів деформацій $\varepsilon_{ij}(t)$ та напружень $\sigma_{ij}(t)$ виходячи з (1.5) з урахуванням (1.4), (2.2), (2.7), записується у формі

$$\begin{cases} \varepsilon_{ij}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi \pm 6(1 - \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma))]\bar{\varepsilon}_i(\sigma_i, t)}{\pi \sigma_i(t)} (\sigma_{ij}(t) - \delta_{ij}\sigma_0(t)) + \frac{1}{3} \delta_{ij}\varepsilon_v(t); \\ \varphi_i(\bar{\varepsilon}_i(t)) = \sigma_i(t) - \gamma_i \int_0^t K_i(t - \tau) \sigma_i(\tau) d\tau; \\ \varphi_v(\varepsilon_v(t)) = \sigma_0(t) + \gamma_v \int_0^t K_v(t - \tau) \sigma_0(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (2.8)$$

Визначення невідомих функцій $\varphi_i(\cdot)$ та $\varphi_v(\cdot)$, параметрів ядер $K_i(\cdot)$ та $K_v(\cdot)$, а також реологічних параметрів λ_i та λ_v здійснювалося за методикою, викладеною в роботі [3].

3. Розрахунок деформацій повзучості нелінійно-в'язкопружних тонкостінних трубчастих елементів в умовах двовісного навантаження.

Вирішуються задачі розрахунку деформацій поздовжньої та зсувної повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності та поліетилену низького тиску в умовах одновісного розтягування, чистого кручення та комбінованого навантаження розтягуванням з крученням з урахуванням впливу виду напруженого стану. Розрахунки виконуються за допомогою моделі повзучості (2.8). Розглядається процес повзучості при постійних у часі напруженнях.

Для поздовжніх деформацій повзучості $\varepsilon_{11}(t)$ з (2.8) для умов, коли $\sigma_{11} = \text{const}$ та $\tau_{12} = \text{const}$ у разі матеріалів, для яких $\bar{\varepsilon}_i(\cdot) > \tilde{\varepsilon}_i(\cdot)$, з урахуванням (2.8) отримуємо рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi - 6(1 - \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma))]}{\pi \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k + \frac{1}{3} \sum_{k=0}^3 f_{k,j} \left\{ \frac{1}{3} \sigma_{11} \left[1 + \lambda_v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_v)^{(1+n)(1+\alpha_v)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_v)]} \right] \right\}^k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

а для деформацій зсуву $\varepsilon_{21}(t)$ – рівняння

$$\begin{aligned} \varepsilon_{21}(t) = \frac{3}{2} \frac{[\pi - 6(1 - \gamma_\varepsilon(\psi_\sigma))]}{\pi \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}} \sum_{k=0}^3 g_{k,j} \left\{ \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2} \left[1 + \right. \right. \\ \left. \left. \lambda_i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_i)^{(1+n)(1+\alpha_i)}}{\Gamma[1+(1+n)(1+\alpha_i)]} \right] \right\}^k, \end{aligned} \quad (3.2)$$

де прийнято, що $\sigma_i = \sqrt{\sigma_{11}^2 + 3\tau_{21}^2}$; $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{11}$. Тут $g_{k,j}\{\cdot\}$, $f_{k,j}\{\cdot\}$ - значення коефіцієнтів, а α_i , β_i , λ_i , α_v , β_v , λ_v - параметрів ядер повзучості які входять до рівнянь (3.1) та (3.2).

Результати розрахунків деформацій поздовжньої $\varepsilon_{11}(t)$ і зсувної $\varepsilon_{21}(t)$ повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності і поліетилену низького тиску в умовах комбінованого навантаження одновісним розтягуванням і крученням ($\sigma_{11} \neq 0$, $\tau_{21} \neq 0$), які виконані за рівняннями (3.1) та (3.2), представлені на рис.3.2 та відповідно на рис.3.3 з експериментальними даними.

Розрахунки за рівняннями (3.1) та (3.2) нанесені штрихпунктирними лініями, а штриховими лініями нанесені результати розрахунків за рівнянням (1.5) без враховування впливу виду напруженого стану.

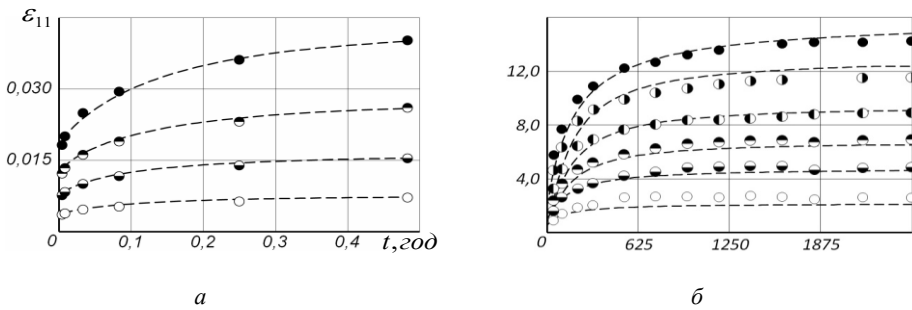


Рис. 3.2. Розрахункові (лінії) та експериментальні (точки) значення деформацій поздовжньої повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності (а) при $\sigma_{11} = 2,5$ (○), 5,0 (◐), 7,5 (◑), 10,0 (●) МПа, $\tau_{21} = 0$ і поліетилену низького тиску при $\sigma_{11} = 3,92$ (○), 5,88 (◐), 6,87 (◑), 7,84 (◒), 8,83 (◑), 9,32 (●) МПа, $\tau_{21} = 0$

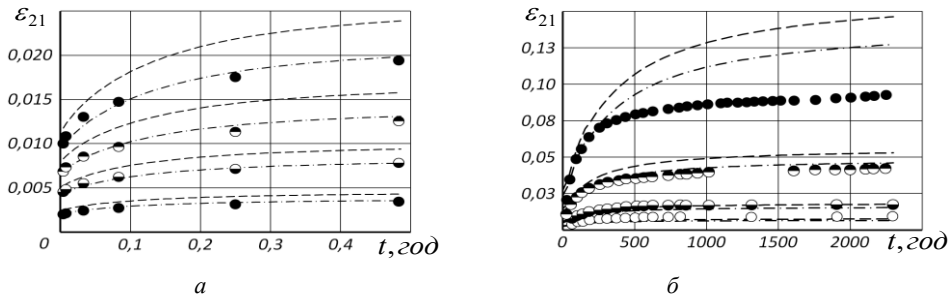


Рис. 3.3. Розрахункові (лінії) та експериментальні (точки) значення деформацій зсувної повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену високої щільності (а) при $\tau_{21} = 1,7$ (○), 2,34 (◐), 3,51 (◑), 4,68 (●) МПа; $\sigma_{11} = 0$ і поліетилену низького тиску при (б) при $\tau_{21} = 1,18$ (○), 1,96 (◐), 3,43 (◑), 4,91 (●) МПа; $\sigma_{11} = 0$

Значення компонентів σ_{11} та τ_{21} тензора напруження при порівнянні розрахункових та експериментальних значень деформацій повзучості на рис. 3.2 та 3.3, а також відповідні значення інтенсивності напружень σ_i та кутів виду напруженого стану ψ_σ наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Параметри напруженого стану тонкостінних трубчастих елементів в умовах комбінованого навантаження одновісним розтягуванням та крученням

Матеріал	Крива	σ_{11} , МПа	τ_{21} , МПа	σ_i , МПа	ψ_{σ} , °	ψ_{σ} , рад	γ_{ϵ}
Поліетилен високої щільності	1	1,77	0,83	2,25	7,16	0,125	0,83
	2	3,54	1,66	4,56	7,16	0,125	
	3	5,31	2,49	6,84	7,16	0,125	
	4	7,08	3,32	9,12	7,16	0,125	
Поліетилен низького тиску	1	1,96	0,98	2,60	7,79	0,136	0,86
	2	2,97	1,48	3,92	7,79	0,136	
	3	1,96	1,96	3,92	15,52	0,271	
	4	2,94	2,94	5,88	15,52	0,271	

Висновок

У цій статті запропоновано підхід до побудови визначальних рівнянь повзучості нелінійно-в'язкопружних середовищ при простих та близьких до простих режимів навантаження, що враховують вплив виду напруженого стану. Вважається, що за цих умов навантаження, деформування здійснюється за траєкторією малої кривизни, а девіатор деформацій пропорційний девіатору напружень. Врахування залежності деформування від виду напруженого стану в визначальних рівняннях, що пов'язують другі інваріанти девіаторів деформацій та напружень здійснюється за допомогою функції з параметром кута виду напруженого стану.

Співставлення результатів розрахунку деформацій повзучості тонкостінних трубчастих елементів з поліетилену при комбінованому навантаженні розтягом зі крученням показали, що врахування виду напруженого стану якісно та кількісно покращує узгодження з результатами експерименту порівняно з розрахунками без його врахування, що дозволяє зробити висновок про обґрунтованість даного підходу до побудови визначальних рівнянь.

1. Баев Л.В., Малинин Н.И. Исследование ползучести органического стекла (полиметилметакрилата) при совместном действии растяжения с кручением // Механика полимеров. – 1966, №5. – С. 671-677.
2. Васьков Б. С. Некоторые вопросы ползучести полиэтиленовых труб // Прочность материалов и конструкций. Труды ЛПИ. № 278. – Ленинград: Машиностроение, 1967. – С. 13-19.
3. Голуб В.П., Кобзарь Ю.М., Рагулина В.С. К задаче идентификации ядер наследственности в нелинейной теории вязкоупругости // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 45. – С. 39-49.
4. Горев Б.В., Рубанов В.В., Соснин О.В., О построении уравнений ползучести для материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Журнал прикладной механики и технической физики. – 1979, №4. – С. 121-128.
5. Дэвис Е. Текучесть и разрушение стали со средним содержанием углерода при сложном напряженном состоянии // Теория пластичности. – Сб. Москва: ИЛ. – 1948.
6. Жуков А. М. О пластических деформациях изотропного металла при сложном нагружении // Известия АН СССР, Отд. техн. наук. – 1956, № 12.

7. Ильюшин А.А. Пластичность, М., ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. – ???с.
8. Крегерс А.Ф., Килевич М.Р. Комплексное исследование полиэтилена высокой плотности в условиях нелинейной ползучести и релаксации напряжений // Механика композитных материалов. – 1985, №2. – С. 195-201.
9. Лоде В. Влияние среднего главного напряжения на текучесть металлов // Теория пластичности. – Сб., Москва: ИЛ. – 1948.
10. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
11. Наместников В.С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. Отделение технических наук. – 1957, №4. – С. 141-145.
12. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – Москва: Наука, 1966. – 752 с.
13. Chakrabarty, J., Theory of Plasticity: Third edition, Elsevier, Amsterdam. 2006, P.-896.
14. Lode, W. (1926). Versuche über den Einfluss der mittleren Hauptspannung auf das Fließen der Metalle Eisen Kupfer und Nickel. Zeitung Phys., vol. 36, pp. 913–939.
15. Taylor G. J. and Quinney H. The plastic distortion of metals. – Philosophical transactions of the Royal Society. – Ser. A, 230. – 1931. Long-term deformation of nonlinear viscoelastic materials taking into account the type of stress state

Статистичний аналіз якості та стабільності в процесі ремонту виробів

О. О. Макартцев¹, Л. В. Кривобоков, А. В. Демченко, С. Б. Калініченко

ДП «КБ «Південне», Дніпро, Україна

¹ makartsev2015@gmail.com

Аналіз якості продукції є важливою складовою управління виробничими процесами та підвищення якості і надійності ремонту виробів. Зростання складності та строків ремонту в сучасному технологічному процесі потребує ефективних методів контролю якості, які дозволяють мінімізувати витрати часу та ресурсів при оцінці продукції. Одним з таких інструментів є статистичний контроль якості, який дозволяє на основі деякої (достатньо об'ємної) партії виробів (вибірки) прийняти обґрунтоване рішення щодо якості та стабільності цієї партії [1].

Ключові слова: стабільність процесу, метод найменших квадратів, поле розсіювання, середньоквадратичне відхилення, контроль якості.

Вступ

В докладі розглядається застосування теорії статистичного контролю продукції для контролю робіт по відновленню працездатності виробів шляхом ремонту, аналогічно розглянутому в [2] підході. На відміну від розглянутих в [2] методів однократної вибірки і послідовного аналізу, в даному докладі розглянуто застосування так званого "поля розсіювання" - тобто зони, вірогідність виходу контрольованого параметру за межі якої достатньо мала і на практиці її можна не враховувати [3]. Тому параметри контролю продукції, які знаходяться в межах поля розсіювання, вважаються стабільними і якісними, в протилежному випадку необхідно аналізувати причини виходу значень за межі поля розсіювання, що в подальшому може потребувати додаткової інформації або корекції методики контролю.

1. Метод вирішення задачі

Контроль якості є ключовим елементом у забезпеченні надійності виробів після ремонту. Як показано в [2], є два основних підходи перевірки якості статистичними методами:

- суцільна перевірка;
- вибіркова перевірка.

Суцільна перевірка являє собою спосіб перевірки якості всіх без винятку виробів при їх здачі замовнику або в процесі передачі в подальше використання (наприклад, в торгові мережі, або після ремонту). Цей метод високонадійний і найбільш розповсюджений, особливо для серійних масових виробів. Але в цьому випадку, якщо контрольована продукція є надто дорогою або трудомісткою, або контроль стає економічно невиправданим (наприклад, виріб втрачає в процесі контролю працездатність чи потребує дуже дорогого ремонту після проведення контролю чи потребує відновлення і т.п.), стає питання альтернативного, більш дешевого і економічно виправданого методу контролю. В такому випадку на перше місце

виходить вибіркового контролю - коли якість продукції оцінюють не по всій партії, а лише по її частині (вибірці), і результати такого контролю розповсюджуються на всю партію. Деякі методи такого контролю розглянуто в [2]. В докладі пропонується застосування ще одного з методів вибіркового статистичного контролю - за допомогою поля розсіяння [3]. Поле розсіяння - це зона контролю, що знаходиться між крайніми значеннями контрольованого параметру, які отримані в технологічному процесі (в нашому випадку - ремонті виробів). На відміну від розглянутого в [2] методу, поле розсіяння дозволяє наглядно проводити моніторинг контролю технологічного процесу, а також завчасно реагувати на появу браку і його своєчасну корекцію. Математично це досягається за допомогою методу найменших квадратів (МНК) [4], який дозволяє побудувати і відслідкувати поле розсіяння за вихідними даними, наприклад, по результатам ремонту виробів. З точки зору математичної статистики поле розсіяння - це зона, вірогідність виходу за межі якої настільки мала, що на практиці її можна не враховувати. В такому разі, якщо випадкові значення контрольованого параметру підпорядковуються нормальному закону розподілу (а це, як правило, практично здійснюється в переважній більшості випадків), то поле розсіяння знаходиться в межах $\pm 3\sigma$ (де σ - середньоквадратичне відхилення (СКВ) від його математичного очікування або середнього значення), що означає знаходження параметру в цих межах з вірогідністю 0,997. В зв'язку з цим, умовою стабільності процесу ремонту виробів запропоновано обчислення співвідношення між значеннями вимірюваного параметру, які знаходяться в межах поля розсіяння, і загальною кількістю замірених значень (в тому числі тих, що знаходяться за межами поля). Алгоритм обчислень, а також приклад практичного використання алгоритму приведені далі в докладі.

2. Методика і алгоритм вирішення задачі

Як було сказано раніше, основні вихідні дані для побудовання поля розсіяння такі:

- контрольовані параметри повинні підкорятися нормальному розподілу;
- між параметрами існує лінійна залежність;
- межі поля розсіяння знаходяться в границях $\pm 3\sigma$

За таких умов математична статистика рекомендує користуватися залежностями МНК [4]

$$Y = at + b, \quad (1)$$

де Y - вимірюваний параметр;

t - проміжок часу на якому здійснювалися вимірювання;

a, b - постійні величини (коефіцієнти), які характеризують вид залежності (1).

Приведена лінійна залежність - це фактично математичне очікування (середнє значення) такої залежності. Поле відхилення від такої прямої в межах $\pm 3\sigma$ (крайніх значень СКВ) і становить поле розсіяння.

Для обчислення значень " a ", " b " існує система рівнянь [4]:

$$a = \frac{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i \cdot Y_i)}{n} - \bar{t} \cdot \bar{Y}}{\frac{\sum_{i=1}^n (t_i^2)}{n} - \bar{t}^2}, \quad (2)$$

$$b = \bar{Y} - a \cdot \bar{t}, \quad (3)$$

де Y_i, t_i - значення контрольованого параметру в конкретному замірі;

$i = 1 \div n$ - порядковий номер заміру в процесі контролю;

n - загальна кількість замірів;

$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$ - середнє значення Y ;

$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n}$ - середнє значення t .

Для подальшого побудування поля розсіювання потрібно обчислення значення СКВ σ . У випадку нормального розподілу в нашому випадку для обчислення СКВ треба враховувати так звані "миттєвий" і "сумарний" розподіл. Під миттєвим розподілом розуміють розподіл в певний момент часу, коли здійснюється вимір, а під сумарним - розподіл на тому проміжку часу, коли проводяться роботи (він складається з окремих миттєвих розподілів). В такому випадку розрахунок СКВ ведеться за формулою [3]:

$$\sigma \approx \left(1 + \frac{Z_\alpha}{\sqrt{2n}}\right) * S', \quad (4)$$

де

$$S' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\bar{Y} - Y_i)^2}{n - 2}};$$

Z_α - коефіцієнт, який залежить від обраної довірчої вірогідності α .

Маючи всі необхідні дані будемо поле розсіювання (рис. 1).

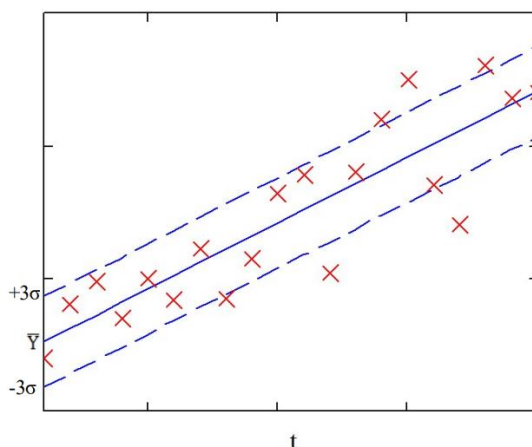


Рис. 1 – Поле розсіювання (ілюстративно)

На рис. 1 символом "x" позначено вимірювані значення контрольованого параметру "Y" в процесі ремонту виробів. Кількісний висновок про якість та стабільність процесу пропонується здійснювати за допомогою параметру N_{ct} :

$$N_{ct} = \frac{N_1}{N_\Sigma}, \quad (5)$$

де N_1 - кількість значень параметру "Y", які знаходяться в межах $\pm 3\sigma$;

N_Σ - загальна кількість значень, які були отримані при вимірах (в т.ч. тих, що знаходяться за межами $\pm 3\sigma$).

Якщо $N_{ct} \geq 0.95$, то процес вважається якісним і стабільним з вірогідністю « α »; якщо $N_{ct} < 0.95$ - процес нестабільний і необхідно аналізувати наявну статистику або використовувати додаткову інформацію.

Приклад використання приведенної вище методики на основі реальних даних з ремонту виробів приведено нижче. Вихідні дані приведені в таблиці, де позначено: Y - величина електричного спротиву одного елементу виробу, t - кількість проміжків часу в процесі замірів параметру " Y " при відновленні працездатності виробів.

Таблиця 1.

Вихідні дані для параметру « Y »

t_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Y_{is}	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.7	1.9	1.7	1.7	1.8	1.8	1.5	1.8
t_i	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
Y_{om}	1.8	1.6	1.7	2.5	1.6	1.7	1.6	1.7	1.6	2.1	1.7	1.8	1.8	1.6	1.6	1.6

Використовуючи формули (1)÷(4) для обчислення регресії і поля розсіювання:

$$n = 32$$

$$\bar{t} = 16.5$$

$$\bar{Y} = 1.734$$

$$a = 0.00035$$

$$b = 1.729$$

Таким чином лінійна регресія має вигляд:

$$Y = 0.00035 * t + 1.729$$

Поле розсіювання у вигляді $\pm 3\sigma$ для $\alpha=0.95$, $Z_\alpha=1.96$ приведено на рис. 2 для:

$$\sigma = 0.224$$

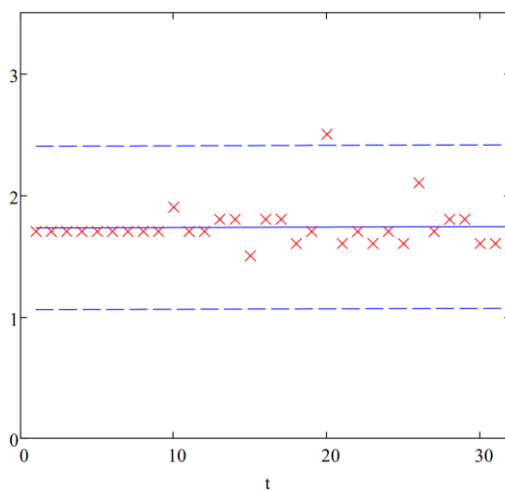


Рис. 2 – Поле розсіювання

Аналіз числових даних, графіка на рис. 2 за формулою (5) показує, що

$$N_{ст} = \frac{31}{32} = 0.969$$

тобто технологічний процес за наведеними даними є якісним та стабільним.

Висновки

Запропоновано метод аналізу якості і стабільності технологічного процесу за допомогою статистичної теорії побудування поля розсіювання. Наведено формули і алгоритм для кількісного висновку про стабільність процесу. Наведено приклад розрахунків якості і стабільності процесу ремонту на основі реальних даних ремонту виробів.

1. Р. Шторм. Теория вероятностей. Математическая статистика. Статистический контроль качества. «Мир», 1970.
2. А. В. Демченко, Л. В. Кривобоков, Ю. М. Ус «Аналіз якості виробів методами статистичного контролю результатів ремонту» – збірник науково-технічних статей «Космічна техніка. Ракетне озброєння», №2 2025 р.
3. М. В. Смирнов, І. В. Дунін-Барковський «Курс теорії вірогідностей і математичної статистики». вид. «Наука». 1969 р.
4. Є. С. Вентцель «Курс теорії вірогідностей». вид. «Наука», 1964 р.
5. Л. В. Кривобоков, Д. В. Дунаев, А. В. Демченко «Определение адекватности условий отработки систем ракет космического назначения с использованием стохастического критерия подобия». Техническая механика, Днепр, ИТМ НАН и НКАУ Украины. №4, 2018.

On the Biofiltration of Water Contaminated with Organic Pollutants

Poliakov V. L.

^aInstitute of Hydromechanics of NAS, Kyiv, Ukraine

^bInstitute of water problems and land reclamation of NAAS, Kyiv, Ukraine

¹ vpoliakov.ihm@gmail.com

This paper provides a brief overview of biofiltration as an effective method for the biological treatment of wastewater from various origins. It describes the structure of a conceptual model for the biofiltration of wastewater containing organic pollutants and identifies the key physical and biochemical processes that collectively ensure their removal. The hydraulic aspects of trickling biofiltration with mechanical bed aeration are analyzed in detail. The methodology for calculating the hydrodynamic state of the active layer and gas dynamics for high rate biofilters is illustrated by calculations of a number of examples using typical initial data.

Ключові слова: biofiltration, organic pollution, modeling, trickling biofilter, nonlinear filtration, pressure differential.

Introduction

In the context of the globally intensifying contamination of wastewater, surface water, and groundwater, the widespread industrial and domestic use of increasingly toxic and chemically persistent substances, and the growing demands on water quality, the refinement of conventional water treatment methods is becoming of considerable importance [1]. A substantial proportion of contemporary pollutants consists of organic compounds. According to leading experts in the field of water treatment, microorganisms are capable of degrading any novel substances, including synthetically produced high-molecular-weight compounds [2]. The selection of such microorganisms and the provision of favorable conditions for their active metabolic functioning are facilitated by biological treatment methods [3-5].

1. General Characteristics of Biofiltration

In practice, biofiltration has gained considerable widespread adoption. Its high efficacy is attributed to microbial colonies which, together with their metabolic by-products, form stable microstructures. The stability of the existence and functioning of such artificial microbial formations (biofilms) is ensured by an assemblage of solid structural elements — particles of varying morphology and fibrous materials — to which the biofilms firmly adhere. Through the establishment and maintenance of favorable environmental conditions surrounding the biofilm, combined with the implementation of rational process technology, prolonged and productive operation of the corresponding treatment units can be achieved. Ensuring maximum performance from biofilters — despite the considerable accumulated operational experience — is realistically attainable only through the application of mathematical modeling methods. This necessarily requires that such models be supplied in full with reliable input data, the composition of which is determined by the underlying mathematical model [6, 7].

The conceptual model of biofiltration is founded upon two principal components — a structural compartment and an operational compartment — which formally describe the behavior of the substrate, the oxidizing agent (oxygen), and the microbial biomass at two

distinct levels. At the micro-level, consideration is given to such essential physical and biochemical processes as diffusion, interphase mass transfer, bio-oxidation, decomposition, biosynthesis, and inhibition. At the scale of the working layer, the dominant roles are played by convective mass transport, substrate utilization, endogenous respiration, biodeformations (biofilm detachment), and predation.

The stability and productivity of biofilter operation are ensured by the continuous supply of strictly controlled quantities of water, substrate, and oxidizing agent (in aerobic biofiltration). It is precisely the hydro-gas-dynamic compartment that reflects the characteristics of the movement and distribution of moisture — and, in the case of trickling biofiltration, gas — within the filter bed. The mobility of the aqueous and gaseous phases is sustained by the processes of filtration, moisture transfer, and infiltration, all of which occur within the porous (granular) layer.

The mathematical modeling of biofiltration of waters of various origins containing organic contamination pursues three principal objectives. The primary objective is the prediction of the operational state of the active medium, characterized by the concentration distributions of substrate $S(z)$, oxidizing agent $O(z)$, and biomass $B(z)$ within it. Of decisive importance for the assessment of biofilter performance and for informing decisions regarding the process adjustment is the outlet concentration of the substrate S_e .

On the basis of the analysis of S_e and $B(z)$ under diverse process conditions, values of $v_w, \Delta p, L$ (filter bed height), d_g (the equivalent diameter of the bed elements) are selected such that the purification quality is maximized — that is, S_e is lower while the quantity of removed contaminant is, conversely, higher. The processing of empirical data concerning the actual state of the filter bed and the performance of the biofilter, in conjunction with the established relationships between biochemical and hydraulic characteristics, enables the derivation of reliable values for the model coefficients.

A biofilter operating under well-established process conditions is capable of functioning productively over an extended period of time. Consequently, if the relatively brief initial start-up period is excluded from consideration, it is justified in theoretical investigations to rely upon steady-state biofiltration models. This, in turn, renders it possible, firstly, to employ analytical solution methods and, secondly, to develop engineering design methodologies.

Of considerable importance in the development of rational biofiltration technology is the high sensitivity of the microbial community (microbiocenosis) to external environmental conditions. Under unfavorable process conditions, physiological processes decelerate to the point of complete cessation, followed by the die-off of the constituent microorganisms. Conversely, under particularly favorable conditions, excessive growth of the microbial community may occur, which adversely affects the hydraulic and physical state of the operating medium and, ultimately, the performance of the biofilter. It is therefore necessary to select a technology that enables prolonged high-capacity operation of the biofilter, with the consequent result that the unit cost of water purified by means of biofiltration is minimized.

In accordance with practical requirements, the nature of the organic contamination, and the design of the biofilter, various types of biofiltration are employed — including submerged and trickling, as well as aerobic and anaerobic variants [8, 9]. In particular cases — such as elevated initial concentrations of pollutants or more stringent water quality requirements — it becomes necessary to implement more complex biofiltration installations, namely a series of sequentially connected biofilters, bioconveyor systems, or combined structures.

As a result of the transformation of the organic substrate, products are generated that serve, firstly, as the basis for biosynthesis and, secondly, release energy for the maintenance of the vital functions of the microorganisms. The corresponding degradation of the contaminant is initiated by a specific substance — oxygen under aerobic conditions. In practice, the technological process of biological water treatment is governed not only by the substrate concentration but also by the concentration of the oxidizing agent. It is precisely the deficiency of the latter that frequently constitutes the primary cause of the low productivity of biofiltration installations. Increasing the initial concentration of the oxidizing agent is practiced, depending on the volume of contaminated water and the requirements imposed on the filtrate, by means of two approaches. The dissolved oxygen content is elevated through either forced aeration — as applied in wastewater treatment — or natural aeration, as employed in iron removal processes. This, in turn, may result in a substantial increase in the overall cost of water treatment. In recent years, another variant of biofiltration — namely trickling filtration — has come into widespread use [10 - 12]. By supplying contaminated water at a low flow rate, a portion of the pore space remains unoccupied by water. Within this void fraction, intensive gas (air) movement is established. In this manner, it becomes possible to appreciably enhance the interphase gas exchange throughout the entire working layer (the filter bed). As a consequence, active removal of excess organic matter also takes place in its lower section. Here too, in order to minimize the deficiency of the oxidizing agent, a practical challenge arises concerning the organization of enhanced gas exchange — both transient and internal. As a rule, achieving this objective in practice necessitates recourse to mechanical ventilation, whereby a pressure differential is established across the inlet and outlet surfaces of the filter bed. It is important to note that the intensification of gas exchange may in some cases give rise to a non-linear filtration regime as a result of significant inertial forces and turbulent flow conditions [13, 14].

2. Hydraulic aspects of trickling biofiltration

Thus, in the theoretical investigation of the hydraulic aspects of trickling biofiltration, two principal challenges have emerged: firstly, the assessment of the hydraulic and physical state of a partially moisture-saturated porous (granular) layer at a specified flow rate of contaminated water v_w ; and secondly, the analysis of non-linear gas filtration through such a layer under the corresponding degrees of moisture saturation of the working medium (moisture content θ) and applied pressure differential (Δp).

Two characteristic scenarios have been examined in detail. In the first case, the pressure above the filter bed was varied over a wide range — from vacuum to tens of thousands of Pa . In the second scenario, the pressure below the filter bed was varied in an analogous manner. A methodology is proposed for accounting separately for the influence of capillary forces, gravitational forces, and the aforementioned pressure differential on the transit gas flow. The primary calculations focused on the characteristic values of the reduced pressures at the inlet (h_{co}) and outlet (h_{cl}) surfaces of the filter bed, as well as the rate of moisture transfer caused by the aforementioned forces.

As an illustrative example, selected results of an analytical investigation of the concurrent movement of water and gas through the filter bed under mechanical ventilation are presented. It is initially assumed that water is supplied to the trickling biofilter at a low flow rate v_w (less than the hydraulic conductivity). Under these conditions, the pore space is only partially saturated with moisture, the degree of saturation being characterized by the

moisture content θ and the uniquely associated water film thickness l_w . It should be noted here that the filtration processes under consideration, in the broad sense of the term, are of an essentially non-linear character, which precludes the application of conventional formal simplification techniques such as linearization, averaging, etc. The sought-after characteristics — moisture content, pressure, and water film thickness— are proposed to be determined in stages.

In the first stage, the characteristic constants are determined — namely, the suction pressures at the upper ($\bar{h}_{c0}$) and lower ($\bar{h}_{cL}$) boundaries of the filter bed, as well as the moisture flux component (v_{wc}) attributable to the combined action of two forces: capillary forces and gravity. In view of the free discharge of moisture from the porous medium, the constant $\bar{h}_{cL}$ is derived from the equation:

$$\bar{K}_w(\bar{h}_{cL}) = \bar{v}_w. \quad (1)$$

where $\bar{K}_w$ is the unsaturated hydraulic conductivity [15, 16]; the bars above the symbols indicate that the corresponding quantity is dimensionless. The remaining two constants are obtained as the solution of the following system of equations:

$$\int_{\bar{h}_{cL}}^{\bar{h}_{c0}} \frac{\bar{K}_w(\zeta) d\zeta}{\bar{K}_w(\zeta) - \bar{v}_{wc}} = -1. \quad (2)$$

$$\bar{v}_g \int_{\bar{h}_{c0}}^{\bar{h}_{cL}} \frac{\bar{K}_w(\zeta) d\zeta}{[\bar{K}_w(\zeta) - \bar{v}_{wc}] \bar{K}_{pg}(\theta(\zeta))} + (\bar{v}_w - \bar{v}_{wc}) \int_{\bar{h}_{c0}}^{\bar{h}_{cL}} \frac{d\zeta}{\bar{K}_w(\zeta) - \bar{v}_{wc}} = 0, \quad (3)$$

where v_g is the gas rate.

In the second stage, the distribution functions of pressure $\bar{h}_{p0}(\bar{z})$, moisture content $\theta(\bar{z})$, and water film thickness $\bar{l}_w(\bar{z})$ along the height of the filter bed ($1 \geq \bar{z} \geq 0$) are determined sequentially. Of particular significance for subsequent biochemical calculations is the average water film thickness $\bar{l}_{w,av}$.

In the third stage, the relationship between the gas flow rate $\bar{v}_g$ and the external pressure $\bar{h}_{p0}$ (pressure differential) is established. For engineering calculations, $\bar{v}_g$ is preliminarily computed by recalculating $\bar{v}_w$. In view of the balanced consumption of substrate and oxygen for biomass synthesis — governed by the corresponding yield coefficients Y_{SB} and Y_{OB} — the following expression should be adopted:

$$\bar{v}_g = \frac{Y_{SB}^2}{Y_{OB}^2} \bar{v}_w, \quad (4)$$

and subsequently calculate $\bar{h}_{p0}$, which will ensure the required gas rate:

$$\bar{h}_{p0} = -(\bar{v}_w - \bar{v}_{wc}) \int_{\bar{h}_{c0}}^{\bar{h}_{cL}} \frac{d\zeta}{\bar{K}_w(\zeta) - \bar{v}_{wc}}. \quad (5)$$

The relationship between $\bar{v}_g$ and $\Delta \bar{p}$ is determined by solving the gas filtration equation

$$\bar{v}_g + \frac{\vartheta}{1 - n_0 + \vartheta} \bar{v}_g^2 = \bar{K}_{pg}(\theta) \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}}, \quad (6)$$

where the second term accounts for nonlinear effects (inertial forces, turbulent flow); $\vartheta = 0 \frac{.01 g \rho_w \rho_g d_g K_{p0}}{\mu_g^2}$; g is the acceleration due to gravity; ρ_w is the density of water; ρ_g is the density of gas; K_{pg} is the permeability of the wetted granular medium; μ_g is the dynamic viscosity of the gas; n_0 is the porosity of the clean bed.

3. Calculations and discussion of results

A thorough quantitative analysis of the principal hydraulic characteristics of trickling biofiltration has been carried out. The subject of the calculations encompassed pressure and moisture content profiles, as well as the relationship between the controlling pressure differential and the gas flow rate. Particular attention is warranted by the computational results presented in **Figures 1 and 2**. For subsequent biochemical calculations, reliable information regarding the moisture distribution within the filter bed is essential. However, its rigorous treatment considerably complicates the derivation of final results. As evidenced by Figure 1, it is justified in such calculations to operate with the average the value of the water film thickness $\bar{l}_{w,av}$. Indeed, as the pressure above the filter bed increases ($\bar{h}_{p0} > 0$), the calculated value of $\bar{l}_{w,av}$ varies only slightly.

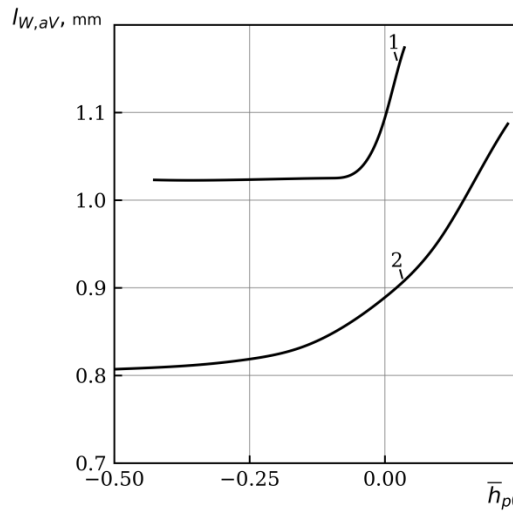


Figure 1. The dependence of the relative gas rate on the reduced pressure height above the bed
 1 – 3 – $\bar{v}_w = 0.005$; 4,5 – $\bar{v}_w = 0.01$; 6,7 – $\bar{v}_w = 0.03$; 8,9 – $\bar{v}_w = 0.05$; 1 - approximate using $\bar{l}_{w,av}$; 2,4,6,8 - linear filtration; 3,5,7,9 - nonlinear

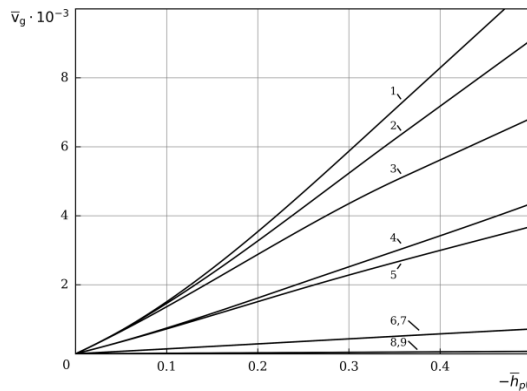


Figure 2. Dependence $\bar{l}_{w,av}(\bar{h}_{p0})$: 1 – $\bar{v}_w = 0.05$; 2 – $\bar{v}_w = 0.01$

In view of the potentially high gas flow rates encountered in heavily loaded biofilters, it is advisable to evaluate the significance of non-linear effects for gas dynamics — specifically those arising from inertial forces and flow turbulence. The exact formula for calculating $\bar{v}_g$, derived by taking into account the specified effects and the water-physical state of the bed as a result of solving equation (6), takes the following form:

$$\bar{v}_g = \sqrt{\frac{a_g^2}{4\vartheta^2 b_g^2} - \frac{\bar{h}_{p0}}{\vartheta b_g} - \frac{a_g}{2\vartheta b_g}}, \quad (7)$$

where

$$a_g(\bar{h}_{c0}, \bar{h}_{cL}, \bar{v}_{wc}) = \int_{\bar{h}_{c0}}^{\bar{h}_{cL}} \frac{\bar{K}_w(\zeta) d\zeta}{\bar{K}_{pg}(\theta(\zeta))[\bar{K}_w(\zeta) - \zeta]},$$

$$b_g(\bar{h}_{c0}, \bar{h}_{cL}, \bar{v}_{wc}) = \int_{\bar{h}_{c0}}^{\bar{h}_{cL}} \frac{\bar{K}_w(\zeta) d\zeta}{\bar{K}_{pg}(\theta(\zeta))[\bar{K}_w(\zeta) - \zeta + [1 - n_0 + \theta(\zeta)]]}.$$

In the case of linear filtration, the following formula follows from (7):

$$\bar{v}_g(\bar{h}_{c0}, \bar{h}_{cL}, \bar{v}_{wc}, \bar{h}_{p0}) = -\frac{\bar{h}_{p0}}{a_g(\bar{h}_{c0}, \bar{h}_{cL}, \bar{v}_{wc})}. \quad (8)$$

The calculated values of $\bar{v}_g$ under non-linear and linear filtration conditions using formulas (6) and (7) for different fixed values of $\bar{v}_w$ are presented in Figure 2. It has been established that non-linear effects become significant (curves 2 and 3, 4 and 5) only at comparatively low water flow rates ($\bar{v}_w = 0.005, 0.01$). The use of $l_{w,av}$ is justified in the determination of biochemical characteristics, however it may introduce appreciable errors in the calculation of $\bar{v}_g$ (curves 1 and 3).

Conclusions

Biofiltration is an effective and promising method for the biological treatment of water contaminated with organic pollutants. To fully realize its significant potential, it is necessary to make an rational choice of process and design parameters using mathematical modeling methods.

In the practice of trickle biofiltration with mechanical aeration of the filter bed, it is crucial to determine the flow rates of the contaminated water and the gas containing the oxidizing agent, as well as the pressure differential that is created at the boundaries of the bed and controls gas dynamics and biological oxidation.

References

1. R.P. Schwarzenbach, P.M. Gschwend, D.M. Imboden, *Environmental organic chemistry* (3rd ed.), Wiley (2017).
2. П.И. Гвоздяк, За принципом біоконвеєра. Біотехнологія охорони довкілля, Вісн. НАН України, №3, 29-36 (2003).
<http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/70340>.
3. B.E. Rittmann, P.L. McCarty, *Environmental biotechnology: principles and applications*, McGraw-Hill (2001).
4. K.N. Yogalakshmi et al. (eds.) *An innovative role of biofiltration in wastewater treatment plants (WWTPs)*, Elsevier (2022).

5. Л.А. Саблій, *Физико-химическая и биологическая очистка сточных вод с высокой концентрацией загрязняющих веществ*, Ровно, НУБГП (2013). ISBN 978-966-327-242-9
6. M. Henze, M., M.C.M. van Loosdrecht, G.A. Ekama, D. Brdjanovic (eds.), *Biological wastewater treatment: principles, modelling and design* (2nd ed.), IWA Publishing (2020).
7. В.Л. Поляков, Моделирование биофильтрации воды с ограниченным содержанием органического субстрата. Биореактор-фильтр, *Доп. НАН України*, № 7, 58-66 (2011) dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/38138
8. V.L. Poliakov, Mathematical and applied calculation of bioconveyer and anaerobic biofiltration, In Book: *Anaerobic Digestion-Biotechnology for Reactor Performance and Environmental Sustainability* (2023), DOI: <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen.11299>.USA
9. F.P. Zeevander, S. Villaverde, Combined anaerobic-aerobic treatment of ago dyes. A short review of bioreactor studies, *Water Res.*, 39, 1425-1440 (2005).
10. D. Hekmat, D. Vortmeyer, Modelling of biodegradation processes in trickle-bed bioreactors, *Chem. Eng. Sci.*, 49, 4327-4345 (1994).
11. А.Я. Олейник, О.В. Колпакова, Теоретическое обоснование очистки сточных вод на капельных фильтрах, *Доп. НАН України*, № 3, 120-126 (2012).
12. F. Seguret, Y. Racault, M. Sardin, Hydrodynamic behaviour of full scale trickling filters, *Water Res.*, 34, 1551-1558 (2000).
13. D.H. Anderson, A.V. Sapre, Trickle-bed reactor flow simulation, *AIChE J.*, 37(3), 377-382 (1991).
14. D. Janecki, A. Burghardt, G. Bartelmus, Influence of the porosity profile and sets of Ergun constants on the main hydrodynamic parameters in the trickle-bed reactors, *Chem. Eng. J.*, 237, 176-188 (2014).
15. Y. Mualem, A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media, *Water Resour. Res.*, 12, 513-522 (1976).
16. M.T. Van Genuchten, A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil. Sci. Soc. Am. J.*, 44, 892-898 (1980).

Течія в околі каверн різних форм та їх опір

Н.В. Розумнюк¹

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ, Україна

¹nrozymnyuk@gmail.com

Чисельне моделювання на основі нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса течії в'язкої нестисливої рідини біля плоскої поверхні з каверною застосовано для аналізу впливу геометрії каверни на структуру течії в ній, а також на додатковий опір обтічної поверхні, який генерує каверна. Розглядаються мілкі двомірні каверни при помірних числах Рейнольдса, в яких формується "відкритий" режим обтікання.

Ключові слова: течія в каверні, гідродинамічний опір, чисельне моделювання

Вступ

Обтікання заглиблень (каверн) різної форми та їх вплив на поведінку і характеристики потоку в їх околі є предметом вивчення на протязі вже досить довгого часу. Існує багато досліджень, за результатами яких запропоновано різні типи класифікації каверн в залежності від їх геометричних розмірів та типу потоку всередині. Каверни, в яких глибина h більша ширини вздовж потоку L , можна вважати глибокими, і мілкими, якщо ширина більша глибини. Переважна більшість досліджень розглядає мілкі каверни, оскільки такі каверни, по-перше, набагато частіше зустрічаються на практиці, і по-друге, збільшення відносної глибини каверни мало впливає на характеристики обтікання тіла зовнішнім потоком.

Для мілких каверн широко визнаним є поділ на відкриті, закриті і перехідні каверни [8]. При $L/h < 6 \div 8$ в каверні формується рециркуляційна течія, а між нею і зовнішнім потоком формується зсувний шар, який сходиться з передньої (лівої) кромки і досягає другої стінки каверни в районі правої кромки. Такий тип течії називають відкритим. При $L/h > 10 \div 15$ біля стінок каверни формуються дві незалежні циркуляційні зони (закрита каверна). Течія в каверні між цими двома типами вважається перехідною.

Важливим параметром, від якого залежить ступінь впливу каверни на обтікання поверхні з каверною є співвідношення характерних розмірів каверни і примежового шару. Каверни, розміри яких менші або порівняні з товщиною місцевого примежового шару, майже не впливають на параметри обтікання, тому практичний інтерес становлять заглиблення з набагато більшими відносними розмірами.

Для типізації режимів обтікання каверн широко використовується відношення ширини каверни до товщини втрати імпульсу примежового шару перед нею θ_0 . При $L/\theta_0 < 40 \div 50$, обтікання каверни зазвичай має стаціонарний характер. При збільшенні цього відношення виникають самопідтримуючі коливання як в каверні, так і в потоці за нею, з однією або кількома характерними частотами.

Причини виникнення та розвитку нестійкості потоку в околі різноманітних каверн вивчаються в багатьох як теоретичних, так і експериментальних роботах. Оскільки коливання, які виникають при цьому, є джерелом акустичного шуму та

значних навантажень на поверхні тіл з кавернами, більшість досліджень направлені на знаходження різних методів керування потоком з метою зменшення таких коливань, особливо для швидкісних дозвукових та надзвукових течій. Менше уваги приділяється вивченню додаткового опору, який утворюється внаслідок перерозподілу тиску на поверхні в присутності каверни, та способам його зменшення. В [1,2] розглянуто опір каверни при досить низьких числах Рейнольдса та ламінарному режимі потоку. Відмічено, що при режимі «відкритої каверни» додатковий опір тиску є несуттєвим, в [2] навіть одержано певну тенденцію до зниження загального опору поверхні з каверною в порівнянні з аналогічною гладкою поверхнею.

При експериментальному та чисельному дослідженні каверн при турбулентному режимі і числі Рейнольдса $3.18 \cdot 10^5$ по глибині в [3] для прямокутних каверн одержано коефіцієнт опору ≈ 0.02 . Згідно з графіком коефіцієнту опору поверхні з каверною в залежності від співвідношення L/h , наведеному в книзі [4] за результатами вимірювань, коефіцієнт опору каверн при $0.55 < L/h < 1.25$ приблизно дорівнює 0.015. При зменшенні відносної глибини він досить швидко збільшується, досягаючи максимальної величини ~ 0.05 при $L/h \approx 2$, і знову зменшується до 0.025 при $L/h \approx 4$.

В [5] було виміряно осереднені в часі розподіли швидкості та тиску в прямокутних кавернах з різною формою нижньої стінки при обтіканні їх турбулентним потоком при числі Рейнольдса по глибині $Re_h = 40000$. Для прямої вертикальної форми навітряної (нижньої за течією) стінки її коефіцієнт опору дорівнював 0.037, при цьому складові опору лівої стінки і дна каверни були суттєво меншими.

В цих роботах [1,2,3,5] течія всередині «відкритої» каверни складалася з одного вихра, який займає практично весь її об'єм. У верхній частині каверни утворюється зсувний шар, який падає на праву кромку і викликає локальне підвищення тиску на цій стінці, його величина зростає при збільшенні числа Рейнольдса. Саме ця ділянка дає найбільший внесок в збільшення загального опору при такій структурі потоку в каверні, що є типовою для «відкритих каверн».

В дослідженнях, в яких було можливо відстежувати не тільки осереднений потік, але і його нестационарну поведінку з достатньою роздільною здатністю [6-8], миттєві величини тиску на стінках, отже, опору каверни, коливаються, а амплітуди зростають зі зростанням числа Рейнольдса. При цьому миттєва величина опору може навіть змінювати знак (наприклад, в [7]). Коливання можуть мати декілька характерних частот, які пов'язують як з нестійкістю зсувного шару і його взаємодією з нижньою стінкою каверни, так і з нестационарною поведінкою великомасштабних вихрових структур всередині каверни. При цьому амплітуди коливань, викликані взаємодією цих структур, можуть перевищувати амплітуди внаслідок нестійкості зсувного шару, а частоти значно нижчі [6,7,9]. В різні моменти періоду низькочастотних коливань форма і розташування цих зон дещо змінюються.

Масштаб цих вихрових структур значною мірою визначається глибиною каверни, якщо вона класифікується як мілка ($L/h > 1$). При збільшенні відносної ширини більш інтенсивна вихрова структура залишається поблизу навітряної стінки, в решті каверни швидкість руху є меншою. На осереднених розподілах найкраще видно цей вихор, який набуває сплюснутої по вертикалі і розтягнутої вздовж потоку форми навіть при досить великих величинах відношення L/h [7, 10-13]. В той же час, миттєві картини відображають існування і рух великої кількості менших вихрових утворень не тільки

в зсувному шарі в верхній частині каверни, але і всередині каверни. При сильно нестаціонарному режимі течії можуть спостерігатися викиди рідини з каверни не тільки біля вихідної стінки, але й значно ближче до її початку.

При нестаціонарній поведінці течії спостерігаються значні коливання загального опору каверни, які значною мірою визначаються розподілом тиску на її стінках. В свою чергу, тиск на стінках каверни залежить від нестаціонарних параметрів потоку, основними генераторами якого є різномасштабні вихрові структури. Метою даної роботи є простежити вплив геометрії стінок каверни на структуру вихрового руху в ній, і відповідні зміни інтегральних силових характеристик при таких розмірах каверни та параметрах натікаючого потоку, коли двовірна прямокутна каверна обтікається в «відкритому» режимі.

1. Постановка задачі та її чисельна реалізація

Отже, на основі чисельного моделювання вивчаються параметри потоку та силові характеристики плоскої поверхні з прямокутною каверною зі співвідношенням ширини до глибини $L/h=1\div 2.5$, а також різними формами її бокових стінок. Розглядається повітря як нестисливе середовище при швидкостях потоку від 1м/с до 5 м/с. Розрахункова область є прямокутником з твердою гладкою поверхнею на нижній границі, в якій на певній відстані від вхідної границі з рівномірним потоком розміщено заглиблення. На верхній границі області задано рухому стінку без прилипання при відповідній швидкості, на вихідній границі задано безградієнтний потік.

Глибина каверни є незмінною, $d=0.02\text{м}$, ширина варіювалась від 0.02 до 0.05м. Початок каверни знаходиться на відстані 0.335м від початку пластини, який співпадає із вхідною границею розрахункової області. Довжина пластини за траншеєю до вихідної границі дорівнює 0.5м.

Для чисельного моделювання використано пакет FLUENT з вибором відповідних опцій для задавання параметрів середовища, режиму потоку, чисельних схем.

Процедура виконання моделювання була наступною. Як початкова умова задавався потік з однаковою швидкістю U_∞ в усій області. Для прискорення збіжності та достатньої стійкості на першому етапі розрахунку було задано стаціонарний режим моделювання з використанням псевдо-нестационарного зв'язаного розв'язувача (pseudo-transient, coupled solver), схеми 2го порядку або QUICK для просторової дискретизації конвективних членів рівнянь, PRESTO! для інтерполяції тиску. Після досягнення відносно сталого стану потоку, ці дані використовувалися як початкові умови для нестаціонарного режиму розрахунку з заданим кроком в часі; використовувався безітераційний метод просування у часі (NITA) з 2м порядком точності і схемою дробових кроків (FSM) для розв'язання системи рівнянь. Розрахунок продовжувався до досягнення або стаціонарного стану потоку та інтегральних параметрів обтічної поверхні, або до виходу на режим регулярних коливань впродовж достатнього проміжку часу для отримання сталих осереднених розподілів змінних задач.

Основна розрахункова сітка складається з приблизно 230 тис. прямокутних комірок, всередині траншеї 30 тис.комірок, пристінний крок біля її стінок, а також біля обтічної поверхні дорівнює 0.1мм. Для верифікації одержуваних результатів було

виконано моделювання при $U=5\text{ м/с}$ на сітці з подвоєними кількостями вузлів на границях. Результати, одержані на цих сітках, практично збігаються, отже, можна вважати, що основна сітка є достатньо точною. Спосіб просторової дискретизації (2го порядку або QUICK) на таких сітках при використаній величині кроку у часі $\sim 2 \cdot 10^{-5}\text{ с}$ практично не впливає на одержувані параметри потоку в районі каверни; незначно відрізняється місцевий рівень тиску – за схемою 2го порядку він рівномірно вищий по поверхні пластини на $\sim 0.05\text{ Па}$.

2. Структура течії в каверні та її околі

При швидкостях набігаючого ламінарного потоку $1 \div 5\text{ м/с}$ в районі траншеї формується примежовий шар, товщина якого добре відповідає товщині примежового шару за формулою $\delta = 5x/\text{Re}_x^{1/2}$ при відповідному місцевому числі Рейнольдса ($\text{Re}_x = 2.2 \cdot 10^4 \div 1.1 \cdot 10^5$). При менших числах з цього діапазону, а також довжині каверни $L < 0.04\text{ м}$ ($L/h < 2$), одержано стаціонарні розв'язки, що відповідає численним даним про обтікання «відкритих» каверн при аналогічних співвідношеннях геометричних параметрів каверни та місцевого примежового шару (наприклад, співвідношення ширини каверни та товщини втрати імпульсу < 50 в [6,14]).

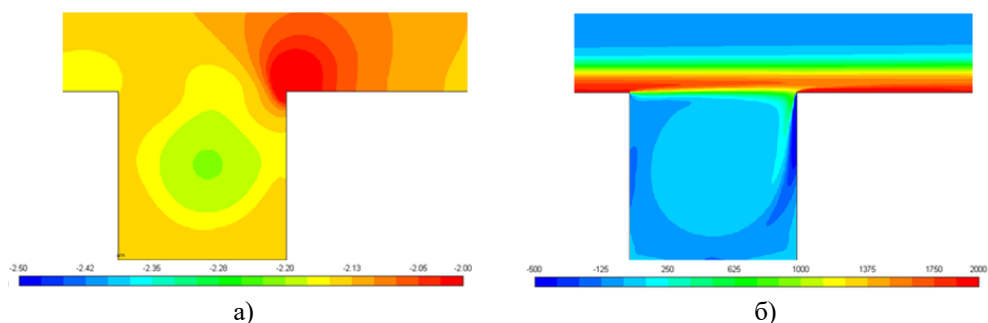


Рис. 1. Розподіли а) тиску та б) завихреності в квадратній каверні.

На Рис.1 показано розподіли тиску та завихреності при $L/h=1$ ($L/\theta_0 \approx 27$) при швидкості потоку 5 м/с ($L/\theta_0 \approx 27$). На ширині каверни між її кромками утворюється тонкий зсувний шар, який натікає на нижню стінку і викликає локальне підвищення тиску навколо кутової точки. При $L/h=1$ весь об'єм зайнятий однією рециркуляційною зоною з центром майже посередині ширини. Зі збільшенням ширини L ця зона зберігає свій діаметр і розташування біля правої стінки, а в решті каверни спостерігається дуже сповільнений рух. При $L/h=2$ всередині каверни утворюються дві великі рециркуляційні області, за розмірами співставні з глибиною (Рис.2а). Більш інтенсивний рух спостерігається біля вихідної стінки, в передній частині каверни напрям обертання протилежний, швидкість в кілька разів менша [15].

Зі зростанням числа Рейнольдса, а також L/θ_0 при збільшенні ширини каверни, зсувний шар у верхній частині каверни втрачає стійкість на її ширині, виникають автоколивання, що мають спочатку регулярний характер з однією домінуючою частотою, яка простежується і всередині каверни, і в примежовому шарі нижче за течією. Ця частота пов'язана з утворенням і переміщенням мілкіших вихрів у зсувному

шарі, та їх взаємодією з навітряною стінкою. Внаслідок цього течія біля навітряної кромки періодично міняє напрямок і в каверну потрапляють згустки завихреної рідини, добре простежувані на фоні великої рециркуляційної зони на миттєвих розподілах завихреності на Рис.2а.

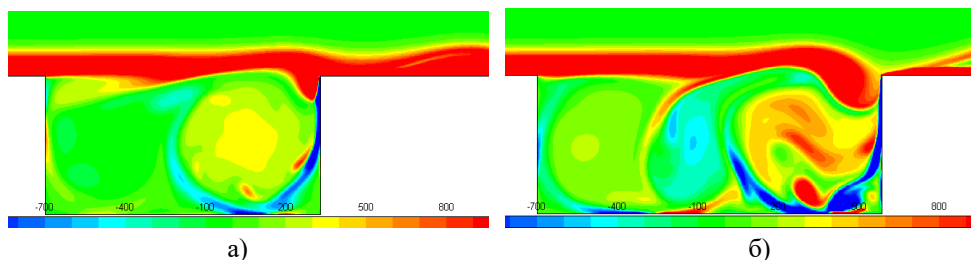


Рис. 2. Миттєві розподіли завихреності в кавернах при а) $L/h=2$, б) $L/h=2.5$

Зі збільшенням швидкості основного потоку або довжини L амплітуди коливань зростають, інтенсивність великих вихрів в каверні посилюється, їх форма та положення починають змінюватись. Міlkіші вихри, які потрапляють в каверну зі зсувного шару, додатково хаотизують течію, починає помітно коливатись весь об'єм каверни. При цьому осереднені розподіли мало відрізняються за структурою потоку від стаціонарних розподілів при нижчих числах Рейнольдса – два основних вихри всередині траншеї, зсувний шар між її кромками.

При подальшому збільшенні ширини каверни відбувається перебудова течії в каверні - менш інтенсивний вихор біля підвітряної стінки відтискається до центру каверни, а тонка область над ним, в якій узгоджувався напрямок обертання в цьому вихрі з протилежним напрямком течії в основному потоці, розширюється і посилюється, формуючи ще один великий вихор. При $L/h=2.5$ можна бачити вже три вихри по ширині каверни (Рис.2б). При цьому вихор біля підвітряної стінки обертається в тому ж напрямку, як і інтенсивний вихор біля навітряної стінки – за годинниковою стрілкою. Тобто, у його верхній частині рідина має однаковий напрямок руху з зовнішнім потоком, а локальний градієнт швидкості зменшується в порівнянні з дво-вихровою структурою течії у вузьких кавернах. В результаті загальмовується розвиток нестійкості в зсувному шарі, і відповідно амплітуди коливань течії у всій каверні дещо зменшуються в порівнянні з випадком $L/h=2$.

При зміні форми (заокругленні) навітряної правої стінки (Рис.3а) збільшується інтенсивність відриву на загостреній кромці при контакті зі зсувним шаром. Утворені цим відривом малі вихри, які переносяться великим вихром біля правої стінки до середини каверни, теж мають більшу інтенсивність і більший вплив на зону загальмованого руху в лівій частині каверни.

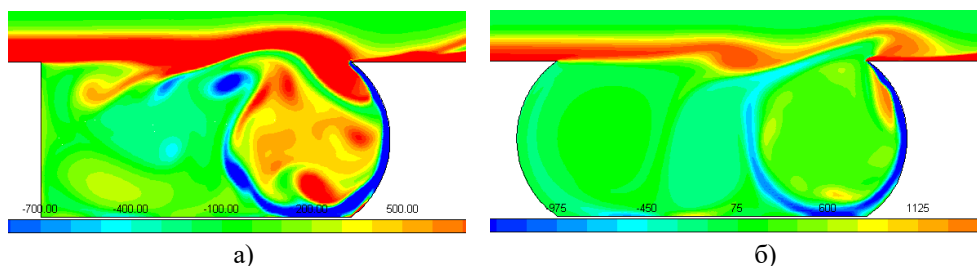


Рис. 3. Миттєві розподіли завихреності в кавернах з $L/h=2$ при заокругленні а) навітряної та б) обох стінок

Зі збільшенням ширини каверни і збільшенням кривизни навітряної стінки цей ефект посилюється. Накопичення і взаємодія цих малих структурних елементів течії всередині каверни підвищує амплітуди і нерегулярність коливань всього потоку в районі каверни. При $L/h=2$ зона повільного циркуляційного руху в лівій частині каверни розпадається на декілька менших з різним напрямком обертання. В спектрі розподілів енергії коливань по частотам замість добре виражених дискретних піків з'являються більш широкі діапазони підвищених значень. При цьому максимуми на нижчих частотах, які пов'язані з коливаннями течії у всьому об'ємі каверни, починають переважати максимуми на частотах зсувного шару. Таким чином, при такій формі навітряної стінки нестійкість течії значно підсилюється.

Додаткове заокруглення підвітряної лівої стінки має протилежний вплив. Відносна ширина каверни посередині глибини наближається до $L/h=2.5$ у випадку прямокутних стінок. Аналогічно в цьому випадку також формується третій вихор біля лівої стінки з обертанням за годинниковою стрілкою (Рис.3б), і коливання потоку зменшуються.

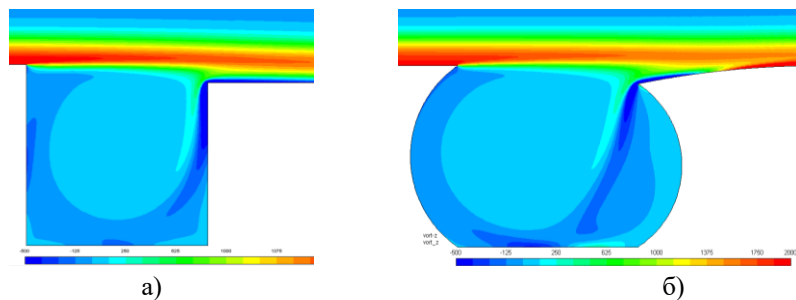


Рис. 4. Розподіли завихреності в кавернах зі зниженою навітряною стінкою

Зменшення висоти правої стінки і рівня обтічної поверхні за каверною на $0.1h$ при стаціонарному режимі обтікання практично не впливає на структуру потоку в каверні. Як можна бачити по розподілу завихреності на Рис.4, зсувний шар дещо зміщується вниз при підході до навітряної стінки, але проходить вище кромки каверни. При нестационарному режимі амплітуди коливань є достатніми, щоб зачіпати цю кромку, і дестабілізувати течію всередині каверни. При зміні форм стінок спостерігаються такі ж тенденції, як і для стінок однакової висоти – додаткове розхитування при закругленій навітряній стінці, і стабілізація течії при закругленій

підвітряній, з утворенням більш стійкої системи з трьох крупних вихрів і домінуючій частоті зсувного шару.

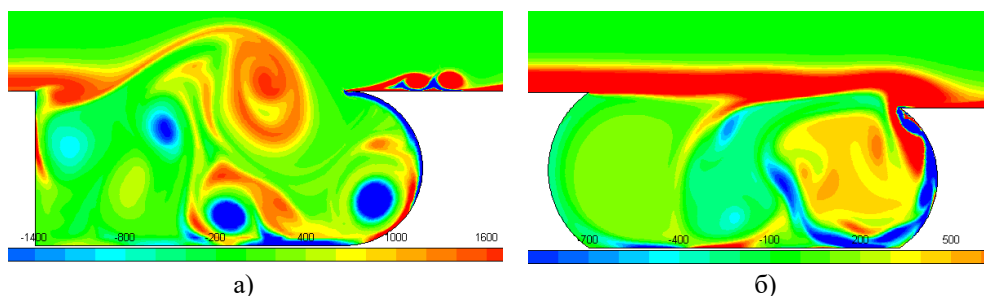


Рис. 4. Розподіли завихреності в кавернах зі зниженою навітряною стінкою при нестационарному режимі потоку

Зі збільшенням відносної ширини каверни потік хаотизується, вихровий рух в різні моменти часу відрізняються не тільки наявністю і розподілом мілких вихрових згустків на фоні великих вихрів, але і ці великі вихри можуть втрачати простежувані форми та розміри (Рис.5). На цьому фоні відносний вплив форм стінок на параметри нестационарності зменшується.

3. Опір каверни в залежності від її геометрії

Загальний опір траншеї складається з двох складових – опір тертя та опір форми (тиску).

Перша складова виникає через силу тертя на дні та стінках (при непрямокутній формі) каверни. У «відкритих» кавернах рух всередині каверни є дуже уповільненим, і градієнти швидкості, які визначають силу тертя на цих поверхнях, малі за величиною.

Друга складова опору визначається сумою інтегралів тиску на стінках з урахуванням напрямку нормалей до них. При стаціонарному режимі обтікання тиск на стінках майже однаковий, за виключенням верхньої частини правої стінки, де тиск вищий через взаємодію з натікаючим зсувним шаром. Тому на більшій частині висоти стінок величини інтегралів тиску компенсують одна одну, а визначає сумарний опір тиску коротка ділянка біля навітряної кромки. Відповідно величина коефіцієнту опору C_d відносно ширини досліджуваних каверн не перевищує 0.002.

З розвитком збурень в примежовому шарі осереднена величина опору дещо зростає (до 0.003 при $L/h=2.5$), в той час як миттєві значення в різні моменти часу можуть на порядок перевищувати середнє значення.

Зниження навітряної стінки і рівня обтічної поверхні за каверною, з одного боку, прибирає зону підвищеного тиску на навітряній стінці, де на неї натікає зсувний шар. Оскільки зсувний шар проходить вище навітряної кромки каверни, на обтічній поверхні за каверною утворюється зона відриву потоку з від'ємним тертям, а тиск у верхній частині навітряної стінки знижується. Але, з іншого боку, величина інтегралу тиску по короткій навітряній стінці, яка має від'ємний знак через напрям нормалі, зменшується, відповідно збільшується сумарний опір. Для квадратної каверни

коефіцієнт опору $C_d = 0.001$ а при нижчій навітряній стінці $C_d = 0.003$, тобто, така ж величина, як і при $L/h = 2.5$ зі стінками однакової висоти.

Відновлення висоти навітряної стінки шляхом додавання ділянки плавного спряження з обтічною поверхнею за каверною (Рис.4б) робить опір власне каверни практично нульовим, і навіть від'ємним, якщо брати до уваги тільки стінки каверни. Але на ділянці спряження з'являється додаткова складова сили опору, оскільки нормаль до її поверхні не перпендикулярна до напрямку потоку, і туди переміщується зона підвищеного тиску в місці приєднання зсувного шару. В той же час, її вклад менший, ніж для подібної зони на вертикальній стінці, за рахунок суттєвої зміни кута нормалі до поверхні відносно напрямку потоку.

З настанням такого режиму течії в каверні, коли коливання відбуваються в усьому її об'ємі, і миттєві картини суттєво відрізняються від осереднених розподілів, середня величина опору каверни також зростає в кілька разів. Для каверн зі зниженою навітряною стінкою і $L/h \geq 2$ коефіцієнт опору $C_d \sim 0.012 \div 0.013$. Залежність від форми стінок простежується, але не є суттєвою, відповідно до однаково посиленої нестационарності потоку.

Висновки

При обтіканні мілких двомірних каверн у «відкритому» режимі їх опір залежить від ступеню розвитку нестійкості потоку всередині і навколо каверни. При стаціонарному обтіканні всередині каверни утворюються крупномасштабні вихрові структури, розмір, інтенсивність та розташування яких визначається глибиною і шириною каверни. Досліджені варіації форми стінок в таких випадках хоча і впливають на загальний опір, але сама його величина є малою, коефіцієнт складає $C_d \sim 0.001 \div 0.002$.

Зі збільшенням відносної ширини каверни і появою нестійкості зсувного шару у верхній частині каверни, середній опір може зростати до $C_d \sim 0.003$, але миттєві його величини досягають на порядок більших значень. При такому режимі течії форма стінок може посилювати чи послаблювати цю нестійкість через вплив на структуру та інтенсивність вихрового руху в каверні.

При формуванні суттєво нестационарної течії, при якій у всьому об'ємі каверни миттєві картини потоку якісно відрізняються розподілом та інтенсивністю різномасштабних вихорів, середні коефіцієнти опору зростають до $C_d \sim 0.013$, що наближається до величин, одержуваним для розвинутих турбулентних течій. Вплив досліджених форм стінок не є достатнім, щоб помітно вплинути на розвиток нестійкості.

1. M. Gharib, A. Roshko, The Effect of Flow Oscillations on Cavity Drag, *J. Fluid Mech*, 177, 501–530 (1987).
2. T. B.Gatski, C. E.Grosch, Embedded cavity drag in steady and unsteady flows, *AIAA paper 84-0436* (1984).
3. N.N.Bayomi, A.M. Abdel Dayem, Computational and experimental investigation of open cavities flow, *Proceedings of the 11-th ASAT Conference* (2005).
4. Я. И.Войткунский, *Сопротивление движению судов*, Судостроение (1988).

5. Y.Y. Peaya, L.P. Chuaa, W.L. Siau. *Effect of trailing edge ramp on cavity flow structures and pressure drag*, International Journal of Heat and Fluid Flow, 45, 53–71 (2014).
6. J.-C.Lin, D. Rockwell, Organized oscillations of initially turbulent flow past a cavity, *AIAA Journal*, 39, № 6, 1139 – 1151 (2001). S.M. Grace, W.G. Dewar, D.E. Wroblewski, Experimental investigation of the flow characteristics within a shallow wall cavity for both laminar and turbulent boundary layers, *Experiments in Fluids*, 36, 791-804 (2004).
7. M.A.Martinez, G.M. Di Cicca, M. Iovieno, M. Onorato, Control of Cavity Flow Oscillations by High Frequency Forcing, *Journal of Fluids Engineering*, 134 (2012).
8. E.B.Plentovich, M.B. Tracy, Cavity Unsteady-Pressure Measurements at Subsonic and Transonic Speeds, *NASA Tech. Pap.*, №3669, 1–73 (1996)
9. K.C. Chang *et al.* Analysis of the flow and mass transfer processes for the incompressible flow past an open cavity with a laminar and a fully turbulent incoming boundary layer, *J. Fluid Mech.*, 561, 113-145 (2006).
10. P.Manovski, M. Giacobello, J. Soria, Particle image velocimetry measurements over an aerodynamically open two-dimensional cavity. In: *16th Australasian Fluid Mechanics Conference. Crown Plaza, Gold Coast*, 677–683 (2007).
11. N.Murray, R. Raspet, L. Ukeiley, Contributions of turbulence to subsonic cavity flow wall pressures, *Physics of fluids*, 23, 015104 (2011).
12. P.R. Bailey, A.Abbas, D. Tordella, Pressure and kinetic energy transport across the cavity mouth in resonating cavities, *Phys. Rev. E.*, 87, 013013 (2013).
13. S. Aziz, A.-H. Said, Numerical Investigation of Flow and Heat Transfer over a Shallow Cavity: Effect of Cavity Height Ratio, *Fluids*, 6, 244 (2021).
14. Y.Sun, A. Nair, K. Taira, L. Cattafesta, G.Brès, L. Ukeiley, Numerical Simulations of Subsonic and Transonic Open-Cavity Flows, *AIAA AVIATION 2014 -7th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*, 10.2514/6.2014-3092 (2014).
15. Г.О. Воропаєв, Н. В. Розумнюк, О.О. Баскова, Особливості структури течії у каналі із прямокутною траншеєю, *Вісник Національного технічного університету «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях*, 1, 45-51 (2023)

Про методи розрахунку задачі руху крилового профілю поблизу екрану

Я. Загуменний¹, Д. Кушнір

Інститут гідромеханіки Національної академії наук України, Київ, Україна

¹ zagumennyi@gmail.com

Розглядається нестационарна задача обтікання симетричного крилового профілю НАСА0012 поблизу екрануючої поверхні потоком в'язкої нестисливої рідини при різних числах Рейнольдса і кутах атаки. Для розв'язання поставленої задачі застосовується нестационарна система рівнянь Нав'є-Стокса, чисельний розв'язок якої будується методом скінченного об'єму на структурованих розрахункових сітках зі згущенням вузлів у напрямку поверхні профілю. На основі проведеної серії тестових розрахунків з використанням різних розрахункових сіток і методів розрахунку визначено найбільш оптимальні та достовірні підходи до чисельного розв'язання розгляданого типу задач. Продемонстровано картини обтікання профілю при різних кутах атаки та числах Рейнольдса на значній відстані профілю від екрану, проаналізовано криві залежності інтегральних характеристик від часу та проведено валідацію отриманих чисельних результатів з експериментальними та теоретичними результатами інших авторів. Отримані результати використано в якості базових даних для подальшого дослідження більш складної задачі обтікання крилового профілю з урахуванням екранного ефекту.

Ключові слова: в'язка нестислива рідина, криловий профіль, кут атаки, екранний ефект, відрив потоку, примежовий шар, вихровий слід, пряме чисельне моделювання.

Вступ

Актуальність теми руху крилового профілю поблизу екрану (водна поверхня) зумовлена потребою в розробці безпілотних апаратів військового та цивільного призначення. Рух крилового профілю поблизу екрануючої поверхні дозволяє суттєво підвищити його аеродинамічну якість, але при цьому виникають додаткові проблеми зі стабільністю та керованістю польоту, спричинені мінливим впливом погодних умов, схвильованості екрануючої (водної) поверхні, збуреності потоку, пружності та рухомості елементів конструкції тощо. Це пояснює труднощі створення адекватних експериментальних і теоретичних моделей для дослідження аеродинаміки крила при його русі поблизу екрану, що дозволяють враховувати різні фактори зовнішнього впливу на аеродинамічні характеристики літального апарату [1].

Починаючи з другої половини 1960-х рр. в Інституті гідромеханіки НАН України активно проводилися експериментальні і теоретичні дослідження з аерогідродинаміки крила поблизу поверхні розділу вода-повітря [2] і розроблялися аеродинамічні схеми руху крил та моделей екранопланів поблизу плоского і хвильового екрану [3], а також вивчалися гідродинамічні аспекти, пов'язані з проблемою зльоту та посадки екранопланів [4]. Отримані результати зберігають свою актуальність, оскільки за понад піввікову історію розвитку галузі оптимальна аерогідродинамічна схема екраноплана досі не знайдена.

Методи чисельного дослідження доповнюють експериментальні підходи, дозволяючи враховувати вплив різних зовнішніх факторів на аеродинамічні характеристики тіл при їх русі поблизу екрану, проте висувають ряд питань до точності обчислень, роздільної здатності сітки, задання початкових і граничних умов, вибору методів моделювання і алгоритмів розрахунку, а також оптимізації обчислень і валідації отриманих результатів. Метою даної роботи є побудова математичної моделі обтікання тіла поблизу екрану, вибір і налаштування методів чисельного розв'язання поставленої задачі, а також перевірка достовірності отримуваних чисельних результатів.

1. Постановка задачі і метод розв'язання

Для розв'язання розглядуваної задачі обтікання тіла вибраної форми поблизу екрану застосовується нестационарна система рівнянь Нав'є-Стокса для в'язкого нестисливого середовища:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U \cdot \nabla)U = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta U, \quad \nabla U = 0, \quad (1)$$

де $U = (U, V, W)$, p , ρ , ν – вектор швидкості, тиск, густина, коефіцієнт кінематичної в'язкості рідини, відповідно.

На великій відстані від обтічного тіла задаються граничні умови незбуреного набігаючого потоку, безпосередньо на самій поверхні обтічного тіла – умови прилипання, а на поверхні екрану – умови рухомої стінки:

$$U|_{x,y \rightarrow +\infty} = (U_0, 0, 0), \quad U|_{profile} = (0, 0, 0), \quad U|_{ground} = (U_0, 0, 0). \quad (2)$$

Схему поставленої задачі показано на Рис. 1 із зазначенням основних досліджуваних розмірних параметрів. У даній роботі в якості тестової моделі тіла розглянуто симетричний криловий профіль NACA0012, обтікання якого досліджується для різних значень кута атаки і числа Рейнольдса, яке визначається співвідношенням: $Re = U_0 L / \nu$. Спочатку розглядається базовий частинний випадок задачі, коли профіль обтікається потоком в'язкої нестисливої рідини на значній відстані від екрану, що задається умовою: $h/L \gg 1$.

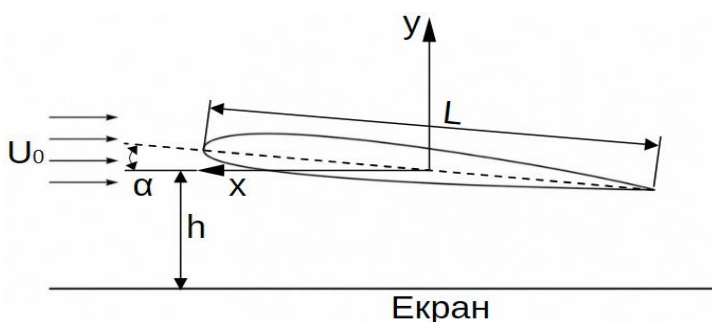


Рис. 1. Схема задачі обтікання крилового профілю: U_0 – швидкість набігаючого потоку (м/с), α – кут атаки (градус), L – хорда профілю (м), h – відстань до екрану (м).

Чисельний розв'язок поставленої задачі будується методом скінченного об'єму на структурованих розрахункових сітках з використанням відкритого розрахункового пакету OpenFOAM. Для апроксимації похідної за часом використано неявну однокрокову схему першого порядку Euler. Просторові градієнти обчислюються за

допомогою схеми Gauss linear corrected. Конвективні члени рівняння руху дискретизуються з використанням обмеженої лінійної схеми Gauss limitedLinearV першого порядку обмеження. Дифузійні доданки апроксимуються за допомогою схеми Gauss linear. Розв'язання результуючої системи лінійних алгебраїчних рівнянь здійснюється з використанням ітераційних методів. Для рівняння тиску застосовується багаторівневий солвер GAMG, а для рівнянь швидкості використовується ітераційний солвер smoothSolver. Зв'язок між полями тиску та швидкості реалізовано за допомогою алгоритму PIMPLE.

При побудові чисельної моделі обтікання крилового профілю першочерговим є вибір просторової постановки задачі. У даній роботі для дослідження обтікання профілю обрано двовимірну (2D) постановку. Використання 2D моделі дозволяє суттєво зменшити обчислювальні витрати за рахунок зниження кількості розрахункових комірок, що, у свою чергу, дає можливість ефективно виконувати параметричні дослідження: обтікання при різних кутах атаки і числах Рейнольдса. При цьому свідомо приймається ряд обмежень, зокрема ігнорування тривимірних ефектів, пов'язаних із кінцевістю розмаху крила, таких як індуктивний опір та перерозподіл (перемішування) потоку вздовж розмаху. Фізична обґрунтованість такого підходу визначається режимом течії. При відносно малих числах Рейнольдса ($Re < 10^4$) домінують в'язкі сили, які пригнічують розвиток дрібномасштабних тривимірних збурень, унаслідок чого структура течії є переважно ламінарною та плоскою [5]. Із зростанням числа Рейнольдса збільшується роль інерційних сил, що призводить до розвитку просторових турбулентних структур і посилення тривимірності потоку. У таких умовах двовимірна постановка поступово втрачає точність, оскільки не враховує механізми формування та еволюції тривимірних вихорів. Проте для помірних чисел Рейнольдса (до $Re \sim 2 \cdot 10^5$ [6]) використання 2D моделі є прийнятним для оцінки інтегральних аеродинамічних характеристик та аналізу картини обтікання, оскільки основний внесок у них формують великомасштабні вихрові структури, які можуть бути адекватно описані у плоскій моделі.

Наступним етапом є вибір підходу до моделювання турбулентності. Для задач у двовимірній постановці застосування DNS є доцільним, оскільки відсутність моделювання третього просторового напрямку дозволяє використовувати достатньо дрібну сітку в площині течії в зонах найбільших збурень потоку за прийнятних обчислювальних витрат. За малих чисел Рейнольдса ($Re < 10^4$), коли течія залишається ламінарною або характеризується дуже слабкими вихровими структурами, DNS може реалізовуватись навіть на відносно грубих сітках без втрати фізичної адекватності розв'язку. Для помірних перехідних чисел Рейнольдса (до $Re \sim 2 \cdot 10^5$), коли у потоці починають формуватись дрібномасштабні збурення, доцільним є DNS на більш мілких сітках або застосування підходів LES, які безпосередньо відтворюють великі турбулентні структури, а дрібномасштабні моделюють субсітковими моделями. При великих числах Рейнольдса ($Re > 2 \cdot 10^5$), коли збільшується дрібномасштабність вихорів і повний DNS стає практично недосяжним, більш раціональним є використання осереднених моделей типу URANS, які забезпечують прийнятний компроміс між точністю та вартістю обчислень, хоча і недостатньо точно описують нестационарні вихрові структури.

Для повноцінних тривимірних задач більш доцільним є застосуванням гібридних LES–RANS підходів (DES, DDES, IDDES) та вдосконалених підсіткових моделей,

зокрема WALE, які дозволяють поєднати переваги високоточного опису відривних зон методом LES із менш витратним RANS-описом примежового шару. Недоліком таких гібридних методів є чутливість до якості сітки та складність узгодження режимів перемикання між моделями, однак саме вони є перспективними інструментами для тривимірних задач обтікання коли DNS вимагає значних ресурсів. Оскільки чисельне моделювання проводиться у 2D постановці та при помірних перехідних числах Рейнольдса, використання DNS методу у даному випадку є найбільш доцільним.

Розрахункова модель має прямокутну область, в середині якої вирізаний криловий профіль NACA0012 під заданим кутом атаки. Геометричні розміри прямокутної області визначено в одиницях довжини хорди профілю. У третьому напрямку (вздовж осі z) область представлена однією коміркою, що відповідає двовимірній постановці задачі. На вхідній межі розрахункової області (inlet) задається рівномірний профіль швидкості потоку, а на вихідній (outlet) – умова вільного виходу. На верхній межі області застосовано умови ковзання (slip), а на нижній – умова рухомої стінки (moving wall). На поверхні крилового профілю задається умова прилипання (no-slip). Фронтальна та тилова площини розрахункової області (у напрямку осі z) мають граничні умови типу empty.

Розрахункова сітка будується на основі структурованого підходу з використанням прямокутних комірок. Близьче до профілю застосовується згущення сітки, яке виконується ступінчасто: на межі кожної зони згущення одна комірка ділиться на чотири менші. Усього реалізовано чотири рівні такого згущення, причому щільність згущення зростає у напрямку до поверхні профілю. У сліді за профілем підвищена щільність сітки зберігається на відстані трьох хорд позаду профілю. Це дозволяє адекватно описати еволюцію вихрових структур у відривній зоні та в сліді за профілем. Безпосередньо навколо поверхні профілю, також, сформовано два додаткових рівня подрібнення сітки, як показано на Рис. 2.

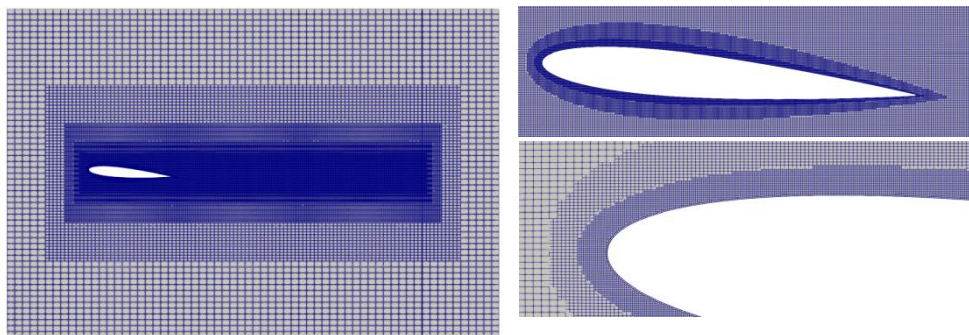


Рис. 2. Розрахункова сітка навколо крилового профілю NACA0012.

Чисельне моделювання виконується в нестационарній постановці. Тривалість розрахунку обрана таким чином, щоб потік тричі пройшов розрахункову область. Це необхідно для зменшення впливу початкових умов і стабілізацію інтегральних аеродинамічних характеристик, які з часом виходять на квазістационарні значення (див. Рис. 5).

В рамках дослідження процесів обтікання крилового профілю поблизу екрану чисельне моделювання доцільно розпочинати з базового випадку – обтікання профілю

без впливу екранного ефекту ($h/L \gg 1$). Такий підхід дозволяє отримати валідаційні дані, перевірити коректність постановки задачі, адекватність обраних чисельних методів і алгоритмів, а також оцінити вплив параметрів розрахункової сітки, граничних і початкових умов на результати моделювання без впливу екрану на структуру потоку та інтегральні характеристики профілю.

2. Перевірка достовірності

У рамках перевірки достовірності отриманих результатів на початковому етапі вирішено питання, пов'язані з якістю розрахункової сітки та розмірами області моделювання. Виконано просте дослідження збіжності результатів за якістю сітки (mesh convergence study) з метою визначення оптимального рівня її згущення, за якого подальше збільшення кількості елементів уже не впливає на результати.

Таблиця 1.

Дослідження збіжності сітки (NACA0012, $\alpha=5^\circ$, $Re=10^5$, без екрану)

Кількість комірок сітки	C_y	C_x	$\Delta C_y / C_y, \%$	$\Delta C_x / C_x, \%$
8 000	0.2435	0.0722	129	42
50 000	0.5580	0.0422	1	33
120 000	0.5525	0.0282	2	2
200 000	0.5648	0.0287	-	-

З наведеної таблиці видно, що при кількості комірок 50 000 подальше ущільнення сітки практично не впливає на значення коефіцієнта підйомної сили, тоді як коефіцієнт опору демонструє суттєвіші зміни. Починаючи з сітки у 120 000 комірок і при її подальшому згущенні, обидва коефіцієнти змінюються в межах 2%, що свідчить про досягнення збіжності сітки (mesh convergence). За результатами цього дослідження встановлено, що сітка з кількістю приблизно 120 тис. комірок є достатньою для забезпечення необхідної точності розрахунків і була прийнята для подальшого чисельного моделювання. Мінімальний розмір комірки, розташованої безпосередньо біля поверхні профілю, становив 0,000146 м. При довжині хорди профілю 0,1 м це відповідає приблизно: $0,1/0,000146 \approx 682$ коміркам, розташованим уздовж довжини хорди.

Отримані коефіцієнти опору, підйомної сили та аеродинамічного моменту порівнювались з експериментальними даними [7]. У згаданому джерелі досліджуване крило з профілем NACA0012 напряму впиралось у стінки з обох боків, таким чином виключаючи індуктивний опір з експерименту, що відповідає постановці поточної задачі. Додатково враховано теоретичні аеродинамічні характеристики профілю, отримані за допомогою XFOIL (2D-розрахунок) [8].

Як видно з наведених нижче графічних залежностей, у діапазоні кутів атаки профілю: $\alpha \leq 7.5^\circ$ спостерігається добра узгодженість розрахункових результатів з експериментальними даними [7], при цьому відносна похибка не перевищує 10%. З подальшим збільшенням кута атаки фіксується суттєве зростання розбіжностей, де похибка може досягати 15-30%. Така поведінка пояснюється інтенсифікацією відривних процесів у примезовому шарі та розвитком суттєво тривимірних вихрових структур (Рис. 4), що не враховується в рамках двовимірної постановки задачі та обмеженої роздільної здатності сітки при DNS підході.

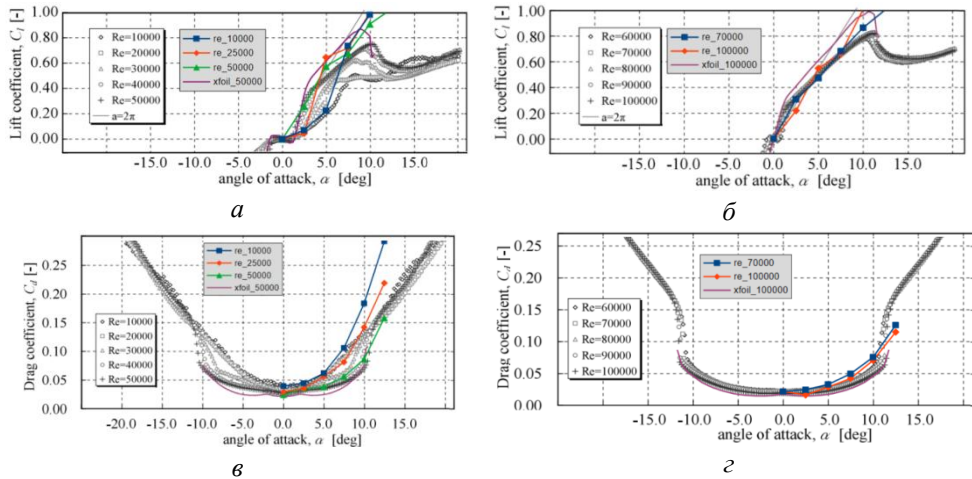


Рис. 3. Залежності інтегральних аеродинамічних характеристик профілю NACA0012 від кута атаки в порівнянні з даними [7 – 8]: а, б – коефіцієнт підйомної сили; в, г – коефіцієнт опору в діапазоні зміни числа Рейнольдса: $Re=10^4 \div 10^5$.

3. Результати розрахунків

Вихрову структуру течії навколо симетричного профілю NACA0012, розташованого на значній відстані від екрану ($h/L \gg 1$), продемонстровано на Рис. 4. Аналіз структури течії показує суттєвий вплив зміни числа Рейнольдса та кута атаки на характер обтікання профілю. При $Re=10^4$ і нульовому куті атаки спостерігається ламінарне впорядковане обтікання без виражених вихрових утворень, тоді як при $Re=10^5$ формується розвинена вихрова структура течії у сліді за профілем. Зі збільшенням кута атаки до $\alpha=5^\circ$ при $Re=10^4$ на навітряній стороні профілю починаються процеси відриву примежового шару і формування циклічних вихрових структур у сліді, а при $Re=10^5$ інтенсивні вихрові утворення формуються безпосередньо на навітряній стороні профілю. При кутах атаки $\alpha=10^\circ \div 12.5^\circ$, які належать до області критичних значень, відривна зона зміщується аж до носової частини профілю, де при $Re=10^4$ спостерігається формування великомасштабних вихрових структур, які повністю відриваються від поверхні профілю і безпосередньо формують вихрову структуру супутньої течії у сліді за профілем. Натомість при $Re=10^5$ поряд із великими вихорами формуються дрібномасштабні вихрові структури, які інтенсифікують перемішування в примежовому шарі та затримують його відрив.

Оскільки розв'язувана задача – нестационарна, коефіцієнти підйомної сили та опору профілю визначаються як функції часу. Аналіз часових залежностей коефіцієнтів показує, що з певного моменту часу для досліджених режимів течії встановлюється квазістационарний режим, у якому аеродинамічні характеристики коливаються відносно певного усталеного середнього значення. При $Re=10^4$ для кута атаки $\alpha=5^\circ$ спостерігаються відносно малі амплітуди коливань коефіцієнтів з частотою сходу вихрового сліду, оскільки лише у хвостовій частині профілю відбувається періодичне формування вихрових структур, тоді як уздовж більшої частини довжини профілю структура обтікання залишається переважно ламінарною з незначними збуреннями і відривом примежового шару. Із збільшенням кута атаки до $\alpha=10^\circ \div 12.5^\circ$

амплітуда коливань суттєва зростає, при цьому частота коливань, навпаки, зменшується, а середні значення коефіцієнтів демонструють ознаки нестабільності, що пов'язано з посиленням відривних явищ і розвитком великомасштабних вихрових структур.

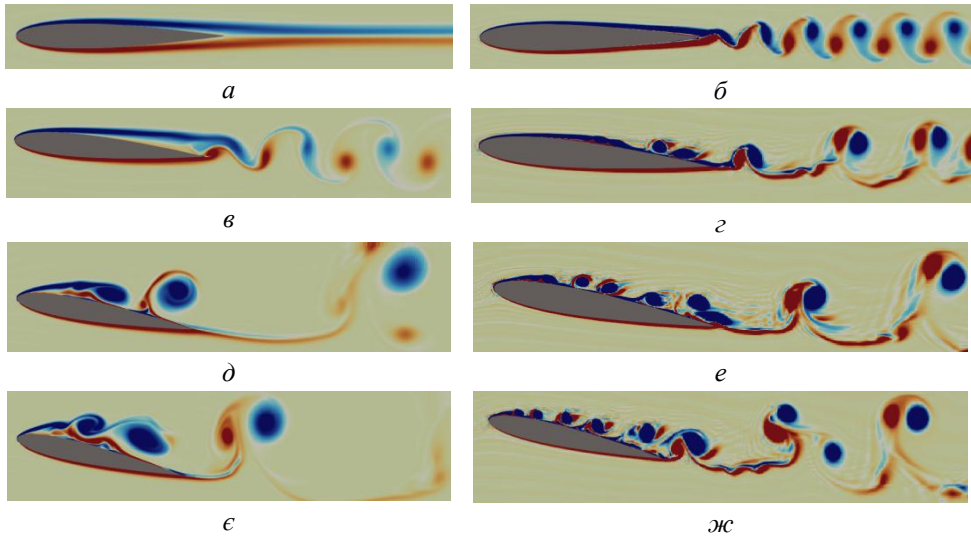


Рис. 4. Вихрова структура течії навколо профілю NACA0012 (без екранного ефекту): а, в, д, є – $Re=10^4$; б, г, е, ж – $Re=10^5$; а, б – $\alpha=0^\circ$; в, г – $\alpha=5^\circ$; д, е – $\alpha=10^\circ$; є, ж – $\alpha=12.5^\circ$.

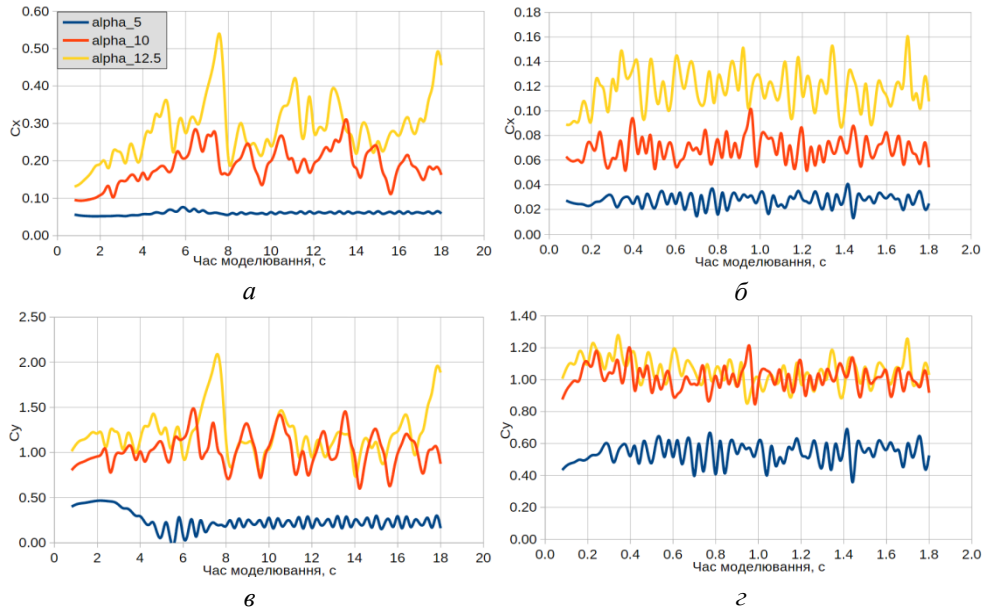


Рис. 5. Залежності від часу коефіцієнтів підйомної сили та опору крилового профілю NACA0012 на значній відстані від екрану: а, в – $Re=10^4$; б, г – $Re=10^5$.

Для $Re=10^5$ коливання коефіцієнтів зберігають близькі амплітудні та частотні характеристики в усьому діапазоні кутів атаки, а середні значення залишаються стабільними. При кутах атаки близьких до критичних частота коливань коефіцієнтів

виявляється більшою, ніж при $Re=10^4$, оскільки процеси відриву потоку супроводжуються формуванням і розвитком вниз за потоком вихорів дрібніших масштабів. При збільшенні числа Рейнольдса ці дрібномасштабні вихрові структури інтенсифікують перемішування в примежовому шарі, підвищуючи його стійкість до відриву і таким чином зумовлюючи більш стабільну поведінку залежностей у часі інтегральних аеродинамічних характеристик профілю.

Висновки

На прикладі задачі обтікання симетричного крилового профілю NASA0012 здійснено вибір найбільш оптимального та достовірного підходу до чисельного розв'язання розглядуваного типу задач шляхом тестування різних методів та алгоритмів, застосування розрахункових сіток різної якості та роздільної здатності, коректної постановки початкових і граничних умов, валідації отримуваних результатів тощо. Продемонстровано картини обтікання профілю при різних кутах атаки та числах Рейнольдса на значній відстані профілю від екрану, проаналізовано криві залежності інтегральних характеристик від часу та проведено порівняння результатів розрахунків з експериментальними та теоретичними результатами інших авторів. Отримані результати використано в якості базових даних для подальшого дослідження більш складної задачі обтікання крилового профілю з урахуванням екранного ефекту.

1. A.A. Pua'at, A. Zhahir, M.T. Ahmad, A. Hassan, Review on the development of wing-in-ground crafts. *E3S Web Conf.*, **477**, 00010 (2024). <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202447700010>
2. А.Н. Панченков, *Гідродинаміка підводного крила*, Наукова думка, Київ (1965).
3. В.Г. Белінський, П.І. Зінчук, С.І. Путілін та ін., Вплив форми неплоского екрану на гідродинамічні характеристики крила, що рухається над ним, *Гідромеханіка*, **31**, 28–32 (1975).
4. V. Grinchenko, V. Moroz, Hydrodynamic aspects of wing-in-ground crafts designing, *Conference Proceedings of the 1-st International Symposium on WIG Crafts, Seoul, Korea*, 15-25 (2005).
5. A. Hemanth, K. S. Kushal, and S. S. Varun, Aerodynamic Study on Low Reynolds Number Aerofoil, *ACS Journal for Science and Engineering*, **4**(1), 39–57 (2024). <https://doi.org/10.34293/acsjsse.v4i1.104>
6. M. R. Ahmed, S. Narayan, M. A. Zullah, and Y. H. Lee, Experimental and Numerical Studies on a Low Reynolds Number Airfoil for Wind Turbine Blades, *Journal of Fluid Science and Technology*, **6**(3), 357–371 (2011). <https://doi.org/10.1299/jfst.6.357>
7. T. Ohtake, Y. Nakae, and T. Motohashi, Nonlinearity of the Aerodynamic Characteristics of NACA0012 Aerofoil at Low Reynolds Numbers, *Journal of the Japan Society for Aeronautical and Space Sciences*, **55**(644), 439–445 (2007). <https://doi.org/10.2322/jjsass.55.439>
8. Airfoiltools, NACA 0012 Airfoil (n0012-il), Airfoil Coordinates Database, UIUC Airfoil Data Site (accessed 2026). <http://airfoiltools.com/airfoil/details?airfoil=n0012-il>

Методи, моделі та методики розрахунків та експериментальних досліджень акустичних випромінювань при стартах РКП

Г. І. Сокол

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, Дніпро, Україна

gsokol@ukr.net

Ключові слова: старт, ракети космічного призначення, джерела, акустичні поля, методи, методики, моделі, гасіння коливань.

В сей час актуальною стала тема впливу на корпусу ракет та навколишнє середовище акустичних коливань, що випромінюються при старті ракет космічного призначення (РКП). Відомі роботи [1], у яких розглянуті аспекти максимальних акустичних завантажень на ракету при старті. Застосовано аналітичні, експериментальні методи досліджень, а також проведено моделювання поширення акустичних коливань чисельними методами. Усі вони розглядають окремі конкретні завдання. Але при старті РКП в атмосфері виникають різні за характером випромінювання акустичні поля. Тому необхідно виявити особливості цих випромінювань, насамперед за частотним діапазоном. Це визначило напрямки досліджень з акустичного випромінювання при стартах РКП на основі уявлень, що існують про генерування та поширення звукових хвиль. Слід провести аналіз взаємозв'язку видів джерел акустичного випромінювання з характеристиками акустичних полів. Далі на основі результатів фізичного та математичного аналізу джерел акустичних коливань на стадії ескізного проектування можлива розробка активних та пасивних методів гасіння акустичних впливів. Тут важливі експериментальні перевірки, розробка програм та методик щодо вимірювань характеристик акустичних коливань.

Метою наукової роботи є розробки сучасних методів, моделей та методик дослідження акустичних джерел випромінювання та їх полів при старті ракет космічного призначення (РКП).

Основними завданнями стали: огляд наукових праць щодо визначення типу джерел акустичних випромінювань при старті РКП; відомих опублікованих робіт, де описані фізичні і математичні моделі акустичних полів залежно від типу акустичних джерел випромінювання; огляд методик розрахунку та експериментальних досліджень. Методологія досліджень акустичного випромінювання при старті РКП містить виявлення первинних джерел акустичних коливань (тобто, коливань від працюючої рушійної установки, вібрацій оболонки корпусу, турбулентних вихорів в потоці, що обтікають корпус, ударних хвиль), і вторинних джерел акустичних коливань (що виникають внаслідок відбиття коливань, які генеруються первинними джерелами при зіткненні з перешкодами, наприклад, типу споруд стартового столу). Важливо також розглянути взаємодію між собою акустичних коливань від джерел різного виду. Проведений огляд наукових робіт з аналізу характеристик джерел акустичного випромінювання, що з'являються в різні моменти під час стартів РКП [1-5]. Для складання методик розрахунків використані аналітичні методи з акустики коливань з малими амплітудами, засновані на уявлень, що існують.

Автором розроблений новий метод, що дозволить визначитися з типом акустичних випромінювань при старті РКН. Основним критерієм в методі може бути хвильовий параметр випромінювача акустичних коливань, який широко використовується в сучасній акустиці [4]. Розрахунок хвильового параметра акустичного випромінювача дозволяє класифікувати його як одного з типів випромінювачів широко відомих в даний час.

Такий підхід в аналізі акустичних випромінювань вже застосований для класифікації випромінювачів інфразвукових акустичних коливань в [6]. Залежно від значення хвильового параметра та типу акустичних джерел випромінювання проводиться розробка фізичних моделей їх акустичних полів та методик розрахунку їх лінійних та енергетичних характеристик.

Наведено аналіз взаємозв'язку характеристик джерел акустичного випромінювання з характеристиками акустичних полів для випадку, коли струмінь рушійної установки РКП уявляється джерелом плоских хвиль, об'ємним випромінювачем, пульсуючим циліндром. Знання частоти випромінювання акустичних хвиль дозволяє застосувати відомі в класичній акустиці моделі довгохвильових та короткохвильових випромінювань.

Це суттєвий фактор, який дає уявлення про спрямованість акустичного поля та дозволяє спростити розрахунки величини звукового тиску в залежності від зміни відстаней від джерела коливань до точки, де знаходиться умовний спостерігач.

Звуковий тиск у певній точці акустичного поля, що оточує ракету, може бути розрахований на основі відомих теоретичних положень акустики, якщо відстань r перевищує довжину хвилі λ випромінюваних звукових коливань, тобто в зоні далекого акустичного поля.

Розглянемо характеристики такої РКН, про котру відомо, що частота коливань, зареєстрована вібродатчиками телеметричної апаратури дільниці виведення, має діапазон 0,3-3000 Гц. Так як довжина хвилі λ випромінюваних акустичних хвиль дорівнює $\lambda = c/f$, то звідси випливає, що діапазон довжин хвиль, випромінюваних від ракети коливань лежить в межах 1133 м - 0,11 м відповідно.

Простір, де знаходиться дальнє акустичне поле випромінювачів, характеризується початковим значенням границі $r = \lambda$ (r – відстань від джерела випромінювання до точки спостереження). Значення r , що є рівними 1133 м – 0,11 м, визначають початкову межу далекого акустичного поля від зрізу сопла ракети або від будь-яких її частин, що виступають.

У роботі розроблено метод досліджень акустичного випромінювання при старті ракет космічного призначення з урахуванням визначення хвильового параметра kR .

Досліджено характер випромінювання акустичних хвиль із отвору газоходу конкретних розмірів. Отримано, що для частот вище 13,64 Гц для розглянутого газоходу з певними розмірами вихідного отвору випромінювання акустичних хвиль має фронт плоскої хвилі.

В роботі розроблено алгоритм і програмний комплекс для розрахунку акустичних характеристик в залежності від середньорічних температур на заданих частотах при старті ракети у заданій географічній точці, що дозволяє розраховувати параметри інфразвуку і аналізувати поширення акустичної хвилі від джерела сферичного типу при польоті ракет [7-10]. У перші 1,5–4,1 секунди польоту запропоновано моделювання акустичного поля від рушійної установки ракети як об'ємного джерела

випромінювання. Проведено моделювання об'ємним джерелом випромінювання ракети «Циклон-4М» і одно соплової РКП. Описана модель акустичного випромінювача рушійної установки як об'ємного сферичного джерела випромінювача і випромінювача хвилі з плоским фронтом. На рисунку показаний графік залежності звукового тиску від частоти при заданих температурах від частоти при заданих температурах поблизу приладного відсіку ракети «Циклон-4М».



Рисунок – Графік залежності звукового тиску від частоти при заданих температурах від частоти при заданих температурах поблизу приладного відсіку ракети «Циклон-4М».

Наведені дві моделі генерування акустичного поля в навколишньому середовищі при роботі дистанційного керування ракети як випромінювача плоскої та сферичної хвиль в залежності від значення хвильового параметра kR .

Аналіз шуму від ракетного двигуна дозволив зробити висновок, що рівень шуму залежить від пари компонентів палива, їх витрати, коефіцієнтів співвідношення компонентів, якості робочого процесу в камері згоряння та її конструктивних даних, швидкості витікання продуктів згоряння. Амплітуда складових спектру сильно залежить від пари компонентів палива, на яких працює двигунна установка.

1. Батутина Т. Я., Бондарь Д. С., Гринченко В. Т., Олійник В. Н. Полуэмпирическая оценка внешних акустических нагрузений в зоне полезной нагрузки при старте / Космическая техника. Ракетное вооружение. SpaceTechnology. MissileArmaments. Научно-технический сборник. – Выпуск 1 (117). – Днепр: ГП «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля», 2019. – С. 73-76.
2. Сиренко В. Н., Сокол Г. И., Савчук В. Н., Котлов В. Ю., Савчук Т. Л. Моделирование акустического излучения струи ракеты «Циклон-4М» объемным источником / Космическая техника. Ракетное вооружение. Space Technology. Missile Armaments. Научно-технический сборник. – Выпуск 1 (117). – Днепр: ГП «Конструкторское бюро «Южное» им. М. К. Янгеля», 2019. – С. 65-72.

3. Сокол Г. И. Метод определения вида источников акустического излучения в первые секунды старта ракет космического назначения / Системне проектування та аналіз характеристик аерокосмічної техніки. -2018. – т. XVIII. — С. 10-22.
4. Фролов В. П., Сокол Г. И., Котлов В. Ю. Волновой параметр как критерий в основе метода исследования акустических источников при старте ракет / Научно-технический журнал «Авиационно-космическая техника и технология». – 2018. – 3(147), май-июнь 2018. – Харьков: «ХАИ», 2018. – С. 3-12.
5. Galyna I. Sokol, Viktor P. Frolov, Vladyslav Yu. Kotlov, Angelica V. Davydova, Christina V. Geti. Research of acoustic emitting sources and calculation of their characteristics during the launch of the space rocket. / EGU2018-1760 – Vienna: EGU General Assembly 2018.
6. Сокол Г.И. Особенности инфразвуковых процессов в инфразвуковом диапазоне частот : науч. монография. – Днепропетровск: Промінь, 2000. – 136 с.
7. Г. І. Сокол, В. М. Сиренко, к.т.н., Д. В. Клименко, Т. Я. Батутіна. Методики розрахунків та експериментальних досліджень акустичних випромінювань при стартах РКП. / Збірник тез четвертої Інтернет-конференції «Космічні горизонти», 12-15 червня 2024р. Третій етап, Технічні науки: математичне моделювання та інформаційні технології. Дніпро, НЦАМУ, 2024, 39с.- С. 12-20. <https://space-horizons.org.ua/files/>
8. Котлов В.Ю., Сокол Г.И. Методика расчета акустических излучений двигательной установки в первые 0-41 секунды полета ракеты космического назначения / XX Міжнародна молодіжна науково-практична конференція «Людина і космос» (до 100-річчя Національної академії наук України), 11-13 квітня 2018р., – Дніпро, 2018, Україна: Збірник тез – Дніпро: 2018 – С.16.
9. Galyna Sokol, Sergeu Bondarenko, Olena Myronenko, Sergey Kirichenko, Olexandr Khorischenko. The problem of Noise Situation in the start of a space Application Rocket /European Geosciense Union, General Assembly 2018, Vienna, Austria,8-13 april.2018: Abstract EGU 2019– 1550. Web of Science.
10. Galyna Sokol, Frolov Victor, Vladislav Kotlov, Angelika Davidova, Cristina Geti. Research of Acoustik Emitting Sources and Calculation of Theie Characteritics, During the Lunch of the Space Rocket / European Geosciences Union, General Assembly 2018, Vienna, Austria, 8-13 April.2018: Abstract ID EGU 2019– 1760. Web of Science.

Математична модель системи реактивних двигунів малої тяги для розгінних блоків та космічних апаратів і її практичне застосування

Ю. В. Книшенко

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України, Дніпро, Україна

knysenko@ukr.net

Ключові слова: розгалужена паливна магістраль, метод характеристик, реакційна камера двигуна, термогазодинамічний процес, електрокерований паливний клапан, імпульсний режим роботи

Призначення системи реактивних двигунів малої тяги – забезпечення керуючих зусиль при русі космічного апарата (КА) або розгінного блоку при виводі на орбіту та у орбітальних умовах для компенсації збурень різної природи, при маневруванні та стабілізації КА. Призначення математичної моделі роботи системи реактивних двигунів – розрахункове забезпечення неусталених гідравлічних та термогадинамічних процесів при проектуванні та експериментальному відпрацюванні у наземних та льотних умовах. Розглянуто двокомпонентні та однокомпонентні системи рідинних реактивних двигунів малої тяги (ДМТ).

Двокомпонентна система рідинних реактивних двигунів малої тяги являє собою дві розгалужені трубопроводні магістралі (для пального і окислювача), якими компоненти палива з паливних баків під тиском газу подаються до електрокерованих клапанів на входах до двигунів малої тяги, призначених для керування рухом космічного апарата за тангажом, креном та ризиканням. Після надходження командного сигналу від системи керування космічного апарата у вигляді електричної напруги на обмотки електромагнітів паливних клапанів, що знаходяться на входах до реакційних камер двигунів, відбувається їх запуск. В результаті цього до реакційних камер двигунів надходять samozapalnyi компоненти палива, наприклад, несиметричний диметилгідрозин (НДМГ) та азотний тетроксид (АТ) і відбувається реакція горіння з утворенням високотемпературних газів, які витікають через надзвукове сопло, створюючи тягове зусилля, що діє на КА. Після відпрацювання командного сигналу клапани на відповідних двигунах припиняють подачу палива до їх реакційних камер. Тобто двигуни працюють у імпульсних режимах з широкими змінами у часі роботи двигунів та пауз між вмиканнями.

Для однокомпонентної системи двигунів використовується одна паливна магістраль з одним електрокерованим клапаном на кожному з двигунів. Паливо (наприклад, гідрозин), що надходить до реакційної камери взаємодіє з каталізатором з утворенням високотемпературних продуктів розкладання, що забезпечують необхідну тягу. В разі використання нових типів «зелених» палив, які являють собою розчини у воді суміші іонної речовини та пального після розкладання та випаровування на каталізаторах вступають у реакцію горіння з утворенням високотемпературних токсично безпечних газів для забезпечення необхідної тяги.

Комплексна математична модель роботи системи рідинних реактивних двигунів малої тяги [1 - 4] описує:

- неусталені гідравлічні процеси в розгалужених магістралях живлення від паливних баків до кожного з двигунів з урахуванням хвильових гідроударних процесів та лінійних і місцевих гідравлічних опорів;

- електромагнітні та гідравлічні процеси в електрокерованих паливних клапанах (ЕПК), що розміщуються на входах до реакційних камер двигунів і забезпечують запуски та зупинки відповідних двигунів за електричними сигналами від системи керування рухом космічного апарата у льотних умовах;

- неусталені газодинамічні процеси у реакційних камерах двигунів малої тяги і соплових пристроях з урахуванням хімічного складу палива та термохімічних перетворень;

- реалізацію заданих циклограм роботи кожного з двигунів при наземному відпрацюванні.

Система живлення двигунів являє собою набір ділянок трубопроводів, кожна з яких характеризується сталими матеріалами, величинами діаметрів та товщини стінок, поєднаних між собою та з пристроями керування (клапанами), фільтрами, технологічними відводами, входами до двигунів. Гідравлічні параметри руху компонентів палива (КП) у таких магістралях описуються системами рівнянь у частинних похідних гіперболічного типу для кожної з ділянок з граничними умовами, що відповідають фізичним процесам на стиках ділянок, входах до двигунів та інших місцевих гідравлічних опорах

$$\begin{cases} \frac{\partial p_i^j}{\partial t} + (a_i^j)^2 \frac{\partial Q_i^j}{\partial x_i^j} = 0; \\ \frac{\partial Q_i^j}{\partial t} + \frac{\partial p_i^j}{\partial x_i^j} = \varphi_i^j; \\ i = 1, 2, \dots, N^j; \\ j = \hat{1} \wedge \bar{1}, \end{cases} \quad (1)$$

де верхній індекс $j = \hat{1}$ відповідає системі окислювача, $j = \bar{1}$ – системі пального; x_i^j – координати за довжиною конструктивних ділянок; i – номери конструктивних ділянок; $Q_i^j = \rho^j U_i^j$ – масові швидкості; ρ^j, U_i^j – густина та швидкість руху; a_i^j – швидкості звуку, що визначаються за формулою Жуковського $a_i^j = a_\infty^j \left[1 + K_i^j D_i^j / E_i^j \delta_i^j \right]^{0,5}$; a_∞^j – швидкості звуку компонентів палива у безмежному просторі; D_i^j, δ_i^j – діаметри трубопроводів та товщина їх стінок; K_i^j, E_i^j – коефіцієнти стисливості компонентів палива та модуль пружності матеріалу трубопроводу; $\varphi_i^j = -\lambda_i^j Q_i^j \left| Q_i^j \right| (2 D_i^j \rho^j)^{-1}$; λ_i^j – коефіцієнти гідравлічного опору у квазістаціонарній постановці, що залежать від чисел Рейнольдса КП та шорсткості стінок трубопроводів.

Розв'язання рівнянь (1) виконується за таких початкових та крайових умов. Вважається, що на момент часу $t=0$ течія КП в трубопроводах відсутня (паливні клапани на всіх двигунах зачинені) – $p_i^j(x_i^j, 0) = p_{\text{до}}^j$, $Q_i^j(x_i^j, 0) = 0$, ($i = 1, 2, \dots, N^j$, $j = \hat{1} \wedge \bar{1}$). Крайові умови визначаються співвідношеннями, що зв'язують значення тисків та витрат на стиках i -ої та $(i+1)$ -ої конструктивних ділянок трубопроводів та входах до працюючих двигунів для кожного з КП

$$p_{i+1}(t) = p_i(t) \pm \varsigma_{i,i+1} \frac{Q_{i+1}^2(t)}{2\rho_{i+1}}.$$

Для математичного розв'язання системи (1) застосовано числовий метод характеристик. Для його реалізації проводиться дискретизація магістралей на всіх конструктивних ділянках для обох КП. Побудовані кінцево-різницеві сітки розгалужених трубопровідних систем для кожного з КП представляються в вигляді відповідних двовимірних матриць. У цих матрицях на місцях елементів, що відповідають розрахунковим перерізам дискретизованих трубопроводів з кроком $\Delta x = a_i^j \Delta t$, стоять номери цих елементів, де Δt - крок за часом. Нумерація їх може бути довільною, але впорядкованою у межах кожної з конструктивних ділянок. В залежності від значень елементів матриць, що знаходяться окіл розрахункової точки, вона класифікується або як регулярна (що знаходиться всередині конструктивної ділянки), або як гранична (вихід з баку, вхід до реакційних камер ДМТ, переріз тупикового трубопроводу, стик трубопроводів, клапан, жиклер тощо) [1-3].

В процесі числової реалізації метода характеристик матриці дискретизованих трубопроводів скануються на кожному часовому кроці з урахуванням станів паливних клапанів для кожного з двигунів. Якщо якісь з двигунів у даний момент часу вимкнені, вхід до них моделюється великим коефіцієнтом місцевого опору. В разі початку роботи двигуна використовується коефіцієнт місцевого опору, отриманий для стаціонарних умов його роботи.

Режими роботи двигунів (час вмикання, протяжність у часі роботи та пауз) для кожного з двигунів задаються відповідно до циклограми відпрацювання всієї системи двигунів. Математична модель роботи електрокерованих паливних клапанів [4], що є однією зі складових загальної математичної моделі, реалізує режими роботи кожного з двигунів. Ця модель враховує затримки відкриття та зупинок у робот двигунів по відношенні до електричних командних сигналів, обумовлені механічною та індуктивною інерційністю роботи електрокерованих клапанів.

Тиск у камерах згоряння (КЗ) кожного з двокомпонентних двигунів визначається з рівняння [5]

$$\frac{dp_{\text{ёс}}}{d\tau} + \varepsilon \Psi p_{\text{ёс}} = \eta \frac{R_{\text{іс}} T_{\text{іс}}}{V_{\text{ёс}}} [G_i (\tau - \tau_{\text{ёс}}) + G_i (\tau - \tau_{\text{ёс}})], \quad (2)$$

де $p_{\text{ёс}}$ - тиск у КЗ згоряння працюючих двигунів; $\Psi = A_n F_{\text{ёс}} / V_{\text{ёс}} \sqrt{R_{\text{іс}} T_{\text{іс}}}$; $F_{\text{ёс}}$ - площа критичного перерізу надзвукового сопла; $V_{\text{ёс}}$ - об'єм камери згоряння; $R_{\text{іс}}$, $T_{\text{іс}}$ - газова стала та температура продуктів згоряння; $A_n = \sqrt{\gamma [(2/(\gamma + 1))^{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}]}$; γ - показник адіабати розширення; η - поправний множник, що визначаються за даними експериментів; $\tau_{\text{ёс}}$ - час запізнення подачі КП до камери згоряння двигуна.

Розв'язок рівнянь (2) для кожного з працюючих двигунів проводиться числовим методом на часовому інтервалі метода характеристик системи (1). Працездатність пального $R_{\text{іс}} T_{\text{іс}}$ у залежності від хімічного складу компонентів палива та їх співвідношення визначається у рівноважному наближенні з використанням відомого програмного комплексу ASTRA 4/ps [6].

Дану модель реалізовано у вигляді програмного забезпечення. З її використанням проводилось моделювання роботи двигунів малої тяги для космічного ступеня ракети космічного призначення (РКП) «Циклон-4М», системи різномасштабних двигунів малої тяги на традиційному двокомпонентному паливі та на «зеленому» монопаливі марки LMP- 103S шведської компанії ECAPS [7].

Особливості виконання системи двигунів малої тяги для РКП «Циклон-4М», полягали у тому, що паливне живлення цих двигунів здійснювалось не з автономних паливних баків, а з магістралей живлення маршового двигуна (МД) космічного ступеня ракети з багаторазовим запуском у орбітальних умовах.

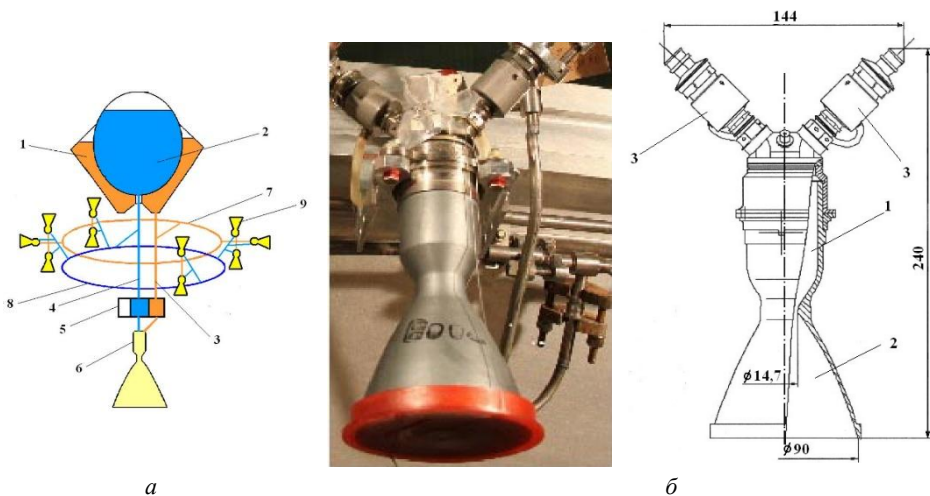
Відмова від паливних баків для живлення рідинної реактивної системи (РРС) дозволяє збільшити масу корисного вантажу, що виводиться на орбіту. Разом з тим цей підхід поставив ряд проблем перед розробниками РРС, які полягали у наступному:

- суттєво зменшується тиски компонентів палива на входах до ДМТ (у декілька разів щодо існуючих аналогів), що приводить до зменшення тисків у КЗ (у номіналі до 1 бара); понижений тиск у магістралях живлення може спровокувати газовиділення з утворенням газорідних сумішей пониженої густини;

- гідравлічний зв'язок магістралей живлення маршового двигуна та системи керування двигунів приводить до несталості тисків (гідроударів) на входах до РРС при повторних запусках/зупинках МД;

- суттєво ускладнилась методика наземного відпрацювання ДМТ і всієї РРС при автономних і комплексних випробуваннях сумісно з вогневими випробуваннями МД, оскільки неможливо було технічно забезпечити тиски на зрізах сопел ДМТ, які повинні бути близькими вакууму.

Схему паливного живлення керуючих двигунів, їх загальний вигляд і основні вузли представлено на рис. 1



а
1, 2 – баки пального («П») і окислювача («О»); 3, 4 – магістралі подачі КП до МД та ДМТ; 5 – ТНА; 6 – МД космічного ступеня; 7 – колектор «П»; 8 – колектор «О»; 9 – ДМТ

б
1 – КЗ; 2 – сопло; 3 – паливні клапани
Тиск у КС – 1,0 бар. Тяга – 30 Н
Витрати пального (НДМГ) – 5,26 г/с.
Витрати окислювача (АТ) – 9,74 г/с.
 $K = G_O / G_P = 1,85$.
Тиск «П» на входе – 2,6 бар. Тиск «О» на входе – 5,3 бар

Рис. 1. Комбінована схема паливного живлення двокомпонентної РРС у складі 10 двигунів тягою 30 Н та їх загальний вигляд і основні характеристики.

При супроводженні експериментальних робіт з розробки РРС використовувалась представлена математична модель на наступних етапах:

- вогневе відпрацювання одиночних двигунів у характерних режимах роботи з визначенням необхідних уточнень до математичної моделі, необхідних для моделювання роботи двигунів у системі;

- вогневе автономне випробування РРС у вакуумкамері за різних тисків компонентів палива, що моделювали режими запуску та зупинок маршового двигуна;

- відпрацювання роботи керуючих двигунів при наземних вогневих випробуваннях маршового двигуна (з п'ятиразовим запуском) без вогневих запусків ДМТ зі збором компонентів палива у мірні ємності для оцінки роботи двигунів. Проведені розрахунки роботи РРС для орбітальних умов і умов наземних експериментів підтвердили правомірність методики наземного експериментального відпрацювання.

На рис. 2 представлено результати співставлення розрахункових і експериментальних даних при імпульсному режимі роботи одиночних двигунів за різними вхідними тисками КП.

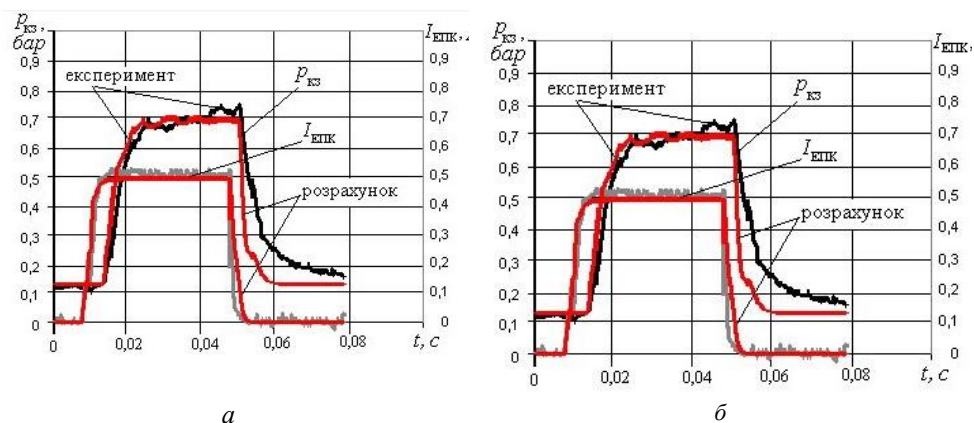


Рис. 2. Результати розрахункового та експериментального визначення тисків у камері згоряння: а – вхідні тиски пального 1,79 бар і окислювача 4,29 бар; б - вхідні тиски пального 3,21 бар і окислювача 6,71 бар; напруга ЕПК 32 В.

На рис. 3 представлено дискретизовану схему з'єднань окислювача РРС та фрагмент матриці 21х55 з виокремленням входів до двигунів та характерних вузлів стику конструктивних ділянок паливних трубопроводів. Кількість розрахункових перерізів складає 373. Аналогічний вигляд має схема з'єднань пального з 404 розрахунковими перерізами у матриці такого ж розміру.

На рис. 4 представлено зміни тиску КП на входах до РРС при запуску і зупинці МД, отримані при вогневих випробуваннях та відповідні розрахункові зміни тяги двигунів малої тяги.

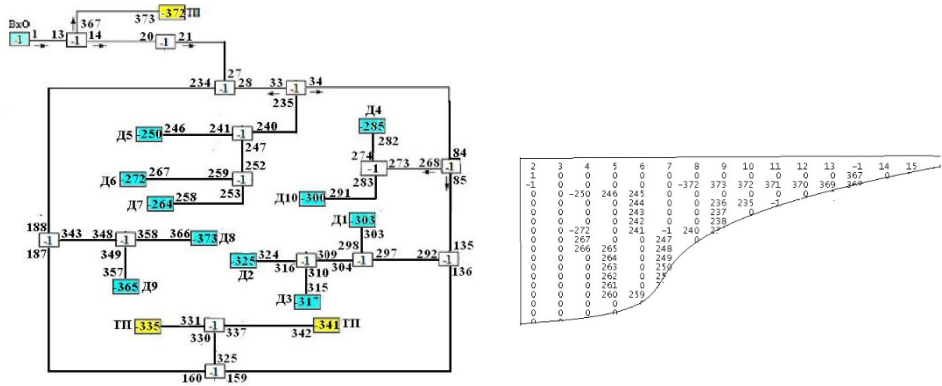


Рис. 3. Дискретизована схема з'єднань окислювача РРС (а) та фрагмент відповідної матриці 21х55 (б): Д1 - Д10 номери двигунів; ВхО – вхідний переріз до РРС; ГП - тупикові перерізи трубопроводів; позначка (-1) відповідає стику різних ділянок трубопроводу або зосередженому місцевому опору.

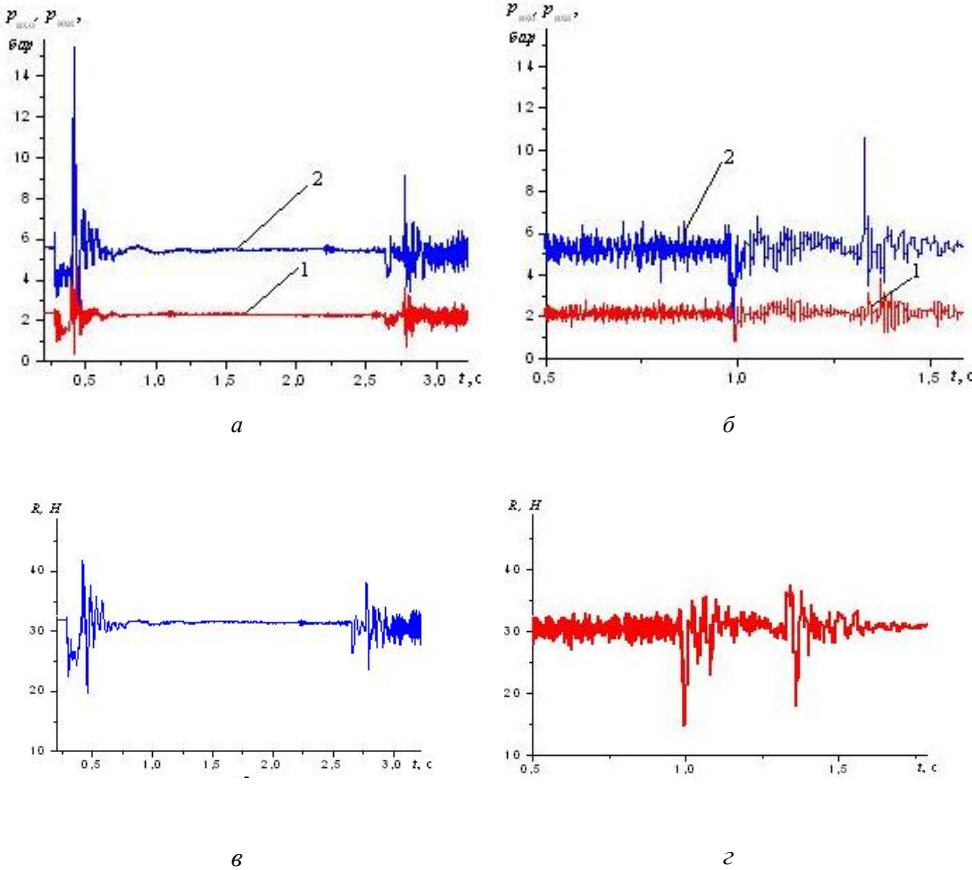


Рис. 4. Зміни тиску КП на входах до РРС: а, б - при запуску і зупинці МД, отримані при вогневих випробуваннях; криві 1, 2 - витрати окислювача та пального на вході до РРС; в, г - відповідні розрахункові зміни тяги ДМТ.

Наведені результати показують вплив запусків або зупинок маршового двигуна на тягові характеристики керуючих двигунів, обумовлений гідравлічним зв'язком магістралей живлення маршового двигуна і керуючих двигунів. Ці ефекти мають гідроударний характер і їх слід враховувати при розробці системи керування рухом космічного ступеня РКП «Циклон-4М».

На рис. 5 наведено загальний вигляд рушійної установки з різномасштабними двигунами та її основні вузли: баки окислювача АТ та пального НДМГ; колектори пального та окислювача; системи трубопроводів для подачі КП до ЕПК на голівках двигунів [3]. Дану установку призначено для проведення маневрових робіт з космічними апаратами в орбітальних умовах.

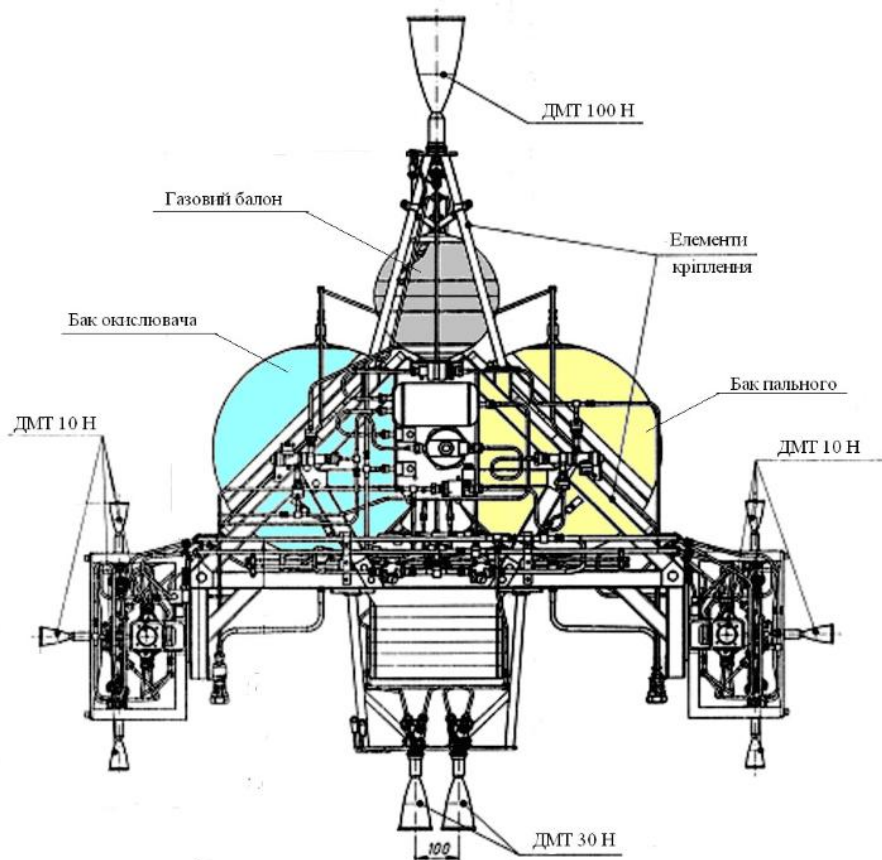


Рис. 5. Загальний вигляд двокомпонентної рушійної установки з ДМТ різного масштабу тяги у складі: 10 двигунів тягою 10 Н; 2 двигуни тягою 30 Н; 1 двигун тягою 100 Н; 2 паливних баки (для окислювача АТ та пального НДМГ); балон з витискувальним газом; колектори КП та системи трубопроводів для подачі КП до ЕПК на голівках двигунів.

На рис. 6 представлено схеми дискретизованих з'єднань паливних магістралей двигунів, числа на яких відповідають номерам розрахункових перерізів у матрицях пального і окислювача

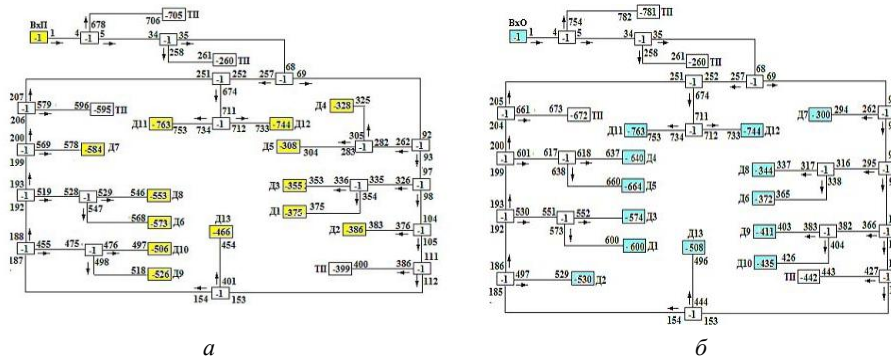


Рис. 6. Схема з'єднань паливних магістралей двигунів Д1 - Д13: *а* – магістралі пального (НДМГ); *б* – магістралі окислювача (АТ); числа на входах до двигунів відповідають номерам розрахункових перерізів для реалізації метода характеристик; числа 1 відповідають входам до паливних магістралей пального і окислювача; кількість розрахункових перерізів окислювача – 706, пального – 782.

В таблиці 1 представлено вихідні дані для реалізації розрахункового алгоритму системи різномасштабних ДМТ відповідно до схеми на рис. 6.

Таблиця 1.
Вихідні дані конструктивних параметрів двигунів, фізичних параметрів компонентів палива та дані термодинамічних розрахунків двигунів

Пара-метр	Пальне ($\rho^n=796 \text{ кг/м}^3$; $\dot{a}_\infty^i=950 \text{ м/с}$; $\eta^i=0,593 \text{ МПа}\cdot\text{с}$; Діаметри відводів – 4 мм, колектора 4 – 10 мм)												
	Номери двигунів відповідно до схеми на рис. 6а												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Вхідні перерізи	375	383	353	325	304	568	578	546	518	497	753	733	454
$\zeta_{\text{вд}} \cdot 10^{-4}$	6,89										44,2	44,2	437,0
Пара-метр	Окислювач ($\rho^i=1458 \text{ кг/м}^3$; $\dot{a}_\infty^i=1017 \text{ м/с}$; $\eta^i=0,435 \text{ МПа}\cdot\text{с}$; Діаметри відводів – 4 мм, колектора 4 – 10 мм)												
	Номери двигунів відповідно до схеми на рис 6б												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Вхідні перерізи	600	529	571	637	660	365	294	337	403	426	753	733	496
$\zeta_{\text{вд}} \cdot 10^{-4}$	3,71										83,0	83,0	817,0
Дані двигунів на безперервному режимі (термодинамічний розрахунок, $\gamma=1,23$; $M_a=5,97$)													
$D_a/D_{\text{вд}}$	12,50										12,54	12,54	12,58
Тяга, Н	10										30	30	100
$V_{\text{кз}} \cdot 10^{-6}, \text{ м}^3$	13,67										42,20	42,20	216,5
Витрати, о/п, г/с	2,49/1,35										7,21/3,89	7,21/3,89	22,95/12,40
Питомий імпульс, м/с	2604										2727	2727	2828

На рис. 7 наведено результати розрахунків неусталених режимів роботи ДМТ різних масштабів тяги з урахуванням взаємного впливу, обумовленого гідравлічним зв'язком паливних магістралей.

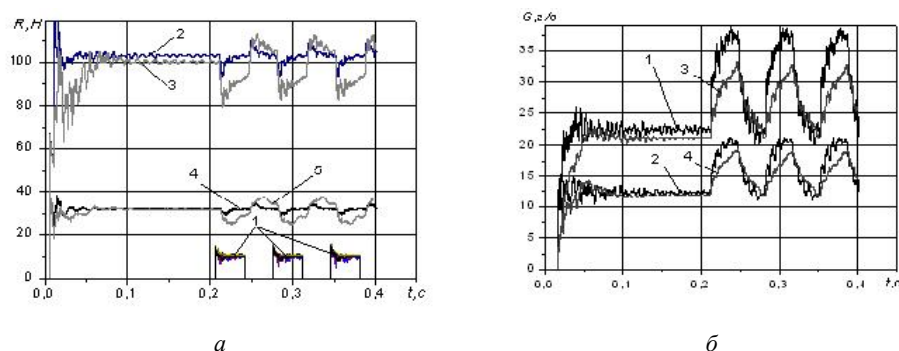


Рис. 7. Результати розрахунків неусталених режимів роботи ДМТ різних масштабів тяги: а - 1 – зміни тяги двигунів з номінальною тягою 10 Н (5 двигунів); 2, 3 – зміна тяги двигуна з номінальною тягою 100 Н; 4, 5 – зміна тяги двигунів з номінальною тягою 30 Н для діаметрів колектора 10 мм і 4 мм відповідно; б - 1, 3 та 2, 4 - зміни сумарних витрат палива за умов роботи двигунів за пунктом, а).

Наведені дані показують, що зменшення діаметрів паливних колекторів за імпульсних режимів роботи керуючих двигунів тягою 10 Н проковує зростання амплітуд небажаних низькочастотних пульсацій (у декілька G_u) тяги (у декілька G_u) маневрових двигунів з номінальними тягами 100 Н або 30 Н.

Останні роки світові космічні фірми приділяють значну увагу пошуку нових, екологічно безпечних видів палива для двигунів малої тяги, що можуть замінити традиційні види – гідразин, НДМГ, АТ та ін. Розглянуто один з видів так званих «зелених» палив марки LMP-103S. Розробником цього палива та різномасштабних двигунів малої тяги, що використовують його, є шведська компанія ECAPS [7].

Хімічний склад палива LMP-103S являє собою таку суміш: іонна речовина (окислювач) - динітрамід амонію $((NH_4)N(NO_2)_2)$ з масовою долею 57,3% – 63,0%; пальне – метанол (CH_3OH) 16,7% – 18,4%, стабілізатор – аміак (NH_3) 4,23% – 4,65%, розчинник – вода (H_2O) 13,95% – 21,8%. Технологія використання цього палива у реактивних двигунах полягає у наступному [8]. Паливна суміш після ЕПК на вході до реакційної камери потрапляє на шар розігрітого сипучого каталізатора, на якому відбувається випаровування води (розчинника), рідкого пального (метанолу) та розкладання динітраміда амонію. Утворена парогазова суміш вступає в реакцію горіння в камері згорання з утворенням високотемпературних газових продуктів з температурою від 1600 К до 1900 К, які витікають через сопловий пристрій, забезпечуючи необхідне тягове зусилля.

На рис. 8 представлено схему системи різномасштабних реактивних двигунів на екологічному монопаливі LMP-103S, яка знаходиться у розробці у ДП «КБ «Південне». Ця система являє собою сукупність 44 різномасштабних двигунів малої тяги і призначена для знешкодження космічного сміття.

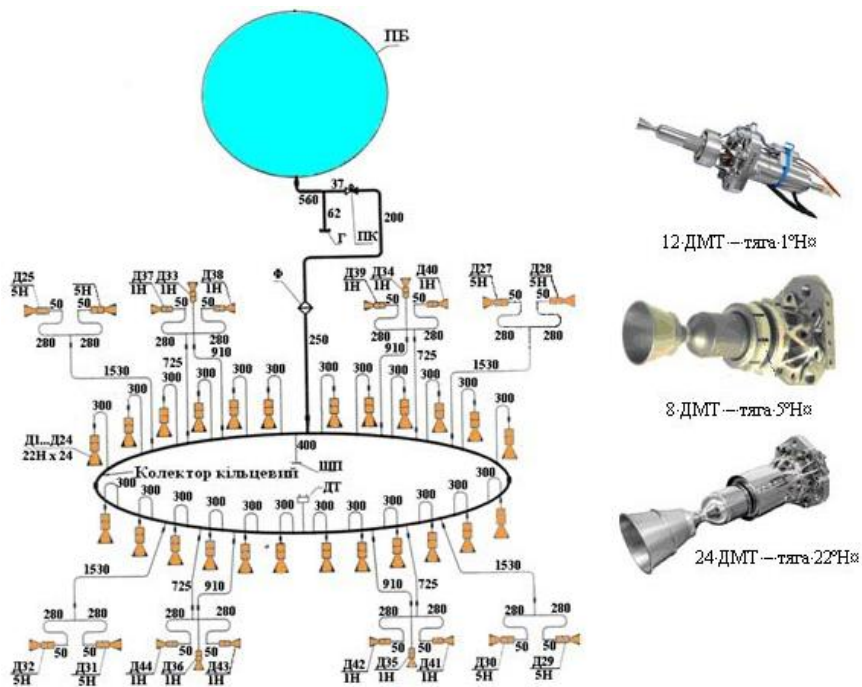


Рис. 8. Система різномасштабних двигунів на екологічному монопаливі LMP-103S у складі: Д1 - Д24 - двигуни тягою 22 Н; Д25 - Д32 - двигуни тягою 5 Н; Д33 - Д44 - двигуни тягою 1 Н;; ПБ – паливний бак; Г – горловина; ПК – піроклапан; ШП – штуцер технологічний; Ф – фільтр; ДТ – датчик тиску; цифри біля трубопроводів – їх довжина у мм.

В таблиці 2 представлено технічні характеристики різномасштабних двигунів, що входять до складу розроблюваної системи.

Таблиця 2.

Технічні характеристики двигунів на екологічно чистому паливі LMP-103S

Параметри	Перелік двигунів з різною номінальною тягою		
	1 Н	5 Н	22 Н
Діапазон вхідних тисків, бар	5,5 – 22	5,5 – 24	5,5 – 24
Діапазон змін тяги, Н	0,25 – 1,0	1,5 – 5,5	5,5 – 22
Ступінь розширення сопла	100:1	150:1	150:1
Питомий імпульс (вакуум), м/с	2000 – 2270	2300 – 2450	2385 – 2500
Мінімальний імпульс тяги, мН·с	≤30	≤100	≤440
Маса двигуна (суха), кг	0,39	0,45	1,0
Загальна довжина двигуна, мм	178	220	260
Тип паливного клапана	Електромагнітний	Електромагнітний	Електромагнітний
Напруга живлення клапана, В	28±4	28±4	28±4
Кількість клапанів	2	2	2
Напруга утримання клапана, В	10±1	10±1	10±1
Потужність нагрівача, Вт	12	25 – 30	26 – 50
Кількість вмикань двигуна	60000	50000	50000
Запас палива, кг	24	100	150
Сумарний час роботи, год	25	20	7,6
Кількість імпульсів за один цикл	1500	350	350
Стадії розробки та використання	У космосі 102 двигуна	В кваліфікації	Тестування

З використанням експериментальних даних, отриманих розробниками двигунів у стендових та орбітальних умовах, визначено витратні параметри двигунів та коефіцієнти гідравлічного опору на входах до двигунів за різних значень тисків палива на виходах з баків в умовах безперервної роботи двигунів. З використанням цих параметрів та результатів розрахунку термохімічних процесів у реакційних камерах для рівноважних умов та у соплових пристроях при заморожених параметрах [6], побудовано моделі роботи двигунів у перехідних режимах роботи при запусках та зупинках двигунів. Виконано верифікацію математичної моделі одиночних двигунів різних масштабів тяги за різних тисків палива в баках для умов безперервної та імпульсної роботи [9].

Отримані результати дозволили застосувати розрахункову модель для дослідження роботи системи двигунів, представленої на рис. 8. В якості циклограми розглянуто найбільш напружений варіант роботи двигунів, в саме: двигуни з номінальною тягою 22 Н у кількості 24 одиниці працюють у безперервному режимі; двигуни з номінальною тягою 5 Н і 1 Н у кількості 4-х одиниць кожної тяги працюють у імпульсних режимах різної шпаруватості. Програмне забезпечення дозволяє визначення таких параметрів при роботі двигунів: тяга двигуна (R_{aa} , Н); масова витрата палива за клапаном та на зрізі соплового пристрою (G , г/с); тиск продуктів реакції у реакційній камері (p_{de} , бар); тиск палива на вході до двигуна (p_{ao} , бар); сумарні витрати палива у системі двигунів (G_{Σ} , г/с) за сталих значень тиску палива у баку; електричний струм у паливних клапанах двигунів (I , А).

На рис. 9 наведено результати розрахунків змін тяги двигунів за різних значень тисків палива у баку (p_a , та діаметрів колектора.

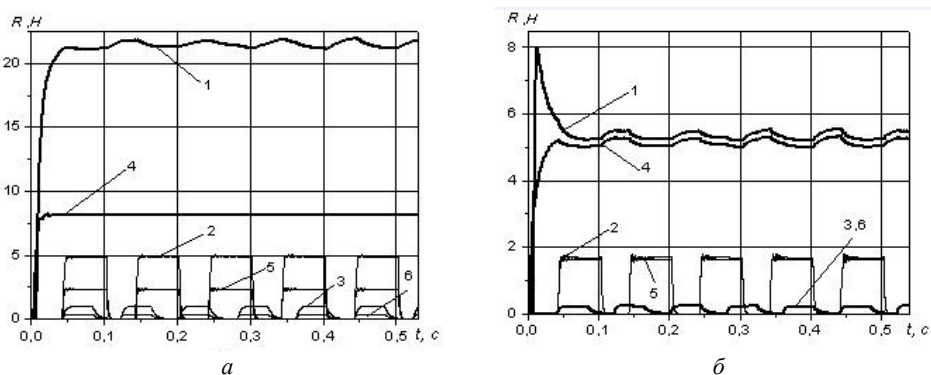


Рис. 9. Залежності тяги двигунів при сумісній роботі за різних тисків палива у баку: *a* – діаметр колектора 30 мм; *б* – діаметр колектора 15 мм; криві 1, 2, 3 відповідають номінальним тягам двигунів 22 Н, 5 Н, 1 Н за $p_a = 27$ бар; криві 4, 5, 6 – $p_a = 7$ бар

Представлені на рис. 9а результати розрахунків показують, що за максимальних значень тиску у баку і діаметру колектора 30 мм, робота двигунів тягою 5 Н і 1 Н у імпульсному режимі приводить до коливань тяги двигунів з номінальною тягою 22 Н, в той час як тяга двигунів з меншою тягою відповідає розрахунковим даним (криві 2, 3). За мінімальних значень тиску у паливному баку тяги двигунів 5 Н і 1 Н зменшуються вдвічі (криві 5, 6), а тяга двигунів 22 Н майже втричі (крива 4), при цьому пульсації тяги цих двигунів зникають. Це обумовлено загальним зниженням витрат палива в системі і гідравлічних опорів та зниженням їх пульсацій за імпульсної роботи двигунів.

Рис. 9б ілюструє зміни тяги цих же двигунів за мінімальних значень діаметру колектора 15 мм. Тяга двигунів з номінальною тягою 22 Н знижується до 5,2 Н з коливаннями тяги (крива 1), обумовленими імпульсною роботою двигунів з номінальними тягами 5 Н і 1 Н, тяга яких зменшується майже в три рази (криві 2,3). Цікаво, що зменшення тиску в баку до мінімальних значень (7 бар) майже не впливає на тягу двигунів усіх типів: вона близька до тяги за максимального тиску у баку за діаметру колектора 15 мм.

Наведені результати розрахунків роботи систем реактивних двигунів на різних видах палива показують, що описана комплексна математична модель, що враховує неусталені гідравлічні процеси в паливних магістралях, електромагнітні та гідравлічні процеси в паливних клапанах, термохімічні та газодинамічні процеси у реакційних камерах двигунів та соплових пристроях, може бути використана при супроводженні наземного відпрацювання таких систем, а також у льотних умовах для оцінки телеметричних даних.

1. В. И. Тимошенко, Ю. В. Кнышенко, В. М. Дураченко., В. М. Анищенко. Вопросы отработки управляющей жидкостной реактивной системы с питанием из магистралей маршевого двигателя последней ступени ракеты-носителя. *Космічна наука і технологія*. 2016. Т. 22, № 1. С. 20–35.
2. В. И. Тимошенко., Ю. В. Кнышенко. Влияние газонасыщенности жидкости на особенности неустановившихся течений в сложных трубопроводах. *Инженерно-физический журнал*. 2018. Т. 91, № 6.– С.1506–1516.
3. Ю. В. Кнышенко., В. М. Дураченко. Математична модель роботи системи різномасштабних двокомпонентних реактивних двигунів малої тяги. *Технічна механіка*. 2022. № 3, С. 42–67. <https://doi.org/10.15407/itm2022.03.047>
4. Ю. В. Кнышенко. Динаміка електрокерованих паливних клапанів реактивних двигунів малої тяги на «зеленому» паливі. *Технічна механіка*. 2024. № 3. С. 50–68. <https://doi.org/10.15407/itm2024.03.050>
5. Н. М. Беляев Н.М., Н.П. Белик., Е.И. Уваров. *Реактивные системы управления космических летательных аппаратов*. М.: Машиностроение, 1979. 232 с.
6. ПК АСТРА 4 / рс, версия 1:07 С. Моделирование химических и фазовых равновесий при высоких температурах : описание применения. М.: МГТУ им. Баумана. 1991. 38 с.
7. Bradfod ECAPS. “High Performace Green Propulsion” Product Brochure. https://www.ecaps.space/assets/pdf/Bradford_ECAPS_Folder_2017/pdf (дата звернення 09.04.2026)
8. В. І. Тимошенко, Л. К. Патриляк, Ю. В. Кнышенко, В.М., В. М. Дураченко, А. С. Долінкевич. Застосування «зеленого палива» в системах реактивних керуючих двигунів малої тяги. *Технічна механіка*. № 4. С.29–43 (2021). <https://doi.org/10.15407/itm2021.04.029>
9. В. І. Тимошенко, Ю. В. Кнышенко, В. М. Дураченко Математична модель реактивних двигунів малої тяги на «зеленому» паливі та її верифікація. *Технічна механіка*. – 2025. – № 2. С. 17 – 34. <https://doi.org/10.15407/itm2025.02.017>

Релейне керування відносним рухом космічних апаратів з використанням навчання з підкріпленням

В. В. Сорочинський, С. В. Хорошилов

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України, Дніпро, Україна

vovas99@ukr.net, khoroshylov.s.v@nas.gov.ua

У доповіді розглянуто два методичні напрями побудови релейного керування відносним рухом космічних апаратів із використанням навчання з підкріпленням та нейронних мереж. Перший напрям ґрунтується на поєднанні структури ковзного режиму з алгоритмом оптимізації проксимальної політики, у якому нейронна мережа використовується для формування параметрів політики керування, а до функції вартості вводиться штраф за порушення умови спадання дискретної функції Ляпунова. Другий напрям пов'язаний із навчанням агента в ускладненому середовищі, де додаткова нейромережева модель-збурювач не просто задає випадкові збурення, а навчається формувати такі небажані впливи, які ускладнюють роботу основного агента та змушують його виробляти більш робастну політику керування. Обидва підходи орієнтовані на задачі орбітального сервісу, де важливими є точність зближення, стійкість руху, робастність, витрати робочого тіла та обмеження ресурсу релейних виконавчих органів.

Ключові слова: релейне керування, навчання з підкріпленням, відносний рух космічних апаратів, ковзний режим, функція Ляпунова, робастність, збурювач.

Вступ

Задачі орбітального сервісу, інспекції, зближення, стикування та активного видалення космічного сміття потребують високоточного керування відносним рухом космічних апаратів поблизу цільового об'єкта [1, 2]. У таких режимах навіть порівняно малі похибки можуть призводити до накопичення відхилень траєкторії, збільшення витрат робочого тіла або виникнення небажаних динамічних ефектів під час маневру. Тому алгоритм керування має одночасно забезпечувати точність, стійкість, робастність і прийнятну ефективність використання виконавчих органів.

Особливість розглянутої задачі полягає в тому, що реактивні двигуни часто працюють не як неперервні виконавчі органи, а в режимі on-off. Через це керуюча дія має дискретний характер, а класичні неперервні закони керування не можуть бути безпосередньо реалізовані без додаткового узгодження з фізичною структурою двигунів. Для такого узгодження традиційно застосовують імпульсну модуляцію, зокрема широтно-імпульсну модуляцію (pulse-width modulation, PWM) або широтно-частотну імпульсну модуляцію (pulse-width pulse-frequency modulation, PWPF). Однак точність модуляції залежить від роздільної здатності імпульсів, а надто часті вмикання двигунів небажані через ресурсні обмеження та витрати робочого тіла [4, 5].

Навчання з підкріпленням є перспективним інструментом для цієї задачі, оскільки дає змогу формувати політику керування за результатами взаємодії агента з математичною моделлю об'єкта [6, 7]. У цій роботі як базовий алгоритм навчання використовується метод проксимальної оптимізації політики (Proximal Policy Optimization, PPO). Водночас застосування PPO у задачах керування космічними апаратами не повинно зводитися до використання нейронної мережі як повністю

непрозорої «чорної скриньки». Для практичного застосування важливо зберегти зв'язок із аналітичними методами теорії керування, зокрема з методами забезпечення стійкості та робастності.

Метою доповіді є узагальнення двох методів використання НЗП для релейного керування відносним рухом космічних апаратів. Перший метод спрямований на введення аналітичної умови стійкості в процес навчання. Другий метод спрямований на підвищення робастності за рахунок цілеспрямованого ускладнення умов навчання через модуль збурень. Надалі ці методи розглядаються як два самостійні напрями: вони можуть бути використані окремо, а можуть бути об'єднані в єдиній схемі за умови додаткової формалізації такої постановки.

1. Постановка проблеми та модель керованого руху

Розглядається задача керування відносним рухом сервісного космічного апарата поблизу цільового об'єкта. Динаміку руху описують в орбітальній системі координат. У загальному випадку вона включає рух у площині орбіти та рух поза площиною орбіти. Після лінеаризації, нормування змінних стану та дискретизації модель може бути подана у вигляді

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k), \quad U(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \end{bmatrix}^T \quad (1)$$

Тут $X(k)$ - нормований вектор стану, що містить координати та швидкості відносного руху; A і B - дискретні матриці динаміки; $U(k)$ - вектор керуючих дій. Нормування стану є важливим для навчання нейронних мереж, оскільки компоненти стану мають різні фізичні розмірності та можуть суттєво відрізнятися за масштабом.

Для релейних двигунів кожна компонента керування може набувати лише скінченної кількості значень. У нормованому поданні це можна записати як

$$u_i(k) \in \{-1, 0, 1\}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (2)$$

Значення -1, 0 та 1 відповідають зворотній тязі, вимкненому двигуну та прямій тязі відповідно. Така дискретність створює ключову складність: потрібно не лише стабілізувати рух, а й уникнути надмірно частих перемикань, які погіршують ресурс виконавчих органів і можуть збільшувати витрати робочого тіла.

Окремою вимогою є робастність. Політика, навчена лише в ідеалізованих умовах, може демонструвати добру якість у номінальній симуляції, але втрачати працездатність при появі збурень, похибок моделі або варіацій параметрів. Для космічних систем це критично, оскільки реальне середовище містить невизначеності: зміну маси, похибки параметрів, зовнішні збурення, а також неточності реалізації керування.

2. НЗП-керування з умовою стійкості

Перший метод дослідження спрямований на поєднання НЗП із аналітичною структурою керування у ковзному режимі. Керування у ковзному режимі належить до методів зі змінною структурою, у яких керуюча дія формує рух системи до заданої поверхні ковзання, а після її досягнення підтримує рух поблизу цієї поверхні [3]. Така ідея природно узгоджується з релейними виконавчими органами, оскільки закон керування має перемикальну структуру.

У цьому підході агент НЗП формує релейну політику керування без попереднього синтезу неперервного закону керування. Поточний нормований стан системи подається на вхід нейронної мережі-актора, яка визначає керуючу дію або ймовірності вибору допустимих релейних дій:

$$U(k) = \pi_{\theta}(X(k)), \quad (3)$$

де π_{θ} – політика керування, що реалізована нейронною мережею з параметрами θ . Для кожного каналу керування допустимі дії мають дискретний характер

$$u_i(k) = \begin{cases} f_t, & \text{якщо } \sigma_i(k) < -\varepsilon_i \\ 0, & \text{якщо } |\sigma_i(k)| \leq \varepsilon_i \\ -f_t, & \text{якщо } \sigma_i(k) > \varepsilon_i \end{cases} \quad (4)$$

Значення $-f_t$, 0 та f_t відповідають зворотній тязі, вимкненому двигуну та прямій тязі відповідно. Таким чином, агент безпосередньо навчається приймати рішення про вмикання або вимикання реактивних двигунів. Це дає змогу уникнути проміжного етапу, коли спочатку формується неперервне керування, а потім воно перетворюється на імпульсні сигнали за допомогою модулятора тяги.

Ключовим елементом методу є включення умови стійкості безпосередньо у функцію вартості. Для цього використовується дискретна функція Ляпунова $V(k)$. Якщо на черговому кроці значення функції зростає, агент отримує додатковий штраф. Узагальнену локальну вартість можна записати так:

$$J(k) = X^T(k)QX(k) + U^T(k)RU(k) + K_L \max(0, V(k+1) - V(k)) \quad (5)$$

Перший доданок штрафує відхилення стану від бажаного руху, другий - використання керуючих дій, а третій - порушення умови спадання дискретної функції Ляпунова. Якщо ж функція Ляпунова зростає, штраф збільшує локальну вартість і спрямовує навчання в область дій, сумісних із бажаною умовою стійкості.

Для оптимізації політики використовується алгоритм РРО, який є одним із поширених методів навчання політик завдяки стабілізованому оновленню параметрів агента [6]. Важливо, що архітектура агента в цьому методі не є надмірно складною: кількість навчуваних параметрів обмежується параметрами, які мають інтерпретацію в термінах ковзного керування. Це полегшує аналіз отриманої політики та зменшує ризик неконтрольованої поведінки нейронної мережі.

Варіювання вагових матриць Q і R дає змогу забезпечувати компроміс між швидкістю переходу, точністю та кількістю ввімкнень двигунів. Збільшення ваги керування зазвичай зменшує кількість перемикачів, але може впливати на швидкість зближення. Збільшення ваги швидкостей робить перехід більш обережним і повільним. Такі результати свідчать, що навчувані параметри не є повністю непрозорими, а зберігають інженерну інтерпретованість.

Окремо перевірялась робастність до параметричних невизначеностей, зокрема до зміни маси сервісного апарата. За результатами моделювання агент зберігав прийнятну якість керування при значних відхиленнях маси від номінального значення. Водночас у деяких випадках погіршувалась оптимальність за витратами робочого тіла через зростання кількості перемикачів. Це показує, що стійкість не є тотожною енергоефективності, тому практична постановка задачі має враховувати також ресурсні характеристики виконавчих органів.

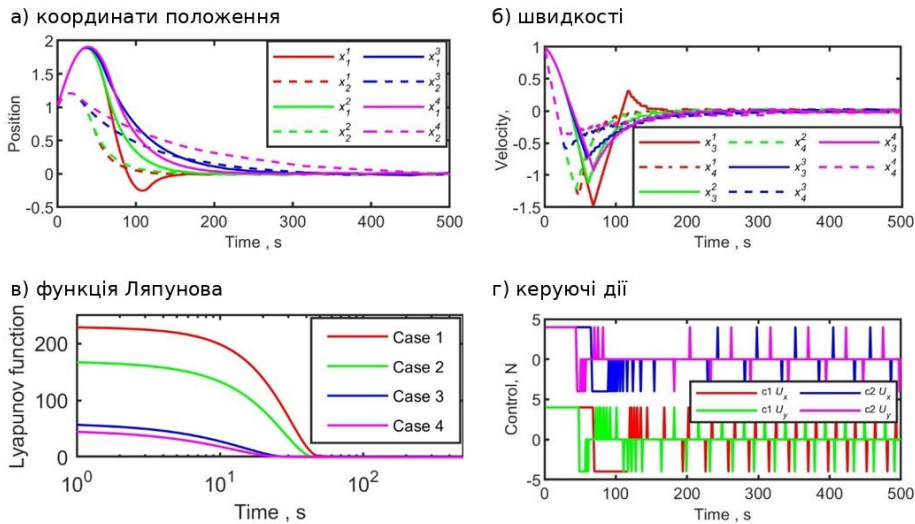


Рис. 1. Приклади числових результатів для НЗП-керування з умовою стійкості: збіжність координат і швидкостей, спадання функції Ляпунова та релейні керуючі дії. Числові результати для першого методу показують, що агент забезпечує збіжність компонентів стану до околу бажаного значення, а функції Ляпунова монотонно спадають для розглянутих випадків. Це важливо, оскільки демонструє не лише формальне включення штрафу у функцію вартості, а й фактичне виконання умови стійкості у модельних експериментах.

3. Навчання з модулем збурень

Другий метод дослідження пов'язаний із підвищенням робастності політики керування шляхом ускладнення умов навчання. Його основна ідея полягає не в додаванні випадкового збурення з наперед заданим законом, а у введенні додаткової моделі-збурювача. Ця модель генерує такі впливи, за яких основному агенту складніше виконати задачу. У результаті агент навчається не лише в номінальному середовищі, а й у ситуаціях, наближених до несприятливих або невизначених режимів роботи.

У спрощеному вигляді модель динаміки з урахуванням збурення можна подати як

$$X(k+1) = AX(k) + BU(k) + Ed(k), \quad d(k) = D_\phi(X(k)) \quad (6)$$

Тут $d(k)$ - збурення, сформоване додатковою моделлю D_ϕ , а E - матриця, що визначає канал входу збурення в систему. На відміну від ручного задання збурень, така схема дає змогу в процесі навчання знаходити саме ті впливи, які є складними для поточної політики. За змістом цей підхід близький до змагального навчання: основний агент намагається зменшити похибку та витрати керування, тоді як модуль збурень ускладнює динаміку.

У числових експериментах метод продемонстровано для руху в площині орбіти за нормованими координатами x_1 та x_2 . Завдання агента полягає у підльоті до заданої точки, тобто у зведенні координат до нуля. Порівнюються чотири режими: агент без модуля збурень у номінальному середовищі; той самий агент за наявності збурень;

агент, навчений із модулем збурень, у номінальному середовищі; агент, навчений із модулем збурень, за наявності збурень.

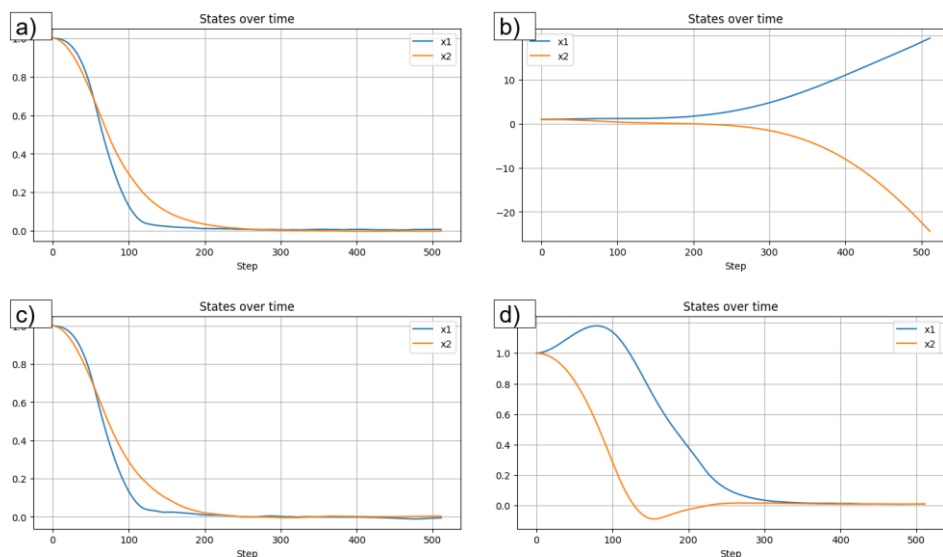


Рис. 2. Зміна нормованих координат x_1 та x_2 : а - агент без модуля збурень у номінальному режимі; б - той самий агент за наявності збурень; с - агент, навчений із модулем збурень, у номінальному режимі; д - агент, навчений із модулем збурень, за наявності збурень.

Отримані графіки показують, що політика, отримана шляхом навчання без збурювача, добре справляється із задачею в номінальній симуляції: обидві координати поступово прямують до нуля. Однак після додавання сильних збурень така сама політика втрачає стійкість. Це свідчить, що успішне навчання при номінальних умовах не забезпечує робастність у загальному випадку.

Після навчання з використанням модуля збурень агент демонструє іншу поведінку, а саме, він забезпечує стійкість руху навіть за наявності суттєвих небажаних зовнішніх збурень. Це не означає, що отримана політика є універсально робастною до будь-яких збурень, однак наявні результати підтверджують корисність ідеї: навчання в ускладненому середовищі може підвищувати стійкість політики до сценаріїв, які не були належно відпрацьовані в номінальному режимі.

У другому методі також враховується специфіка on-off керування. Політика, яка формально приводить систему до цілі, але робить це через надмірну кількість перемикачів, може бути непридатною для практичного застосування. Тому у функцію винагороди може додатково вводитися штраф за часте ввімкнення та вимкнення двигунів. Збільшення цього штрафу призводить до помітного зменшення частоти релейних дій.

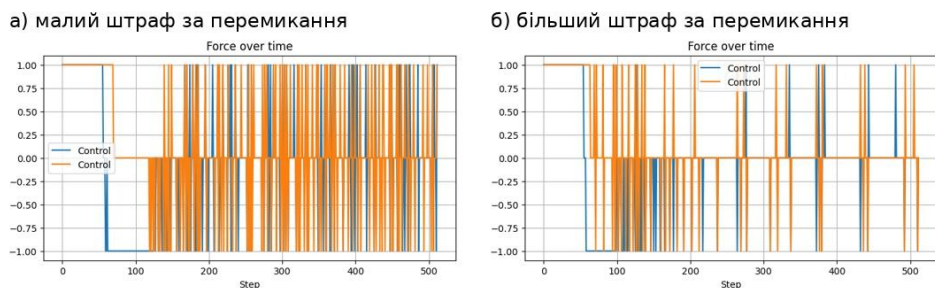


Рис. 3. Вплив штрафу за часті перемикання двигунів на структуру релейних керуючих дій: а - малий штраф; б - більший штраф.

4. Обговорення результатів

Розглянуті методи мають спільну прикладну область - релейне керування відносним рухом космічних апаратів, однак розв'язують різні аспекти проблеми. Перший метод робить акцент на стійкості та інтерпретованості. Включення умови спадання функції Ляпунова безпосередньо у функцію вартості зменшує ризик отримання політики, яка має високу числову винагороду, але суперечить базовим вимогам теорії керування.

Другий метод робить акцент на робастності до збурень. Його цінність полягає в тому, що він демонструє обмеженість навчання лише в ідеальних умовах. Для практичного керування космічним апаратом важливо, щоб агент був підготовлений до відхилень від номінальної моделі. Модуль збурень виконує роль пристрою, який цілеспрямовано формує складні сценарії під час навчання. Завдяки цьому агент має шанс навчитися політикам, які працюють не тільки в базовому випадку, а й у ширшій множині умов.

При цьому ці методи не потрібно трактувати як обов'язково взаємодоповнювальні. Вони можуть використовуватися незалежно: перший - коли головним є аналітичне забезпечення стійкості та інтерпретованості, другий - коли головною проблемою є стійкість політики до несприятливих впливів. Їх можливе поєднання є окремим перспективним напрямом: агент може навчатися в ускладненому середовищі, але при цьому мати штраф за порушення дискретної умови Ляпунова та штраф за надмірні перемикання. Така комбінація потребує додаткової перевірки, оскільки одночасне врахування стійкості, робастності та ресурсних обмежень може потребувати складних компромісів.

Висновки

1. Релейне керування відносним рухом космічних апаратів є актуальним для задач орбітального сервісу, оскільки реальні реактивні двигуни мають дискретний режим роботи, а вимоги до точності та безпеки маневру залишаються високими.

2. Метод НЗП-керування з умовою стійкості дає змогу безпосередньо формувати політики вмикання двигунів. Введення штрафу за порушення спадання функції Ляпунова спрямовує навчання в область дій, сумісних з аналітичною вимогою стійкості.

3. Числові результати першого методу свідчать про збіжність стану та монотонне спадання функцій Ляпунова в розглянутих симуляціях. Водночас параметричні відхилення можуть погіршувати економічність керування, що потребує додаткового налаштування або донавчання.

4. Метод навчання з модулем збурень підвищує робастність агента. Отримані результати показують, що політика, навчена лише в номінальних умовах, може втрачати працездатність за сильних збурень, тоді як агент, навчений із збурювачем, забезпечує стійкість.

5. Розглянуті методи можуть застосовуватися окремо. Їх поєднання є перспективним, але не обов'язковим напрямом подальших досліджень і потребує окремої перевірки стійкості, робастності та ресурсних компромісів.

1. Li W.-J., Cheng D.-Y., Liu X.-G., Wang Y.-B., Shi W.-H., Tang Z.-X., Gao F., Zeng F.-M., Chai H.-Y., Luo W.-B., Cong Q., Gao Z.-L. On-orbit service of spacecraft: A review of engineering developments. *Progress in Aerospace Sciences*. 2019. Vol. 108. P. 32–120. <https://doi.org/10.1016/j.paerosci.2019.01.004>
2. Khoroshylov S. V. Relative motion control system of spacecraft for contactless space debris removal. *Science and Innovation*. 2018. Vol. 14, No. 4. P. 5–16. <https://doi.org/10.15407/scine14.04.005>
3. Steinberger M., Horn M., Fridman L. Variable-structure systems and sliding-mode control: From theory to practice. Cham: Springer, 2020.
4. D. Davidson, K. Chan, R. McClung, and S. Hudak, Small fatigue cracks, *Compr Struct Integrity*, 4, 129–164 (2003).
5. Sorochinskii V. V., Khoroshylov S. I., Levchuk I. L., Dubovyk T. M., Huz H. M., Romanchuk O. O. On-off spacecraft relative control in sliding mode via reinforcement learning. *Technical Mechanics*. 2025. No. 4. P. 77–92. <https://doi.org/10.15407/itm2025.04.077>
6. Schulman J., Wolski F., Dhariwal P., Radford A., Klimov O. Proximal policy optimization algorithms. arXiv:1707.06347. 2017. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1707.06347>
7. Izzo D., Märten M., Pan B. A survey on artificial intelligence trends in spacecraft guidance dynamics and control. *Astrodynamics*. 2019. Vol. 3, No. 4. P. 287–299. <https://doi.org/10.1007/s42064-018-0053-6>
8. Oestreich C. E., Linares R., Gondhalekar R. Autonomous six-degree-of-freedom spacecraft docking with rotating targets via reinforcement learning. *Journal of Aerospace Information Systems*. 2021. Vol. 18, No. 7. P. 417–428. <https://doi.org/10.2514/1.I010914>
9. Hovell K., Ulrich S. On deep reinforcement learning for spacecraft guidance. AIAA SciTech 2020 Forum. 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-1600>
10. Robinett R. D., Parker G. G., Schaub H., Junkins J. L. Lyapunov optimal saturated control for nonlinear systems. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 1997. Vol. 20, No. 6. P. 1083–1088. <https://doi.org/10.2514/2.4189>

Нейромережеві сурогатні моделі для оперативного прогнозування напруженого стану та оцінки цілісності патрубків ВВЕР-1000

Я. Дубик^{а,в1}, В. Антонченко^{а,б}, В. Ясній^б

^аТОВ «ІПП-ЦЕНТР», Київ, Україна

^бТернопільський національний технічний університет ім. Івана Пулюя, Тернопіль, Україна

^вФізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, Львів, Україна

¹ dubyk-yr@ipp-centre.com.ua

Розглядається гібридна сурогатна модель на основі штучних нейронних мереж для оцінки цілісності патрубової зони корпусу реактора ВВЕР-1000 в умовах термошоку. Запропонований підхід базується на прогнозуванні розподілів температури та напружень по товщині стінки бездефектного вузла. Це дозволяє інтегрувати метод коефіцієнтів впливу для оперативного визначення параметрів механіки руйнування. Модель побудована на архітектурі багатовихідної нейронної мережі прямого поширення з урахуванням фізично-орієнтованих ознак, зокрема пошарових термічних градієнтів та динамічних характеристик теплової інерції. Встановлено, що використання розробленої моделі забезпечує високу точність відтворення напруженого стану ($R^2 > 0.99$) та здатність коректно фіксувати розриви напружень на межі біметалевого інтерфейсу «наплавлення — основний метал». Реалізація даної методики дозволяє скоротити час обчислень на п'ять порядків порівняно з традиційним методом скінченних елементів, що створює підґрунтя для розробки систем онлайн-моніторингу та цифрових двійників обладнання атомних електростанцій у режимі реального часу.

Ключові слова: штучні нейронні мережі, сурогатне модель, патрубок ВВЕР-1000, напружено-деформований стан, крихка міцність

Вступ

Оцінка цілісності патрубової зони корпусу реактора (КР) в умовах термошоку є критичним фактором для забезпечення безпечної експлуатації та продовження терміну служби енергоблоків ВВЕР-1000 [1]. Аварійні сценарії з термоударом характеризуються різким зниженням температури теплоносія при збереженні високого внутрішнього тиску. Це призводить до появи високих розтягувальних напружень на внутрішній поверхні. При цьому складна геометрія патрубка та наявність антикорозійного наплавлення створюють зони високої концентрації напружень та спричиняють їх нелінійний розподіл по товщині стінки, що суттєво ускладнює розрахункову оцінку цілісності вузла.

У сучасній інженерній практиці все більшої актуальності набуває розробка сурогатних моделей, що дозволяють замінити ресурсомісткі чисельні розрахунки швидкими інтелектуальними алгоритмами. Зокрема, у роботі [2] продемонстровано успішну реалізацію штучних нейронних мереж для оцінки довговічності сталевих компонентів на основі попередньо згенерованих даних методу скінченних елементів (МСЕ). Такий підхід дозволяє зберегти високу фізичну достовірність результатів при суттєвому прискоренні процесу оцінки стану конструкції. В задачах механіки руйнування корпусів реакторів сурогатні моделі для обчислення КІН — зокрема на основі поліноміальних поверхонь відгуку, кригінгу та інтерполяційних методів —

вивчалися у контексті ймовірнісного аналізу цілісності [3]. Підхід на основі машинного навчання у поєднанні з обробкою сигналів для прогнозування інтенсивності напружень в корпусі реактора при сейсмічних впливах досліджено у роботі [4]. Паралельно інтенсивно розвивається концепція цифрових двійників обладнання АЕС: із застосуванням глибоких операторних мереж (DeepONet) продемонстровано можливість прогнозування теплогідравлічних параметрів у режимі реального часу зі швидкістю, що перевищує швидкість прямого чисельного розрахунку на п'ять порядків [5].

Особливо гостро потреба в таких рішеннях постає в задачах механіки руйнування, де обов'язковою умовою перевірки цілісності обладнання є визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) для ймовірних піднаплавкових або поверхневих тріщин. Хоча моделювання методом МСЕ забезпечує високу точність, його широке застосування в системах онлайн моніторингу обмежене надмірними обчислювальними витратами. Необхідність використання надзвичайно дрібних сіток у вершині тріщини, а також складність врахування нелінійної термомеханічної поведінки на межі розподілу «наплавлення – основний метал», робить багатоваріантні дослідження чутливості практично неможливими в реальному часі.

Для подолання цих обмежень у даній роботі запропоновано високоточну сурогатну модель на основі машинного навчання. На відміну від традиційних чисельних методів, розроблена модель здатна ефективно відтворювати складні розподіли напружень включаючи «стрибки напружень» характерні для біметалевих компонентів та ефекти теплової інерційності. Завдяки використанню вдосконалених алгоритмів регресії, навчених на верифікованій базі результатів 3D-MSE моделювання, дане дослідження демонструє успішний перехід від тривалих чисельних розрахунків до миттєвої оцінки параметрів механіки руйнування. Це дозволяє оперативно визначати запаси міцності відповідно до сучасних нормативних вимог, зокрема СОУ 177:2023[6].

1. Методологія

В основі запропонованого підходу лежить розробка гібридної сурогатної моделі, яка поєднує можливості штучних нейронних мереж та класичних методів механіки руйнування. На відміну від прямого прогнозування коефіцієнтів інтенсивності напружень K_I , дана методологія базується на прогнозуванні повнопрофільних розподілів температури T та напружень σ по товщині стінки патрубку. Такий вибір цільових параметрів дозволяє уникнути «обчислювальної пастки», пов'язаної з необхідністю побудови деталізованих скінченно-елементних сіток із тріщинами для кожної глибини та форми дефекту. Замість цього, ML-модель виступає універсальним генератором фізичного поля для «суцільного» тіла, а розрахунок КІН для будь-якої кількості геометричних конфігурацій дефектів виконується миттєво на основі отриманих профілів напружень.

Для формування надійної навчальної вибірки та подальшої верифікації було реалізовано етап підготовки даних, що включав понад 60 розрахунків перехідних процесів в середовищі ANSYS. З цієї сукупності 20 сценаріїв використовувалися безпосередньо для навчання нейронної мережі, тоді як решта розрахунків була використана для незалежного пакетного тестування працездатності та точності моделі.

Вхідний вектор ознак було сформовано із семи ключових предикторів, що включають не лише граничні умови (внутрішній тиск, температура теплоносія та коефіцієнт тепловіддачі — НТС), а й динамічні характеристики процесу. Зокрема, для врахування теплової інерційності та складного характеру теплопередачі в біметалевих компонентах було впроваджено спеціалізовані термічні градієнти, розраховані окремо для шарів наплавлення та основного металу, а також показники швидкості охолодження.

Архітектура розробленої моделі (див. Рис. 1) базується на багатовихідній нейронній мережі прямого поширення з ієрархічною структурою прихованих шарів 45-25. Мережа містить 402 вихідні вузли, що дозволяє одночасно прогнозувати деталізовані вектори температур і напружень по всій товщині стінки. Навчання моделі здійснювалося за допомогою алгоритму Левенберга-Марквардта, який забезпечує швидку збіжність та високу стабільність при вирішенні задач нелінійної регресії [7].

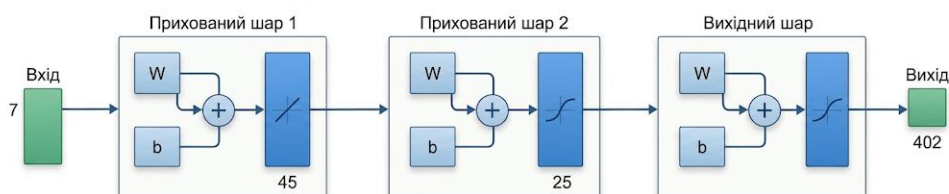


Рис. 1. Архітектура нейронної мережі

Заключний етап гібридного визначення КІН реалізується шляхом поєднання спрогнозованих нейромережею профілів напружень із процедурою поліноміальної апроксимації. Отримані коефіцієнти поліномів інтегруються з попередньо розрахованими таблицями коефіцієнтів впливу. Такий підхід дозволяє трансформувати вихідні дані ML-моделі у високоточні значення параметрів механіки руйнування в режимі реального часу, забезпечуючи повну відповідність фізичним законам розподілу навантажень у зоні дефекту.

2. Результати

Аналіз результатів впровадження розробленої гібридної моделі підтвердив її високу здатність до апроксимації складних термомеханічних процесів у патрубковій зоні КР. Оцінка ефективності проводилася за трьома ключовими векторами: точність прогнозування фізичних полів, стійкість моделі до специфічних особливостей біметалевих структур та обчислювальна швидкість.

Здатність моделі відтворювати часову еволюцію термічного стану та напруженого стану була перевірена на найбільш жорстких сценаріях термошоку. Як видно з динаміки зміни параметрів у часі (Рис. 2 та Рис. 3), нейронна мережа демонструє виняткову прогнозну здатність на тестових сценаріях, які не використовувалися під час навчання.

Статистичний аналіз часових рядів показав, що коефіцієнт детермінації для температурних полів склав $R^2 = 0.979$, а для профілів напружень досяг значення 0.996. Середньоквадратична помилка (RMSE) для напружень у часовому вимірі залишилася на рівні 9.67 Па. У контексті інженерних розрахунків КР, де рівні напружень сягають

сотень мегапаскалів, така похибка є статистично несуттєвою. Це доводить, що розроблена модель коректно описує стан в конструкції і забезпечує високу якість результатів на кожному етапі розрахунку аварійного сценарію

На рис. 4 представлено профілі температури та напружень по товщині стінки патрубку в моменти найбільшого термічного навантаження. Отримані дані підтверджують здатність моделі коректно відтворювати поведінку матеріалу на межі «наплавлення — основний метал».

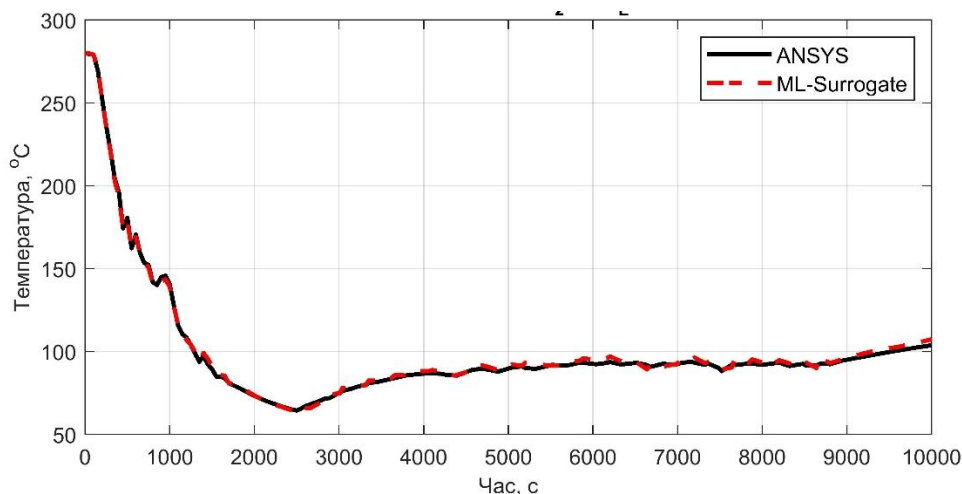


Рис. 2. Розподіл температури у часі для точки на поверхні

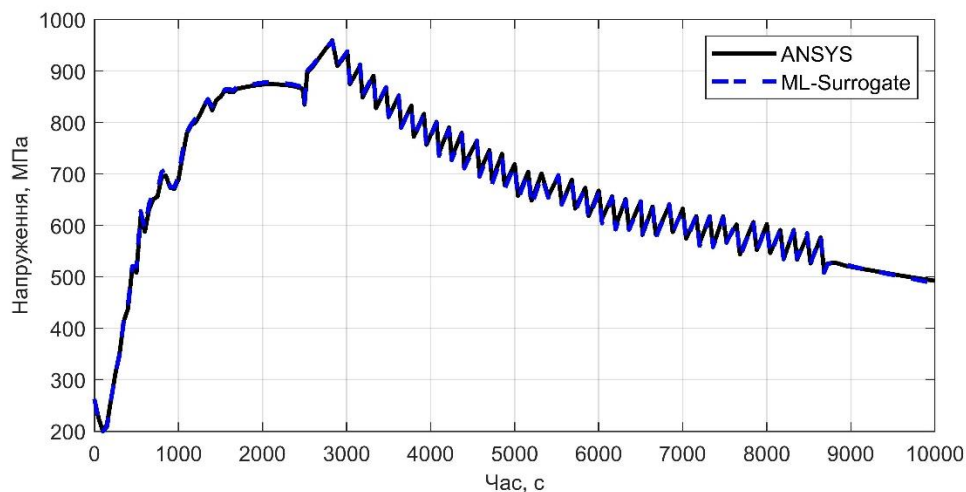


Рис. 3. Розподіл напружень у часі для точки на поверхні

Завдяки впровадженню специфічних пошарових термічних градієнтів, нейронна мережа чітко фіксує «стрибки» напружень на межі розподілу шарів (що наочно відображено на рис. 3). Оскільки саме зона антикорозійного наплавлення та прилеглі до неї шари основного металу є найбільш критичними для появи тріщин, така точність моделі є вирішальною для отримання достовірних результатів при оцінці ресурсу.

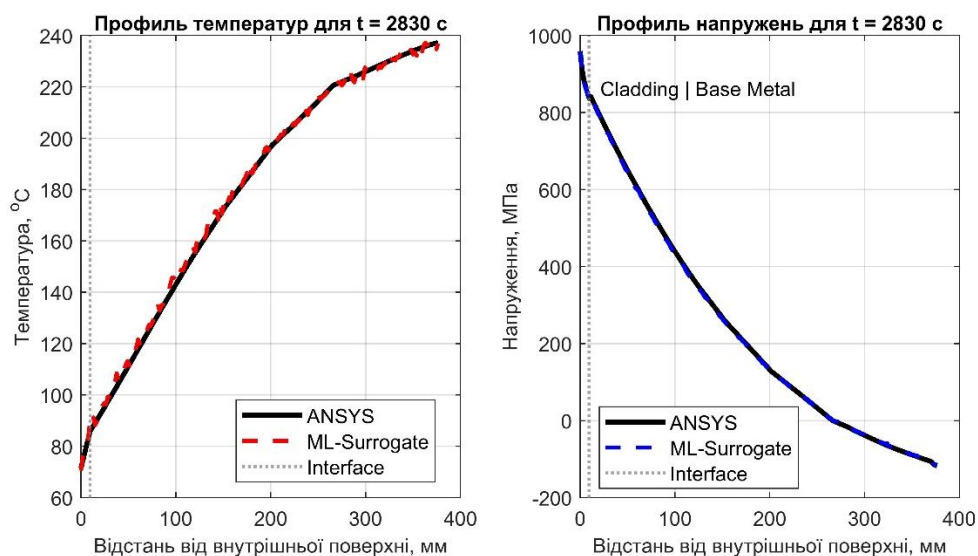


Рис. 4. Розподіл температур на напружень по товщині стінки в момент часу з найбільшими напруженнями

Впровадження розробленого гібридного підходу призвело до радикального скорочення часу обчислень. У той час як традиційне моделювання одного повного перехідного розрахунку аварійного сценарію займає декілька годин, сурогатна модель виконує аналогічний обсяг обчислень менш ніж за 100 мілісекунд. Таке прискорення більш ніж у 10^5 разів без втрати інженерної точності відкриває шлях до створення систем онлайн-моніторингу стану обладнання та проведення масових імовірнісних розрахунків руйнування в режимі реального часу, що повністю відповідає вимогам сучасних нормативних документів.

Висновки

Розроблена сурогатна модель є надійною та високопродуктивною альтернативою традиційному методу скінченних елементів для аналізу опору крихкому руйнуванню патрубкових зон КР ВВЕР-1000. Ключовою перевагою обраного підходу є прогнозування повних профілів напружень в стінці КР замість прямих значень КІН. Це не лише зберігає фізичну змістовність результатів, а й дозволяє проводити швидку оцінку дефектів будь-яких розмірів та форм без потреби у повторному навчанні нейронної мережі для кожної нової тріщини. Такий підхід радикально спрощує етап підготовки даних, оскільки зникає необхідність у створенні сотень складних скінченно-елементних сіток із дефектами.

Отримані показники точності ($R^2 > 0.99$ для напружень) та мінімальна середня похибка підтверджують валідність використання архітектури ANN 45-25 як надійного інструменту для задач ядерної безпеки. Особлива значущість моделі полягає у здатності точно фіксувати стрибки напружень на межі біметалевого інтерфейсу та враховувати ефекти теплової інерції, що є критично важливим для аналізу аварійних режимів розхолодження.

Суттєве прискорення розрахунків — з декількох годин до значень менше 100 мілісекунд — відкриває шлях до створення повноцінних «цифрових двійників» корпусу реактора. Подальше впровадження цієї методології дозволить суттєво розширити можливості систем онлайн-моніторингу стану обладнання, забезпечуючи підтримку прийняття рішень на атомних станціях у режимі реального часу та можливість проведення масових імовірнісних розрахунків руйнування відповідно до сучасних нормативних вимог.

1. IAEA-EBP-WWER-08 (Rev. 1), Guidelines on Pressurized Thermal Shock Analysis for WWER Nuclear Power Plants, International Atomic Energy Agency, Vienna (2006).
2. A. Crivelli, M. Rossi, M. De Felice and M. Beghini, A Surrogate Artificial Neural Network Model for Estimating the Fatigue Life of Steel Components Based on Finite Element Simulations, *Materials*, Vol. 17, No. 12, 2756, MDPI, Basel (2024). <https://doi.org/10.3390/ma18122756>
3. F.A. Simonen, M.T. Anderson, B.R. Hanson and S.R. Doctor, Surrogate Model Development and Validation for Reliability Analysis of Reactor Pressure Vessels, *Proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference*, PVP2016-63736, Vancouver (2016). <https://doi.org/10.1115/PVP2016-63341>
4. S.Y. Je, Y.-S. Chang and S.-S. Kang, A Stress Intensity Predictive Model for Reactor Pressure Vessel via Coupled Signal Processing and Machine Learning Model, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 37, pp. 2635–2644 (2023). <https://doi.org/10.1007/s12206-023-0514-6>
5. M.R. Amir, R. Akhavan-Tabatabaei, J.M. Lauber and C. Xu, Deep Neural Operator-Driven Real-Time Inference to Enable Digital Twin Solutions for Nuclear Energy Systems, *Scientific Reports*, Vol. 14, 2084 (2024). <https://doi.org/10.1038/s41598-024-51984-x>.
6. СОУ 177:2023, Розрахунки на міцність та ресурс елементів обладнання і трубопроводів атомних станцій. Загальні вимоги, ДП «НАЕК «Енергоатом», Київ (2023).
7. Deep Learning Toolbox User's Guide (R2023b). — Natick, Massachusetts : The MathWorks, Inc., 2023. — 2154 p. URL: <https://www.mathworks.com/help/deeplearning/>

Аналіз досвіду проектування комбінованих ракетних двигунів

М. О. Катренко, Г. М. Шевельова¹

Інститут технічної механіки НАН України і ДКА України, Дніпро, Україна

¹hanna.shevelova@gmail.com

У роботі узагальнено досвід проектування комбінованих ракетних двигунів та визначено основні закономірності їхнього розвитку. Показано, що найбільш ефективні рішення базуються на поєднанні різних режимів роботи, яке дає змогу підвищити адаптивність і розширити діапазон застосування двигуна. Встановлено, що ключовими факторами успішного проектування є вибір паливних компонентів, забезпечення стабільного горіння, зниження теплових навантажень і підвищення надійності. На основі аналізу джерел виявлено, що перспективність комбінованих схем визначається балансом між питомими характеристиками, масогабаритними обмеженнями та технологічністю виготовлення. Окреслено основні напрями подальших досліджень, пов'язані з удосконаленням конструкцій, моделюванням робочих процесів і підвищенням експлуатаційної безпеки.

Ключові слова: комбіновані ракетні двигуни, проектування, конструктивні рішення, паливо, стабільність горіння, теплові навантаження, надійність, ефективність.

Вступ

Потреба у створенні силових установок для польоту в широкому діапазоні швидкостей (від старту до гіперзвуку) та висот для атмосферно-космічних літальних апаратів (АКЛА) зумовлює зростаючий інтерес до комбінованих ракетних двигунів (КРД) [1-3]. Класичні рідинні ракетні двигуни (РРД) забезпечують високу тягу, проте мають обмежену паливну економічність, тоді як прямоточні повітряно-реактивні двигуни (ППРД) ефективні лише на надзвукових швидкостях і потребують розгону [4-5]. Між цими класами існує «мертва зона» характеристик, недосяжна для кожного типу окремо, що обґрунтовує доцільність комбінованих схем [1-3].

У цьому огляді КРД розглядаються як інтегровані системи, де ракетний контур (на рідкому або твердому паливі) об'єднаний із повітряно-реактивним трактом у спільному газодинамічному каналі [1, 2, 4]. Це об'єднання дозволяє використовувати переваги обох типів силових установок, але одночасно створює складні проблеми внутрішньої аеродинаміки, теплового захисту та узгодження режимів роботи [6-8]. Метою роботи є систематизація досвіду проектування КРД, аналіз типових інженерних компромісів та огляд сучасних методів моделювання, що використовуються для мінімізації ризиків при розробці таких систем.

1. Терміни, означення та класифікаційні підходи

В основі аналізу лежить поняття конструктивної та газодинамічної єдності: продукти згоряння ракетного палива та атмосферне повітря взаємодіють у спільному або жорстко зв'язаному каналі, де режими (ракетний, ежекторний, прямоточний) реалізуються шляхом зміни умов подачі компонентів. Такий підхід виключає з розгляду системи «рознесеної» конструкції, де ракетний і повітряно-реактивний двигуни працюють незалежно на одному носії [1, 2].

Принципова відмінність комбінованих ракетних двигунів від класичних ракетних та прямоточних схем полягає у поєднанні автономного ракетного контуру з використанням атмосферного повітря на окремих етапах польоту, що узагальнено представлено на рис. 1.

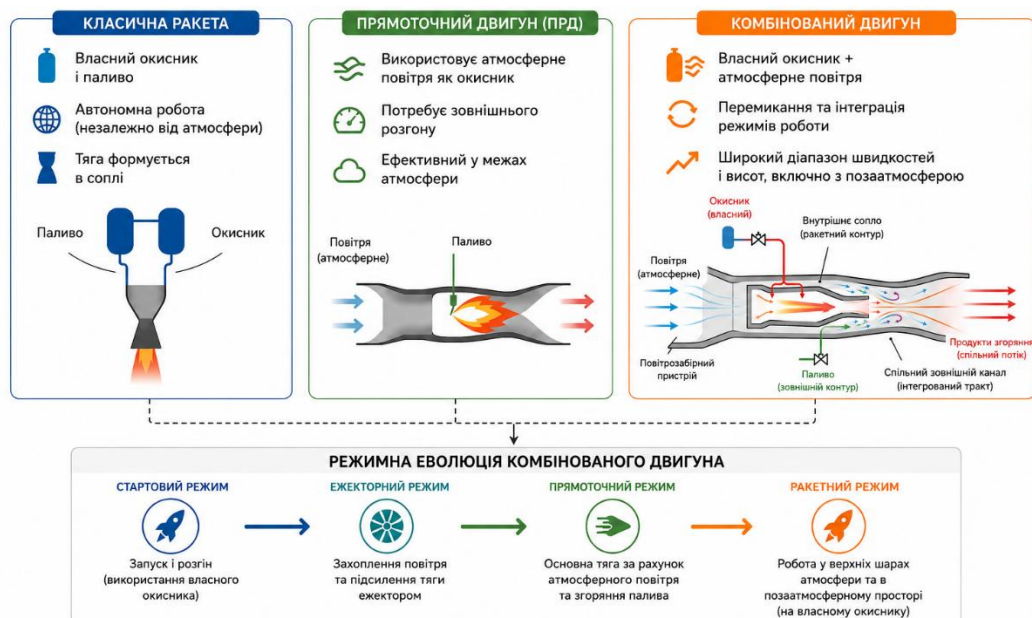


Рис. 1. Принципова відмінність комбінованого ракетного двигуна від традиційних схем

Класифікація КРД здійснюється за двома ключовими критеріями (табл. 1):

За типом ракетного контуру: рідинні КРД (забезпечують гнучке дроселювання) та твердопаливні КРД (конструктивна простота, висока надійність) [5, 9].

За ступенем інтеграції: від систем із частковим використанням повітря (ежекторні) до повністю інтегрованих схем, де елементи конструкції виконують декілька функцій одночасно [1, 3, 4].

Гібридні ракетні двигуни (без забору повітря) розглядаються лише як фон для порівняння через специфіку процесів у камері згоряння.

2. Історія розвитку та еволюція підходів

Еволюція КРД нерозривно пов'язана з теорією газових ежекторів. Початкові одномірні моделі, які базувалися на допущеннях про нестисливість потоку та рівність тисків, виявилися недостатніми для опису критичних режимів з високими перепадами тиску [7, 8]. Перехід до багатовимірного чисельного моделювання дозволив глибше вивчити ефекти теплової запірки та неоднорідності полів швидкостей, що стало критичним для ракетно-прямоточних двигунів (РПД) [9-11].

Історичний аналіз показує, що перші інтегральні РПД твердого палива (де заряд є одночасно газогенератором) дозволили значно зменшити масогабаритні показники тактичних ракет. Однак подальший розвиток АКЛІА поставив нові виклики: створення двигунів, здатних послідовно працювати в режимах ракетного прискорювача,

ежекторного двигуна та гіперзвукового ППРД [1-3]. Це вимагало переходу від «модульного» проектування до створення єдиної газодинамічної схеми, що здатна мінімізувати втрати тиску на всіх етапах польоту.

Таблиця 1

Класифікація комбінованих ракетних двигунів за основними конструктивними ознаками

Ознака класифікації	Тип / підклас	Вплив на проектування
Тип ракетного контуру	Рідинний ракетний контур	Широке дроселювання, точне керування тягою, але складні системи подачі палива та охолодження
	Твердопаливний / інтегральний РПД	Простота конструкції, висока надійність, але обмежена керованість і проблеми регресії заряду
Ступінь інтеграції контурів	Окремі тракти	Менша взаємозалежність систем, простіше моделювання
	Частково інтегровані	Компроміс між складністю та ефективністю
	Повністю інтегровані	Максимальна ефективність, але складні перехідні режими та теплові проблеми

3. Основні конструктивні схеми та робочі процеси комбінованих ракетних двигунів

Конструктивна різноманітність комбінованих ракетних двигунів визначається насамперед способом поєднання ракетного й повітряно-реактивного контурів у спільному газодинамічному тракті [1, 2, 4].

З погляду робочих процесів характерною рисою більшості комбінованих ракетних двигунів є послідовна зміна домінуючого механізму створення тяги залежно від числа Маха й висоти польоту. На стартових і дозвукових режимах головну роль відіграє ракетний контур, який працює в умовах обмеженого підсмоктування повітря, фактично забезпечуючи тягу незалежно від атмосферних умов [4, 5]. У надзвуковому діапазоні зростає внесок прямооточного тракту: повітрязбірник стискає забране повітря, продукти згоряння ракетного палива слугують джерелом енергії для допалювання паливно-повітряної суміші, а витрата палива на одиницю тяги зменшується. На великих висотах і за умов розрідженої атмосфери прямооточний режим поступово втрачає ефективність, і двигун переходить до фактично ракетного режиму з мінімальним використанням атмосферного повітря, що вимагає забезпечення прийнятної ефективності сопла в широкому діапазоні тисків [4, 5, 7].

Порівняння зазначених схем показує, що вибір конкретної конструкції є результатом компромісу між масогабаритними характеристиками, маневреністю по режимах і складністю забезпечення надійної роботи [1, 3, 4]. Ракетно-прямоточні двигуни на рідкому паливі забезпечують кращу керованість тяги та можливість гнучкого регулювання перехідних режимів, але вимагають складних систем подачі й охолодження, що збільшує масу та вартість. Інтегральні твердопаливні схеми простіші конструктивно й вигідніші для одноразових або обмежено багаторазових застосувань,

однак їхня робота сильно залежить від властивостей заряду й умов горіння, що ускладнює точне прогнозування характеристик на всій траєкторії [9]. Ежекторні комбіновані двигуни потенційно дозволяють отримати високий коефіцієнт підсмоктування й використовувати атмосферне повітря як додатковий робочий агент, але надзвичайно чутливі до геометричних і режимних параметрів, що ставить жорсткі вимоги до точності проектування й експериментальної відпрацьованості. Саме на фоні цих компромісів у подальших розділах доцільно аналізувати конкретні інженерні рішення й методики проектування, спрямовані на пом'якшення вказаних обмежень [7, 10].

Таблиця 2

Порівняльна характеристика основних конструктивних схем комбінованих ракетних двигунів

Тип схеми	Особливості конструкції	Переваги	Недоліки	Типові сфери застосування
Ракетно-прямоточна на рідкому паливі (РРД + ПРД)	Центральне / кільцеве розміщення РРД; ежекція повітря продуктами згоряння; багаторежимне сопло	Широке дроселювання; висока керованість; ефективність на надзвукових режимах	Складна система подачі; високі теплові навантаження; ризик теплового запирання	Тактичні ракети; атмосферні та аерокосмічні ЛА
Інтегральний ракетно-прямоточний двигун твердого палива (ІРПД)	Паливний заряд формує канал; осьові / кільцеві / багатоканальні заряди; регресія палива	Компактність; менша маса; висока надійність	Обмежене керування; нестабільність через регресію; ризик ерозії	Тактичні, протикорабельні, протиповітряні ракети
Комбінований ракетно-повітряно-реактивний двигун з ежекторними елементами	Підсмоктування повітря; спільна камера змішування; багаторежимна робота	Зниження витрати палива; багаторежимність; висока ефективність	Чутливість до геометрії; складне моделювання; ризик теплового запирання	Багаторазові носії; атмосферно-космічні системи

4. Аналіз досвіду проектування та інженерні проблеми

Ключові труднощі проектування концентруються у трьох взаємопов'язаних вузлах:

Геометрія ежекторно-змішувальних трактів: Оптимізація довжини та профілю камери змішування є критичною. Занадто короткі камери не забезпечують повного змішування, тоді як надмірне подовження призводить до невинуватених втрат. Конічні камери показують вищий коефіцієнт ежекції, але вони більш чутливі до відхилень у режимах роботи та мають вищий ризик «теплової запірки» на виході [8, 10].

Горіння та теплове навантаження: В інтегральних твердопаливних системах регресія заряду змінює геометрію каналу динамічно, що створює нелінійні звороти зв'язки між внутрішньою балістикою та газодинамікою [9]. Для РРД-систем

проблемою є забезпечення стабільності горіння при глибокому дроселюванні, що зазвичай супроводжується погіршенням розпилю палива [5].

Системи подачі: У рідинних КРД прагнення максимізувати тягу ракетного контуру конфліктує зі стійкістю роботи ППРД-тракту. Впровадження адаптивних систем керування входом та подачею палива вимагає значного ускладнення бортового обладнання, що знижує загальну надійність виробу [3, 10].

5. Сучасний стан досліджень і перспективи

Сьогодні домінують два напрямки: вдосконалення інтегральних твердопаливних РПД для тактичних комплексів (де досягнуто високої технологічної готовності) та розробка рідинних КРД для перспективних АКЛА [3, 12, 13].

Головним методологічним зрушенням є інтеграція багатодисциплінарної оптимізації (MDO), де одночасно враховуються аеродинаміка, термодинаміка та траєкторія польоту. Сучасні роботи підкреслюють, що розрізнені підходи до проектування окремих вузлів більше не є ефективними. Найперспективнішими напрямками є впровадження адаптивного керування режимами в реальному часі та використання новітніх матеріалів із теплозахисними властивостями для мінімізації маси двигуна [13].

Висновки

Аналіз досвіду проектування доводить, що КРД є ефективним рішенням для розширення експлуатаційного діапазону літальних апаратів. Проте відсутність єдиної верифікованої методики проектування, яка б коректно описувала перехідні режими, залишається головним стримуючим фактором. Наступні кроки в цій галузі мають базуватися на синтезі високоточного чисельного моделювання та створенні «проектних» моделей, які поєднують необхідну точність із розрахунковою ефективністю для швидкого відпрацювання нових конфігурацій.

1. Mitani, T., Chinzei, N., Kanda, T., and Kudo, K. *Development of Combined-Cycle Propulsion Systems for Space Transportation*. Acta Astronautica, 45(10), 567–576, 1999.
2. Olds, J. R., Bradford, J. E., and Charania, A. C. *RBCC Propulsion System Analysis for Single-Stage-to-Orbit Vehicles*. Journal of Propulsion and Power, 17(6), 1188–1195, 2001.
3. Strutz, R. C., and Brown, G. V. *Rocket-Based Combined Cycle Engine Development Status*. Journal of Propulsion and Power, 18(1), 20–30, 2002.
4. Humble, R. W., Henry, G. N., and Larson, W. J. *Space Propulsion Analysis and Design*. McGraw-Hill, New York, 1995.
5. Sutton, G. P., and Biblarz, O. *Rocket Propulsion Elements*. 9th ed. Wiley, Hoboken, NJ, 2017.
6. Murray, R. C., and Wilson, D. R. *Thermal Management Challenges in Rocket-Based Combined-Cycle Engines*. AIAA Paper 2004-3920, 2004.
7. Mikkelsen, K. L., and Ozawa, R. I. *Design Issues for Ejector-Ramjet and Rocket-Based Combined-Cycle Engines*. Journal of Propulsion and Power, 19(6), 1033–1041, 2003.

8. Vanka, S. P., and Baurle, R. A. *Computational Modeling of Ejector and Rocket-Based Combined-Cycle Flows*. AIAA Paper 2005-3565, 2005.
9. Chiaverini, M. J., and Kuo, K. K. (eds.). *Fundamentals of Hybrid Rocket Combustion and Propulsion*. AIAA, Reston, VA, 2007.
10. Baurle, R. A. Numerical Investigation of the Isolator-Duct Flowfield in a Dual-Mode Scramjet Combustor. *Journal of Propulsion and Power*, 20(2), 289–299, 2004.
11. Curran, E. T., and Heiser, W. H. Integrated Ramjet/Rocket Propulsion for Tactical Missiles. *Journal of Propulsion and Power*, 8(2), 401–410, 1992.
12. Zhang, M., et al. *Numerical Investigation on the Effect of Fuel-Rich Degree in the RBCC Engine under the Ejector Mode*. *International Journal of Aerospace Engineering*, 2024. <https://doi.org/10.1155/2024/4340688>
13. Wang, Y., et al. *Influence of plasma-enhanced combustion on RBCC engine using URANS*. *Frontiers in Aerospace Research*, 2024. <https://doi.org/10.1038/s41598-024-81145-z>

Механічні властивості металевих матеріалів і тримка здатність в умовах дії концентраторів напружень

Ю. Я. Мешков¹, Г. П. Зіміна

Інститут металофізики ім. Г. В. Курдюмова НАН України, Київ, Україна

¹meshkov0305@gmail.com

Пропонується оригінальна концепція визначення критичної температури в'язко-крихкого переходу при руйнуванні металевих матеріалів (ММ) під дією концентраторів напружень (КН) різного типу (надрізів, тріщин тощо) з використанням базових показників міцності і пластичності при одновісному розтягуванні. Для зразків з КН визначається тримка здатність σ_{NF} при температурі повного локального поглинання пластичності ММ (T_c), коли σ_{NF} співпадає з границею плинності $\sigma_{0,2C} = \sigma_{NF}$. Критичний рівень локально поглинутої пластичності визначається параметром зламостійкості $B_{rc} = S_{Kc} / \sigma_{0,2C}$ (S_{Kc} – істинне напруження руйнування при розриві в шийці зразка при $T = T_c$). Експериментально показано, що для даного виду КН критичне значення B_{rc} лінійно зв'язано з вихідним значенням параметра зламостійкості B_r при кімнатних температурах для конструкційних сталей різної міцності ($\sigma_{0,2} = 140 \dots 2000$ МПа), пластичності ($\psi_K = 5 \dots 85\%$) і зламостійкості ($B_{rc} = 1,6 \dots 5,0$).

Зроблено висновок, що концепція критичної зламостійкості B_{rc} суттєво спрощує експериментальну методологію визначення температури в'язко-крихкого переходу T_c в порівнянні з традиційною методологією визначення референсної температури T_0 на зразках з тріщиною і застосуванням стандартизованого показника тріщиностійкості $K_{IS} = 100 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0,5}$ і може використовуватися для прискореної попередньої оцінки допустимого флюєсного ресурсу матеріалів атомної енергетики.

Ключові слова: критична температура, критичний рівень механічних властивостей, міцність, пластичність, зламостійкість, концентрація напружень.

Вступ

Мета роботи – запропонувати зручний метод визначення критерію крихкості конструкційної сталі на основі стандартних показників міцності і пластичності з застосуванням критичного показника тримкої здатності зразка з концентратором напружень (КН) σ_{NFc} .

Кожен метал має два види показників граничної міцності, що визначаються при лінійному розтягуванні гладкого зразка: і) границя пружного стану на початку плинності ($\sigma_{0,2}$) та ii) границя пружно-пластичного стану при закінченні плинності в момент розриву зразка з шийкою або без шийки (S_K). Силовий інтервал між двома показниками $\Delta S = S_K - \sigma_{0,2}$, або у вигляді безрозмірного співвідношення B_r :

$$B_r = \frac{S_K}{\sigma_{0,2}} \quad (1)$$

комплексно відображає пластичність металу у поєднанні з деформаційним зміцненням. Згідно з Холломоном [1]:

$$\frac{S_K}{\sigma_{0,2}} = \left(\frac{e_K}{0,002} \right)^n \quad (2)$$

де $e_K = \ln(1/(1-\psi_K))$; ψ_K - відносне звуження зразка при розриві; 0,002 – деформація на умовній межі плинності $\sigma_{0,2}$ ($e_{0,2} = 0,2\%$).

Комплексний показник пластичності B_r по (1) під назвою *зламостійкість* знайшов широке застосування в дослідженнях з крихкого руйнування конструкційних сталей в авторських роботах впродовж минулого десятиріччя [2-6]. Але практичне матеріалознавство впродовж останнього століття використовує суто *температурний* маркер в'язко-крихкого переходу T_C , що визначається за ознакою певної величини спеціальної механічної характеристики – ударної в'язкості KCV або тріщиностійкості K_{IC} , що потребують окремого механічного випробування в широкому інтервалі температур на спеціальних зразках з КН або з тріщинами без залучення базових механічних характеристик, таких як $\sigma_{0,2}$ чи S_K і показника тримкої здатності σ_{NF} . Показник тримкої зразка з КН σ_{NF} представляє собою номінальне (середнє) напруження розриву зразка з КН (або тріщиною).

Поставлена в роботі задача має за мету розробити методику визначення критичних показників міцності ($\sigma_{0,2C}$) і пластичності (у вимірі критичної зламостійкості $B_{rc} = S_{KC} / \sigma_{0,2C}$) при критичній температурі в'язко-крихкого переходу T_C на зразках з концентратором напружень (тріщиною) з метою запобігти можливості його крихкого руйнування. Силовим маркером критичного переходу слугує умова

$$\sigma_{0,2C} = \sigma_{NF}, \quad (3)$$

що цілком логічно, тому що руйнування при $\sigma_{0,2C} \ll \sigma_{NF}$ трактується як передчасна втрата тримкої здатності зразка з КН і як ознака крихкої поведінки металевих матеріалів (ММ).

1. Крихкість в показниках базових механічних характеристик $\sigma_{0,2}$ і S_K і тримкої здатності σ_{NF}

Найбільш показовою і інформативною є саме *температурна* залежність характеристик $\sigma_{0,2}(T)$, $S_{KC}(T)$ і $\sigma_{NF}(T)$ (рис. 1), яких цілком достатньо для визначення критичної температури T_C по (3), тому що роль властивості пластичності ММ закладено в B_r згідно з (1) і (2).

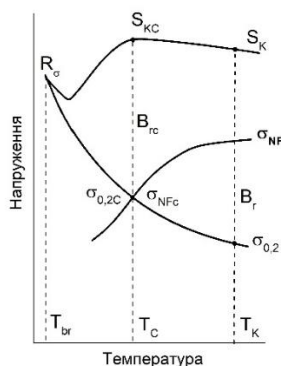


Рис. 1. Схема температурної залежності механічних характеристик міцності ($\sigma_{0,2}$), граничної міцності (S_K) і тримкої здатності (σ_{NF}).

Перехід від в'язкого до крихкого руйнування цілком логічно прив'язати до цілковитої втрати пластичності, що по різному трактується у вимірі характеристики міцності при простому (ПНС): ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) і складному (CHC): ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$) напруженому стані. Для ПНС причиною втрати пластичності є злиття характеристик $\sigma_{0,2} = S_K$ при температурі умовної крихкості T_{br} , де $\sigma_{0,2} = S_K$ і $B_r = 1$ (рис. 1). Для зразка з КН умовний стан крихкості фіксується при температурі T_C тому, що вся пластичність поглинається *локально* в зоні дії КН, коли зламостійкість ММ ще велика - $B_r > 1$ і вимірюється як критична величина B_{rc} при $T = T_C$ і $\sigma_{NF} = \sigma_{0,2}$ (рис. 1):

$$B_{rc} = \frac{S_{Kc}}{\sigma_{0,2C}} \quad (4)$$

Отже, фактично достатньо визначити параметр B_{rc} за умови втрати тримкої здатності зразка з КН до рівня межі плинності $\sigma_{0,2}$ по (3), щоб одночасно отримати два види критичних параметрів – силовий B_{rc} і температурний T_C (рис. 1).

Тому задача пошуку критичного стану зразка з КН перекладається на пошук критичного параметра B_{rc} по (4) за умовою критичної втрати тримкої здатності, що завжди доступно в методиках сканування температурних залежностей показників $\sigma_{0,2}(T)$, $S_K(T)$ і $\sigma_{NF}(T)$ для зразків з КН (рис. 1).

2. Експериментальне визначення критичного параметра B_{rc} на зразках з КН

В численних авторських роботах [2-6 і інш.] було проаналізовано результати багатьох досліджень з температурних залежностей характеристик $\sigma_{0,2}$, S_K і σ_{NF} з різних літературних джерел для конструкційних сталей, з яких було можливим визначити потрібні параметри зламостійкості B_r і B_{rc} та виявити закономірності у співвідношенні B_r з B_{rc} , властиві для кожного з видів КН в зразках з надрізами або тріщинами.

В табл. 1 наведено приклади такого аналізу на типових даних для зразків з кільцевими надрізами [7] і з тріщинами в брусах при триточковому згині [8].

З табл. 1 випливає, що в залежності від комплексу властивостей міцності ($\sigma_{0,2}$) і пластичності (зламостійкості B_r) у кожної сталі спостерігається певний показник температури переходу T_C і відповідний показник співвідношення K_s :

$$K_s = \frac{B_r}{B_{rc}} \quad (5)$$

Параметр K_s відображає долю зламостійкості, яку даний вид КН здатен цілком поглинути у зоні локальної пластичності саме в момент критичної температури в'язко - крихкого переходу T_C . Очевидно, що неможливо встановити, який-небудь зв'язок B_r безпосередньо з T_C , але між B_r і K_s для кожного виду КН цей зв'язок існує (рис. 2) [9].

Між показниками K_s і B_r для зразків з кільцевим надрізом по [7] і в призматичних балках з тріщинами при триточковому згині по [8] вдається встановити лінійну апроксимацію з цілком прийнятним коефіцієнтом кореляції R :

$$\frac{B_r}{B_{rc}} = 0,436 + 0,915B_r; \quad R = 0,99 \quad (6)$$

для кільцевих надрізів по [7];

$$\frac{B_r}{B_{rc}} = 0,806 + 0,194B_r; \quad R = 0,71 \quad (7)$$

для наведених тріщин по [8].

З (6) отримаємо величину B_{rc} :

$$B_{rc} = \frac{B_r}{a + bB_r}, \quad (8)$$

де $a=0.436$, $b=0.915$ для зразка з кільцевим надрізом згідно з [7].

Співвідношення наявного показника зламостійкості B_r з критичним B_{rc} по (5) слугує індикатором конструкційної придатності даного сплаву під дією КН даного виду: $K_s > 1$ означає, що тримка здатність зразка з КН $\sigma_{NF} > \sigma_{0.2}$, тобто крихке руйнування в даному випадку неможливе. Збільшення міцності сплаву $\sigma_{0.2}$ супроводжується зниженням зламостійкості B_r і поріг крихкості настає при умові $B_r = B_{rc}$, тобто при $K_s = 1$ ($\sigma_{NF} = \sigma_{0.2}$).

Таблиця 1.

Залежність коефіцієнту поглинання зламостійкості ММ $K_s = B_r/B_{rc}$ від B_r для зразків з кільцевими надрізами (поз. 1-7) і з тріщинами (поз. 8-16)

№	Сталь, обробка	Тип КН	$\sigma_{0.2}$, МПа	$\sigma_{0.2C}$, МПа	B_r	B_{rc}	T_C , К	$K_s = B_r/B_{rc}$
1	ст.30	Кільцевий надріз, розтяг	350	800	2.97	1.31	77	2,27
2	30ХГСА (г.в. 200 °С)		1400	1600	1.58	1.50	150	1,05
3	30ХГСА (ізот. г. 300 °С)		1500	1600	1.80	1.45	130	1,24
4	30ХГСНА (ізот. г. 200 °С)		1450	1700	1.77	1.57	83	1,13
5	30ХГСНА (ізот. г. 300 °С)		1170	1400	2.10	1.36	77	1,54
6	10Х2СВА		1600	1700	1.83	1.59	160	1,15
7	У8 (г.в. 400 °С)		1180	1300	1.58	1.54	200	1,03
8	α - Fe	Згин балки з тріщиною	140	350	5.0	2.77	140	1,85
9	У8 (відп.)		340	450	2.8	2.15	220	1,30
10	ст.3сп		160	400	3.1	2.10	147	1,47
11	10ХСНД		310	420	2.9	2.5	180	1,16
12	АК35		1027	1100	2.3	2.0	180	1,15
13	12ХН2МДФ 3Ш (лег. бором $B=0.0$)		640	700	1.97	1.81	173	1,09
14	12ХН2МДФ 3Ш (лег. бором $B=0.001$)		640	820	1.80	1.46	175	1,23
15	12ХН2МДФ 3Ш (лег. бором $B=0.0022$)		640	977	2.00	1.50	65	1,33
16	12ХН2МДФ 3Ш (лег. бором $B=0.004$)		650	968	2.17	1.67	81	1,30

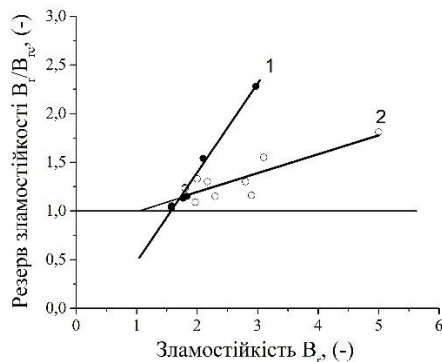


Рис. 2. Залежність залишкового резерву зламостійкості зразків з КН (K_s) від наявного рівня зламостійкості ММ (B_r). Температура випробувань $T_k \approx 300$ К. Лінія 1 - зразки з кільцевими надрізами при розтягуванні [8]; лінія 2 - зразки з тріщинами при згині [9].

Таким чином сертифікація метала щодо схильності до крихкості можлива без будь-яких випробувань зразків з КН, якщо буде сертифіковано щодо параметрів a і b в (8) сам зразок з даним видом КН, що суттєво спрощує подальшу задачу прогнозування порогу радіаційного зміцнення елементів конструкцій атомної енергетики.

4. Прогнозування порогу безпечного радіаційного зміцнення на основі критичних показників властивостей міцності ($\sigma_{0.2}$) і зламостійкості (B_r)

Для прогнозованого визначення ресурсу радіаційного зміцнення реакторної сталі типу 15Х2НМФА використовується методика Майстер кривої, згідно з якою визначають критичну, так звану, референсну температуру T_0 , при якій в'язкість руйнування K_{IC} спеціального зразка з тріщиною дорівнює $100 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ [10]. Вказана методика передбачає обов'язкове визначення параметра K_{IC} в криогенному інтервалі температур, що суттєво ускладнює експериментальну процедуру.

З викладеного вище бачимо, що процедуру визначення безпечного ресурсу радіаційного зміцнення реакторної сталі можна радикально спростити, якщо виходити не з референсної температури T_0 , а з критичної температури втрати тримкої здатності T_C , яка фіксується на температурній шкалі зміни трьох показників міцності - $\sigma_{0.2}$, S_K і σ_{NF} при умові $\sigma_{NF} = \sigma_{0.2}$, де $B_r = B_{rc}$ (рис. 1). При чому, якщо зразок з КН попередньо протестований щодо притаманних параметрів a і b по (8), то визначення B_{rc} при T_C взагалі не потребує будь-яких додаткових випробувань спеціальних чи стандартних (гладких) зразків, окрім температурної залежності показників $\sigma_{0.2}(T)$, $S_K(T)$ і ф. (8).

Схема прогнозування порогової величини флюенса Φ_{th} для зразка з КН (або тріщиною) наведена на рис. 3, що складається з двох частин. Рис. 3а представляє температурну залежність міцностей $\sigma_{0.2}$, S_K і σ_{NF} ; рис. 3б – залежність границі плинності $\sigma_{0.2}$ від набутого флюенсу Φ . Якщо в процесі нейтронного опромінення відбуваються лише субзеренні структурні зміни в металевому сплаві, а розмір зерен полікристалічної структури не змінюється, то приріст міцності $\sigma_{0.2}$ від флюенсу (рис. 3б) за своєю природою є еквівалентним температурному зміцненню при охолодженні

сталі (рис. 3а). В такому випадку критичний приріст міцності $\Delta\sigma_{0.2}(T)$ від кімнатної температури T_K до T_C придатний для оцінки критичного параметру міцності від флюенсу $\Delta\sigma_{0.2}(\Phi)$, що відображено на рис. 3б.

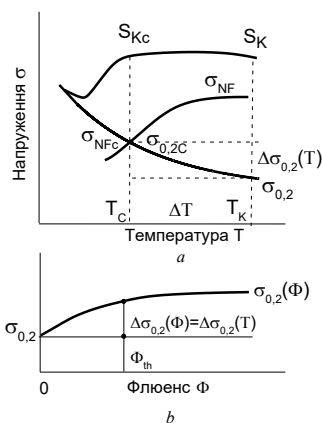


Рис. 3. Співвідношення інтенсивностей субструктурного зростання міцності $\sigma_{0.2}$ при температурному (а) і радіаційному (б) зміненні ММ.

Отже, для прогнозного висновку щодо величини $\Delta\sigma_{0.2}(\Phi)$ достатньо отримати експериментально *температурну* залежність для вихідної (неопроміненої) структури $\sigma_{NF}(T)$ (рис. 3а), а для визначення порогового значення Φ_{th} слугуватиме залежність $\sigma_{0.2} = f(\Phi)$ (рис. 3б). Оскільки величину B_{rc} можна вирахувати за кореляційною залежністю (8), то з експериментальних процедур залишається лише потреба встановити залежність $\sigma_{0.2}$ від флюенсу Φ на гладких стандартних зразках (рис. 3б).

Висновки

1. Критерій крихкості ММ під дією КН на основі критичної величини тримкої здатності $\sigma_{NFC} = \sigma_{0.2}$ фіксує умову в'язко-крихкого переходу при більш високій температурі T_C , ніж референсна температура T_0 при $K_{IC} = 100 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$, оскільки тримка здатність зразка з тріщиною для реакторних сталей, як правило, не перевищує границю плинності $\sigma_{NFC} < \sigma_{0.2}$, отже $T_0 < T_C$.
2. Очевидною перевагою критерія критичної зламостійкості B_{rc} перед критерієм $K_{IC} = 100 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{0.5}$ є те, що параметр B_{rc} на відміну від K_{IC} може застосовуватись для ММ без обмеження щодо рівня їх пластичності і для будь якого виду КН, включаючи зразки з тріщинами.
3. Принциповою відмінністю методики критичної зламостійкості є те, що вона не потребує випробування кожного конкретного ММ, що досліджується, а попередньої сертифікації саме *інструмента дослідження*, тобто стандартизованого зразка з КН для фіксації параметрів окрихчуючої сили КН (а і б в (8)) у вигляді критичної зламостійкості B_{rc} для ММ з наперед відомим параметром $B_r = S_K / \sigma_{0.2}$ при температурі реальної експлуатації виробу, що виключає потребу в будь-яких додаткових механічних випробуваннях.

Роботу виконано за фінансової підтримки НАН України (реєстраційний номер теми 0126U001813).

1. J. H. Hollomon, *Trans. AIME Iron Steel Div.*, **162**, 268 (1945).
2. В. Н. Грищенко, Ю.Я. Мешков, Ю.А. Полушкин, А.В. Шиян, Влияние прочности на охрупчиваемость сталей под действием концентраторов напряжений, *Металлофиз. новейшие технол.*, **37**, № 7, 961-971 (2015).
3. Yu. Ya. Meshkov, S. O. Kotrechko, K. F. Soroka, Brittleness of Steels under Stress Concentration (Report 2), *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **44**, No. 10, 1377-1393 (2022) (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/mfint.44.10.1377>
4. Yu. Ya. Meshkov, G. P. Zimina, Mechanical Stability and Brittleness of Metals and Alloys. Pt. 1. Parameters and Criteria of the Stable State, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **45**, No. 8, 1029-1040 (2023) (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/mfint.45.08.1029>
5. Yu. Ya. Meshkov and G. P. Zimina, Mechanical Stability and Brittleness of Metals and Alloys. Pt. 2. The Role of Mechanical Properties, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **46**, No. 4, 355-369 (2024) (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/mfint.46.04.0355>
6. Yu. Ya. Meshkov, G. P. Zimina, K. F. Soroka, and T. V. Melnychenko, Mechanical Stability and Brittleness of Metals and Alloys. Pt. 4. Mechanism of Failure Action of Stress Concentrators, *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **47**, No. 7, 753-768 (2025) (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/mfint.47.07.0753>
7. П.Ф. Кошелев, С.Е. Беляев, *Прочность и пластичность конструкционных материалов при низких температурах* (Москва: Машиностроение: 1967).
8. А.В. Шиян, *Физическая природа локального напряжения хрупкого разрушения сталей и сварных швов* (Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук) (Київ: Институт металлофизики АН УССР: 1990).
9. Yu. Ya. Meshkov and K. F. Soroka, Cold Brittleness of Steels under Stress Concentration (Report 1), *Metallofiz. Noveishie Tekhnol.*, **43**, No. 6, 781-796 (2021) (in Ukrainian). <https://doi.org/10.15407/mfint.43.06.0781>
10. Standart Test Method for Determination of Reference Temperature T_0 for Ferrite Steels in Transition Range, *ASTM E*, 1921 (2005).

Обмеження деяких критеріїв міцності анізотропних матеріалів

В. А. Ромащенко, С. О. Тарасовська¹, П. П. Лепіхін, О. С. Бейнер

Інститут проблем міцності імені Г. С. Писаренка НАН України, Київ, Україна

¹ tsa@ipp.kiev.ua

Проведено порівняльний аналіз трьох широко відомих критеріїв міцності ортотропного тіла (Хофмана, узагальненого Мізеса та максимальних напружень) щодо можливості їх застосування для оцінки міцності композитних циліндрів під внутрішнім тиском. Зроблено висновок про можливість застосування розглянутих критеріїв до певних типів матеріалів.

Ключові слова: критерій міцності, анізотропний матеріал.

Дослідженню динамічного напружено-деформованого стану (НДС) і міцності багат шарових намотувальних металокомпозитних (МК) оболонок обертання при внутрішньому вибуху сферичного заряду вибухової речовини (ВР) в повітряному середовищі присвячена незначна кількість теоретичних і експериментальних робіт. Велику актуальність набуває питання вибору критерія міцності, оскільки композитні матеріали (КМ) в більшості випадків суттєво анізотропні, класичні теорії міцності ізотропного тіла стають неприйнятними, а відомі критерії міцності анізотропного середовища як правило суттєво відрізняються між собою і для одного й того ж НДС можуть приводити до суттєво різних результатів не тільки кількісно але і якісно. На сьогодні ця проблема вивчена недостатньо.

Мета роботи: дослідити три широко відомих критерія міцності ортотропного тіла (Хофмана (КХ), узагальненого Мізеса (УКМ) і максимальних напружень (КМН)) для деяких односпрямовано армованих КМ та обрати з них найбільш придатний для оцінки міцності порожнистих композитних і МК циліндрів, виготовлених із застосуванням подібних матеріалів, навантажених внутрішнім імпульсним тиском.

В циліндричних координатах x, φ, r розглянемо НДС і міцність двох шарового циліндра під дією осесиметричного внутрішнього імпульсного тиску від вибуху сферичного заряду ВР певної маси M в повітряному середовищі розташованого на осі симетрії. Внутрішній шар – ізотропна пружнопластична рівномісна при розтязі-стиску сталь (використовувались рівняння теорії течії без зміцнення Прандтля-Рейса), зовнішній – циліндрично транісotropний пружний аж до руйнування нерівномісний при розтязі-стиску КМ з коловим армуванням, контакт між шарами ідеальний. Проведемо дослідження НДС і міцності в найбільш небезпечному осьовому перерізі $x = \text{const}$ що проходить через заряд в умовах плоского напруженого стану (ПДС). Умови ПДС дещо наближені але суттєво полегшують математичне формулювання крайової нестационарної задачі і зводять її до 1D-постановки тому що всі дотичні напруження і деформації будуть тотожно відсутні, а інші залежатимуть тільки від радіальної координати і часу (в оболонкових наближеннях – тільки від часу). Окрім того ПДС дає більш консервативні результати по міцності. При цьому імпульс тиску відповідає вибуху сферичного заряду ВР певної маси M в повітряному середовищі на відстані внутрішнього радіуса циліндра, відносна маса заряду ξ дорівнює $\xi = M/m$, де m – погонна маса циліндра. Ударна вибухова хвиля тиску на внутрішній поверхні

оболонки розраховується методикою CONWEP [1,2]. Задача вирішується чисельно в циліндричних сферичних координатах x, φ, r , з урахуванням осевої симетрії і ПДС на будь-яких торцевих площинах $x = \text{const}$.

Проведемо порівняльний аналіз трьох широко відомих критеріїв міцності ортотропного тіла (Хофмана (КХ), узагальненого Мізеса (УКМ) і максимальних напружень (КМН)) відносно можливості їхнього застосування для оцінки міцності композитних циліндрів під внутрішнім тиском. Розглядалися нерівномічні на розтяг-стиск циліндрично-транструпні КМ з коловим армуванням в умовах плоского деформованого стану (ПДС), тому завжди будемо мати лише три компоненти тензора напружень (σ_x, σ_r і σ_φ) які одночасно будуть і головними, і співпадаючими (σ_φ) з кутовим напрямком φ єдиної осі анізотропії. Всі дотичні напруження і деформації тотожно дорівнюють нулю, площини xr ($\varphi = \text{const}$) будуть площинами ізоотропії.

Для таких випадків КМН стає математично цілком коректним і його можна застосовувати для розрахунків міцності: КМН трансформується в цілком коректне і логічне узагальнення класичної першої теорії міцності максимальних головних напружень на випадок транструпних нерівномічних на розтяг-стиск матеріалів і записується так [3,4]:

$$\Phi = \max \left(\frac{\sigma_x}{Y_T}; \frac{\sigma_r}{Y_T}; -\frac{\sigma_x}{Y_C}; -\frac{\sigma_r}{Y_C}; \frac{\sigma_\varphi}{Y_{\varphi T}}; -\frac{\sigma_\varphi}{Y_{\varphi C}} \right) < 1 \quad (1)$$

де $Y_{\varphi T}$ і $Y_{\varphi C}$ – границі міцності в коловому напрямку армування при розтягу і стиску відповідно; Y_T і Y_C – те ж саме в площині ізоотропії xr ($\varphi = \text{const}$); Φ – функція міцності.

Критерій Хофмана (КХ) і УКМ є частковими найбільш відомими випадками квадратичного критерія міцності ортотропного матеріалу Цзя-Ву [5] і для наших задач вони мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Phi = & (\sigma_x + \sigma_r) \left(\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) + \sigma_\varphi \left(\frac{1}{Y_{\varphi T}} - \frac{1}{Y_{\varphi C}} \right) + \\ & + \frac{\sigma_x^2 + \sigma_r^2}{Y_T Y_C} + \frac{\sigma_\varphi^2}{Y_{\varphi T} Y_{\varphi C}} - B \sigma_x \sigma_r - A (\sigma_x + \sigma_r) \sigma_\varphi < 1 \end{aligned} \quad (2)$$

де для КХ:

$$A = \frac{1}{Y_{\varphi T} Y_{\varphi C}}; B = \frac{2}{Y_T Y_C} - \frac{1}{Y_{\varphi T} Y_{\varphi C}} \quad (3)$$

і для УКМ:

$$A = \frac{1}{\sqrt{Y_T Y_C Y_{\varphi T} Y_{\varphi C}}}; B = \frac{1}{Y_T Y_C} \quad (4)$$

Якщо (1) або (2) і (3) або (2) і (4) в залежності від критерія, що використовується, виконано, то міцність дотримана. В іншому випадку ($\Phi \geq 1$) обраний критерій міцності не задовольняється і в даній точці відбувається руйнування матеріалу. Випадки ізоотропних і/або рівномічних при розтязі-стиску матеріалів легко отримуються з (1) і (2) як часткові (вироджені). Зауважимо, що у всіх подальших розрахунках внутрішній (перший) шар виконано з ізоотропної рівномірної при розтязі-стиску сталі і для неї (1) вироджується у класичну першу теорію міцності а (2) у четверту [6]. Міцність (тобто

функція Φ) розраховується на кожному часовому кроці в кожному кінцево-різницевому елементі розрахункової області. Якщо при цьому її максимальне значення по всьому об'єму розрахункової області $\Phi_{\max}$ було менше одиниці – об'єкт вважався міцним за даним критерієм, в іншому випадку міцність циліндра в цілому вважалася порушеною і фіксувалося руйнування.

УКМ заздалегідь побудований так що автоматично (по визначенню) задовольняє необхідним і достатнім умовам існування поверхні міцності (НДУІПМ): тобто він математично коректний для довільного НДС і довільного орто-, транс- і ізотропного тіла з довільним ступенем анізотропії (питання щодо його фізичної адекватності поки залишається відкритим і буде аналізуватись далі). КХ цю властивість має не завжди: для нього є досить значний клас орто- і транстропних матеріалів, де НДУІПМ не задовольняються і КХ стає неприйнятним. Зокрема його не можна використовувати для циліндрично транстропних тіл у яких $Y_T Y_C \geq 4Y_{\varphi T} Y_{\varphi C}$. Але в наших випадках ми будемо мати справу з односпрямовано армованими в коловому напрямку циліндрично транстропними композитами для яких завжди виконується нерівність $Y_T Y_C \geq 4Y_{\varphi T} Y_{\varphi C}$ і НДУІПМ для КХ будуть задовольнятися, тобто КХ буде також математично коректним. Здатність КХ адекватно визначати міцність з фізичної точки зору, як і для УКМ, буде аналізуватись далі.

Щоб спростити і зробити більш наочним подальший порівняльний аналіз вище обраних трьох критеріїв міцності (1)-(4) розглянемо два транстропних матеріала. Матеріал М1 який має таку міцність: $Y_T = 50$ МПа; $Y_C = 200$ МПа; $Y_{\varphi T} = Y_{\varphi C} = 1000$ МПа і матеріал М2 для якого: $Y_T = Y_C = 50$ МПа; $Y_{\varphi T} = 1000$ МПа; $Y_{\varphi C} = 250$ МПа. Всі границі на розтяг у М1 і М2 однакові, а відповідні границі на стиск у М2 вчетверо нижчі ніж ті ж самі у М1. Цілком логічно припускати що для довільного НДС М1 має бути або міцнішим за М2 або в крайньому разі не слабше ніж М2 яким би критерієм міцності ми не користувались.

Для М1 і М2 розглянемо такий напружений стан (двовісний нерівносторонній розтяг): $\sigma_r = 0$; $\sigma_{\varphi} = 800$ МПа а σ_x будемо змінювати від 0 до 100 МПа. Цей НДС для досліджуваних нижче задач (порожнисті циліндри під внутрішнім тиском) є цілком природнім. В більшості інженерних оболонкових наближеннях радіальним напруженням взагалі нехтують. Колове напруження зазвичай максимальне (ми його й обрали достатньо великим але трохи нижчим за відповідну границю міцності), осьове теж може бути значним але нижчим від колового і зазвичай σ_{φ} і σ_x одного знаку. Оскільки границя міцності на осьовий розтяг для обох матеріалів всього лише 50 МПа то зміни σ_x в інтервалі $[0; 100]$ МПа буде цілком достатньо щоб уловити основні тенденції зміни запасу міцності (або ж перевантаження) цих двох композитів в залежності від σ_x . Тобто даний НДС цілком характерний для першого інженерного оболонкового наближення для циліндрів під внутрішнім тиском.

Підставляючи $\sigma_r = 0$; $\sigma_{\varphi} = 800$ МПа в (1)-(4) отримуємо залежність $\Phi(\sigma_x)$ для всіх трьох обраних критеріїв міцності. Цілком очевидно що КМН для М1 і М2 показав співпадаючі результати: запас міцності ($\Phi < 1$) при $\sigma_x < 50$ МПа і перевантаження ($\Phi > 1$) при $\sigma_x > 50$ МПа. Це легко бачити з його математичного визначення (1): обидва матеріали М1 і М2 мають однакові границі міцності на розтяг і при цьому обидва напруження (σ_{φ} і σ_x) також розтягуючі. Для М1 найбільш консервативним виявився КХ (міцність порушувалась вже при $\sigma_x > 22$ МПа), УКМ давав дані ближчі до КМН (для УКМ міцність порушувалась при $\sigma_x > 34,5$ МПа) і також дещо більш

консервативні. Для М2 КХ і КМН практично співпадають а результати УКМ алогічні і парадоксальні: запас міцності ($\Phi < 1$) в усьому інтервалі зміни σ_x (від 0 до 100 МПа) не дивлячись на те що М2 слабше ніж М1, більше того – поява від’ємних значень $\Phi < 0$ для УКМ. Треба сказати що і КХ фізично не досить коректний: міцніший М1 руйнується вже починаючи з $\sigma_x > 22$ МПа а слабший М2 тільки при $\sigma_x > 50$ МПа.

Щоб завершити аналіз придатності критеріїв (1)-(4) для розрахунків міцності односпрямовано армованих композитів розглянемо ще один матеріал М3 з такими даними: $Y_T = Y_C = Y_{\Phi C} = 50$ МПа; $Y_{\Phi T} = 1000$ МПа. З трьох досліджуваних М3 самий слабкий, М1 – самий міцний, при цьому відповідні границі міцності на розтяг у всіх трьох композитів однакові. Для того ж напруженого стану залежності $\Phi(\sigma_x)$ для трьох критеріїв у випадку матеріалу М3 представлені в табл.1. Для більшої наочності результатів інтервал зміни σ_x розглянуто вдвічі більший: від 0 до 200 МПа.

Таблиця 1.

Значення $\Phi(\sigma_x)$ для різних критеріїв міцності для матеріалу М3

σ_x , МПа	0	25	50	75	100	125	150	175	200
УКМ	-2,4	-3,94	-4,98	-5,52	-5,56	-5,1	-4,14	-2,68	-0,72
КХ	-2,4	-2,55	-2,2	-1,35	0	1,85	4,2	7,05	10,4
КМН	0,8	0,8	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4

З табл.1 видно що УКМ взагалі непридатний для подібних композитів: в усьому діапазоні зміни σ_x він демонструє навіть не $\Phi < 1$ а взагалі $\Phi < 0$. Ситуація з КХ трохи краща але теж погана: при $\sigma_x < 100$ МПа маємо від’ємні значення Φ , далі при зростанні σ_x маємо вже також зростаючі $\Phi > 0$ і тільки при $\sigma_x \geq 114$ МПа маємо руйнування, але ж $Y_T = 50$ МПа більше ніж вдвічі менше цього значення. На відміну від УКМ і КХ КМН показав ті ж самі фізично очікувані результати що і раніше для М1 і М2: запас міцності при $\sigma_x < Y_T$ і перевантаження при $\sigma_x > Y_T$.

Обчислимо ще для даного НДС згідно (1)-(4) критичне напруження $(\sigma_x)_{кр}$ по досягненні якого матеріали руйнуються. Згідно КМН (1) для всіх трьох композитів (М1, М2 і М3) воно однакове: $(\sigma_x)_{кр} = Y_T = 50$ МПа. Згідно КХ (2), (3) маємо 22 МПа для найміцнішого (М1), 50 МПа для слабшого (М2) і 114 МПа для найслабшого (М3). Згідно УКМ (2), (4) маємо 34,5 МПа для М1, 101 МПа для М2 і 218 МПа для М3. Бачимо що і КХ і УКМ призводять до фізично неправильних результатів: зі зменшенням границь міцності матеріалу критичні напруження зростають (причому дуже суттєво зростають) хоча мали б зменшуватись або в крайньому випадку залишатись незмінними. Результати ж КМН цілком очікувані: критичні напруження залишаються незмінними тому що Y_T також для всіх матеріалів однакове (варіювались тільки обидві границі міцності на стиск).

З проведеного аналізу робимо висновок: застосування КХ і УКМ (2)-(4) для транслопних композитів розглянутого типу неприйнятне. Ці критерії представляють собою деяке математичне узагальнення класичної четвертої теорії міцності ізотропного тіла на випадки анізотропії і нерівномірності розтягу-стиску, але для матеріалів даного типу ці узагальнення виявилися невдалими, призводять до кількісно і якісно неправильних розрахунків (впритул до явно видимих алогічних парадоксів) і застосовувати їх навіть в оболонкових наближеннях ($\sigma_r = 0$) неможна. Для суттєво більш загальних випадків НДС – тривісні динамічні хвильові стани – похибки КХ і

УКМ будуть тільки зростати. КМН (1) також є узагальнення класичної першої теорії міцності, для циліндрів з коловим армуванням під внутрішнім тиском він математично коректний і, як показав вищенаведений аналіз, не призводить до парадоксальних або фізично неочікуваних результатів. Тому в подальших розрахунках подібних конструктивних елементів в якості критерія міцності рекомендується використовувати КМН (1).

1. D. W. Hyde User's guide for microcomputer program CONWEP, application of TM5-855-1, Fundamentals of protective design for conventional weapons, 1992.
2. G. Randers-Pehrson and K. A. Bannister Airblast Loading Model for Dyna-2D & Dyna-3D // Army Research Laboratory. – ARL-TR-1310. – 1997, 97p.
3. П. П. Лепихин, В. А. Ромашенко, Прочность неоднородных анизотропных полых цилиндров при импульсном нагружении, Наук. думка, Киев, (2014).
4. V. A. Romashchenko, "Limitations Of Some Strength Criteria For Composite Materials", Strength Mater., **51**, 828–833, (2019). <https://doi.org/10.1007/s11223-020-00131-8>
5. P. P. Lepikhin, V. A. Romashchenko, O. S. Beiner and S. O. Tarasovska, "Influence of metal layer thickness on the stress-strain state and strength of metal composite cylinders under internal explosion", Strength Mater., **54**, 358–371, (2022). <https://doi.org/10.1007/s11223-022-00411-5>
6. Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев, Справочник по сопротивлению материалов, Изд-во Дельта, Киев, (2008).

Наукове видання

**Матеріали доповідей
Міжнародної наукової конференції
АКТУАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МЕХАНІКИ І МАШИНОЗНАВСТВА – 2026**

26 – 28 травня, 2026

Видано в авторській редакції

ОРГАНІЗАЦІЙНИЙ КОМІТЕТ (Україна)

Співголови:

Богданов В.Л., Назаренко В.М., Чирков О.Ю.

Учений секретар оргкомітету:

Кононученко О.В.

Члени організаційного комітету:

Бялонович А.В., Димитрієва Н.Ф., Єременко О.О., Калугіна Н.О., Кравчишин О.З.,
Лапіна Л.Г., Огліх В.В., Радченко С.А., Селіванов М.Ф., Старинко Р.С., Тарасовська
С.О., Хояновський О.О., Шевченко В.Г., Шугайло О.П.

Підп. до друку 25.06.2026.

Ум.- друк. арк. 29,12

Інститут проблем міцності імені Г.С. Писаренка НАН України,
01014, Україна, м. Київ, вул. Садово-Ботанічна, 2

Свідцтво про внесення до Державного реєстру видавців,
виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК, № 8639 від 12.05.2026

Тел: (044) 285-16-87

Факс: (044) 286-16-84

E-mail: ips@ipp.kiev.ua

ISBN 978-617-95433-1-9



9 786179 543319